

Министерство образования и науки Республики Таджикистан
ГОО «Худжандский государственный университет
имени академика Б. Гафурова»

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Ф 17

На правах рукописи



ФАЙЗИЕВ МУБИНДЖОН ГАФОРОВИЧ

**ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ТРЁХ-
И ЧЕТЫРЁХМЕРНЫХ НЕКЛАССИЧЕСКИХ (СОСТАВНЫХ) СИСТЕМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ
ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

1.1.3 – дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научные руководители:

доктор физико-математических наук,
профессор **Сафаров Д.Х.**

доктор физико-математических наук,
профессор **Байзаев С.**

Худжанд – 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список используемых обозначений.....	3
Введение.....	4
Глава 1. Обзор и анализ литературы по теме диссертации.....	12
§1.1. Обзор литературы по системам уравнений в частных производных неклассического типа.....	12
§1.2. Обзор литературы по вырождающимся системам уравнений в частных производных.....	24
Глава 2. Трёхмерные вырождающиеся неклассические системы уравнений первого порядка.....	32
§2.1. Вспомогательные сведения и некоторые задачи.....	32
§2.2. Общее решение неклассических систем четырех уравнений первого порядка с тремя независимыми переменными.....	46
§2.3. Начально-краевые задачи в полупространстве.....	51
§2.4. Видоизменённые начально-краевые задачи.....	59
§2.5. Задачи типа задачи Римана-Гильберта в ограниченных трёхмерных областях.....	64
Глава 3. Вырождающиеся неклассические системы уравнений первого порядка в пространстве четырёх независимых переменных.....	87
§3.1. Задачи в полупространстве.....	90
§3.2. Задачи в ограниченной области четырёхмерного пространства.....	97
§3.3. Начально-краевая задача для системы уравнений с младшими членами..	98
§3.4. Начальные и смешанные задачи для одного класса неклассических систем уравнений.....	102
Глава 4. Обсуждение результатов исследования.....	120
Выводы.....	131
Рекомендации по практическому использованию результатов.....	132
Список литературы.....	133

Список используемых обозначений

R^n – n -мерное вещественное пространство;

C^n – класс функций, имеющих непрерывные частные производные n -го порядка;

$\mathcal{M}$ – класс функций (или вектор-функций), принадлежащих $C^2(R_+^4) \cap C^1(\bar{R}_+^4)$;

$S' = S'(R^3)$ – пространство умеренно растущих распределений в R^3 (пространство Шварца);

$L_{q,2}(R^2)$ – пространство Лебега с смешанной нормой;

$\nabla U = \text{grad } U(x, y, z) = (U_x, U_y, U_z)$ – градиент функции $U(x, y, z)$;

$\text{div } \Phi(X) = u_x + v_y + w_z$ – дивергенция векторного поля $\Phi(X) = \{u, v, w\}$, $X = (x, y, z) \in R^3$;

$\text{rot } \Phi(X) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{bmatrix}$ – ротор векторного поля $\Phi(X) = \{u, v, w\}$;

$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$ – оператор Лапласа;

$\square U \equiv U_{xx} + U_{yy} - U_{zz}$ – волновой оператор;

$\mathcal{F}_x V(t, X)$ – преобразование Фурье вектор-функции $V(t, X)$ по переменной X ;

$W_2^k(D)$ – пространство Соболева с нормой $\|\cdot\|_k$;

ЭПД – уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Уравнения с частными производными (у.ч.п.) неклассического типа с сингулярными коэффициентами составляют важный класс уравнений математической физики. Как отмечено в [83] «Одним из важных вопросов теории дифференциальных уравнений с частными производными является исследование граничных задач для различных классов уравнений, в частности для уравнений неклассического (составного) типа. Дифференциальные уравнения с частными производными, имеющие в каждой точке рассматриваемой области наряду с комплексными характеристиками действительные характеристики, получили название уравнения составного типа. Краевые задачи для таких уравнений изучены разными авторами (Ж. Адамар [108], О. Сестранд [120], Р. Девис [106], А.В. Бицадзе [9], М.С. Салахитдинов [70], Т.Д. Джураев [26], Г.И. Эскин [98], В.Н. Врагов [18] и др.).

Развитие теории неклассических (составных) систем уравнений берет свое начало в 60-е годы XX века работами таджикского математика А.Джураева, где были впервые поставлены и исследованы граничные задачи для систем уравнений первого порядка составного типа с двумя независимыми переменными. В его книге Системы уравнений составного типа (М.: Наука, 1972) был разработан метод сингулярных интегро-функциональных уравнений, с помощью которого была построена теория нормальной разрешимости и вычислены индексы задач через их коэффициенты. Дальнейшие исследования по граничным задачам для систем составного типа с двумя независимыми переменными проводились в работах Л. Вольферсдорфа [125], Ц. Видица [123], Д. Муртазаева [50], С. Муллоева [49], А. Сангинова [71] и других авторов. Однако в многомерном случае такие системы очень мало изучены, если не считать рассмотрения отдельных систем уравнений в полупространстве, в цилиндрической области, а также отдельных систем для областей типа слоя (А. Джураев [24], А. Янушаускас [100], П. Берхин [8], З. Дубля [29] и др.). При исследовании многомерных неклассических систем возникают новые моменты,

вызываемые не только трудностями технического характера. Например, весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряет свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений по области с краями. Нет до сих пор достаточно общих методов исследования неклассических систем с многими независимыми переменными, вследствие чего рассматриваемые в работах вышеназванных авторов системы имеют частный характер» [83]. Поэтому исследование неклассических систем у.ч.п. в многомерных областях, в том числе вырождающихся неклассических систем, представляется актуальным.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Во второй половине XX века с развитием техники и физики в бывшем Советском Союзе и за рубежом многие крупные математики начали исследовать так называемые вырождающиеся уравнения. Ярким примером являются исследования М.В. Келдыша [36], О.А. Олейника [54], М.И. Вишика [15], Л.Д. Кудрявцева [39] и др. Ныне теория вырождающихся уравнений с частными производными классического типа (эллиптического и гиперболического) хорошо разработана (см. например, работы Векуа И.М. [122], Смирнова М.М. [91], Михайлова Л.Г. [48], Усманова З.Д. [95], Раджабова Н.Р. [60], Бойматова К.Х. [10], Искокова С.А. [33] и др.). Однако вырождающиеся неклассические уравнения и, тем более, вырождающиеся системы неклассического типа до сих пор не исследованы. В этой связи весьма актуальным является вопрос развития теории многомерных неклассических систем уравнений, вырождающихся на границе области.

Данная диссертация посвящена исследованию вырождающихся неклассических (составных) систем дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка в ограниченных и неограниченных областях трёх- и четырёхмерного пространства с разными характерами вырождения на границах областей.

Связь исследования с научными программами (проектами) и темами. Данная работа выполнена в рамках реализации плана научно-исследовательских работ кафедры информатики и вычислительной математики и кафедры

математического анализа имени профессора А. Мухсинова математического факультета ГОУ “Худжандский государственный университет имени академика Бободжона Гафурова” на период 2021 – 2025 гг. по теме «Исследование классов обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями, разрешимость переопределенных систем дифференциальных уравнений в различных функциональных пространствах, применение групп и алгебры Ли в дифференциальных уравнениях».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Целью диссертационной работы является исследования краевых задач для трёх- и четырёхмерных вырождающихся составных систем у.ч.п. первого порядка. В неограниченных областях типа полупространства исследовать начально-краевые и видоизменённые начально-краевые задачи, а в ограниченных областях исследовать смешанные и граничные задачи типа задачи Римана-Гильберта.

Задачи исследования:

- на основе модельной неклассической системы у.ч.п. первого порядка создать вырождающиеся системы у.ч.п. в трёхмерных и четырёхмерных областях с разными характерами вырождения на границах областей;
- найти формулы для выражения общего решения созданных систем;
- получить теоремы разрешимости краевых задач с начальными и начально-краевыми условиями для рассматриваемых систем в ограниченных и неограниченных трёхмерных и четырехмерных областях;
- получить утверждения касательно нётеровости задачи Римана-Гильберта и найти индекс задач для выше указанных систем и систем у.ч.п. с младшими членами;
- установить однозначную разрешимость смешанных задач для модельных и вырождающихся неклассических систем у.ч.п. в произвольных (ограниченных и неограниченных) областях четырёхмерного пространства и выписать явную формулу решения.

Объект исследования. Объектом исследования являются трёх- и четырёхмерные вырождающиеся неклассические (составные) системы дифференциальных у.ч.п. первого порядка.

Предмет исследования. Предметом исследования являются установление теорем о разрешимости и получение формул для решений, рассматриваемых вырождающихся неклассических (составных) систем у.ч.п. первого порядка в пространстве трёх и четырёх независимых переменных.

Теоретические основы исследования. Теоретическими основами исследования являются теория краевых и начально-краевых задач для у.ч.п. эллиптического и гиперболического типов, теория гармонических, аналитических и специальных функций, теория преобразования Фурье и принципы функционального анализа. На основе этих теорий в диссертации разработаны методы исследования краевых задач для новых, ранее неизученных классов систем уравнений неклассического типа с вырождениями.

Научная новизна. Основные новые результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- установлены теоремы единственности решений задачи Коши в полупространстве $R_+^3 = \{(x, y, z): (x, y) \in R^2, z > 0\}$ для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (EPD) и задачи Дирихле в полупространстве R_+^3 для уравнения гидродинамической осесимметрической теории потенциала (GASPT);
- на основе модельной неклассической системы у.ч.п. первого порядка созданы вырождающиеся системы у.ч.п. в трёхмерных и четырёхмерных областях с разными характерами вырождения на границах областей;
- найдены формулы для выражения общего решения полученных систем через решения уравнений Лапласа, EPD и GASPT;
- получены теоремы существования и формулы решений смешанных краевых задач в R_+^3 для вырождающихся составных систем четырех у.ч.п.
- получены утверждения касательно нётеровости задачи Римана-Гильберта и найдены индекс задач для выше указанных систем;

- установлена нётеровость задачи типа задачи Римана-Гильберта в ограниченных трёхмерных областях для неклассических систем уравнений с младшими членами и найден индекс задачи;

- доказаны теоремы существования решений и найдены формулы решений краевых задач в полупространстве $R_+^4 = \{(t, x, y, z): (t, x, y) \in R^3, z > 0\}$, в двугранном угле $E = \{(t, x, y, z): , y > 0, z > 0\}$ и в ограниченной области из R_+^4 с участком границы на гиперплоскости $z = 0$ для вырождающихся неклассических систем четырех уравнений первого порядка с четырьмя независимыми переменными;

- установлена теорема о фредгольмовости начально-краевых задач для неклассических систем четырех уравнений с младшими членами.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы единственности решений задачи Коши и первой краевой задачи в R_+^3 для уравнений EPD и GASPT соответственно; формулы общих решений для восьми групп вырождающихся неклассических систем четырех у.ч.п. первого порядка в R^3 ;

- теоремы существования и формулы решений смешанных (видоизмененных начально-краевых) задач в полупространстве R_+^3 и теоремы о нётеровости и индексе задач типа задачи Римана-Гильберта для характеристически вырождающихся неклассических систем четырех у.ч.п. первого порядка с тремя независимыми переменными;

- теоремы существования решений и формулы решений краевых задач в полупространстве $R_+^4 = \{(t, x, y, z): (t, x, y) \in R^3, z > 0\}$, в двугранном угле $E = \{(t, x, y, z): , y > 0, z > 0\}$ и в ограниченной области из R_+^4 с участком границы на гиперплоскости $z = 0$ для вырождающихся неклассических систем четырех уравнений первого порядка с четырьмя независимыми переменными; теорема о фредгольмовости начально-краевых задач для системы четырех уравнений с младшими членами.

Теоретическая и практическая значимость работы. Исследования, проведённые в данной диссертации, имеют теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях по теории неклассических (составных) систем дифференциальных уравнений с частными производными, а также в других областях прикладных наук, таких как физика, механика и т.д. Материалы данной диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов старших курсов, магистрантов и докторантов вузов, обучающихся по специальностям «Математика», «Прикладная математика» и «Механика».

Достоверность результатов диссертации. Все утверждения, леммы и теоремы в диссертации строго математически доказаны, ряд положений подтверждаются исследованиями других учёных, проведенными в частных случаях.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 1.1.3 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. Она относится к составной части этой специальности – уравнения с частными производными и полностью соответствует формуле специальности и пункту «Качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений» области исследования.

Личный вклад соискателя ученой степени. Выбор темы и направление диссертационного исследования осуществлены соискателем по согласованию с научным руководителем. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора. Все приведенные в разделе “Научная новизна” результаты исследования получены лично диссертантом.

Апробация результатов работы. Основные положения и результаты докладывались на следующих конференциях:

- международная научная конференция «Современные проблемы теории дифференциальных уравнений и математического анализа», посвящённая 80-летию академика НАНТ Джураева А.Д. (Душанбе, 07-08 декабря 2012 г.);
- научная конференция XI Школы молодых учёных «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы современного анализа и информатики» (Кабардино-Балкарская Республика, п. Терскол 4 – 8 декабря 2013 г.);
- международная научная конференция «Современные проблемы математики и её преподавания», посвящённая 20-летию Конституции Республики Таджикистан и 60-летию учёных математиков А. Мухсинова, А.Б. Назимова, С. Байзаева, Д. Осимовой, К. Тухлиева (Худжанд, 28 - 29 июня 2014 г.);
- республиканские научные конференции с участием зарубежных учёных «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» и «Современные методы математической физики и их приложения» (Ташкент, Узбекистан, 23 - 25 октября 2014 г. и 15 - 17 апреля 2015 г.);
- республиканская научно-теоретическая конференция «Актуальные проблемы современной математики и её преподавания» (Душанбе, 20 декабря 2014 г.);
- VIII International research and practice conference «Science and Education» (Munich - Germany, March 19th – 20th, 2015);
- международная научная конференция «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвящённая 80-летию члена-корреспондента НАНТ Стеценко В.Я. (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.);
- республиканская научно-теоретическая конференция «Современные проблемы прикладной математики и её роль в развитии технического мышления молодёжи», посвящённая 30-летию Государственной независимости Республики Таджикистан и “Двадцатилетие обучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования” (Худжанд, 29-30 ноября 2021 г.);
- международная научно-практическая конференция “О применении дифференциальных уравнений в решении практических задач” (Душанбе, 4 ноября 2021 г.);

- VII International scientific conference “Modern problems of applied Mathematics and Information Technologies Al-Khwarizmi 2021” dedicated to the 100th anniversary of the academician Kabulov V.K. (Fergana- Uzbekistan, November 15th-17th, 2021).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 18 статьях, в том числе 7 из них в рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан. Из совместных работ в диссертацию включены результаты, полученные лично соискателем.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы, содержащего 143 источников. Объём диссертации составляет 147 страниц компьютерного набора. Для обозначения формул, теорем и следствий применяется двойная нумерация, в которой первый номер совпадает с номером главы, второй указывает порядковый номер формул, теорем или следствий в данной главе.

ГЛАВА 1

ОБЗОР И АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В данной главе представлен обзор и анализ научной литературы, относящейся к тематике диссертационного исследования. В первом параграфе рассматриваются работы, посвящённые системам у.ч.п. неклассического (составного) типа. Во втором параграфе даётся обзор работ, посвященных вырождающимся системам у.ч.п.

§1.1. Обзор литературы по системам уравнений в частных производных неклассического типа

Теория систем и уравнений с частными производными неклассического (составного) типа представлены в трудах французского математика Ж. Адамара [108], О. Сёстрандта [120], Р. Девиса [105], [106], Г.И. Эскина [98], В.Н. Врагова [18], А.Д. Джураева [23], Т.Д. Джураева [26], их учеников и последователей (см., например, [49], [50], [51], [71], [76]-[87]).

Ж. Адамар [108] в 30-х годах прошлого столетия впервые изучал следующие уравнения составного типа

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (1.2)$$

Для уравнения вида (1.1) О. Сёстранд [120] исследовал краевую задачу: *найти регулярное в круге $K = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ решение $u(x, y)$, если известны его значения при $x^2 + y^2 = 1$ и $x = 0, -1 \leq y \leq 1$.*

Подобная краевая задача для уравнения с главной частью $\frac{\partial}{\partial x} \Delta$ была рассмотрена Р. Девисом [106]. В работах этого автора и Т. Джураева [26] изучены

более общие краевые задачи для уравнения вида (1.1) и общего уравнения составного типа третьего порядка.

Сафаровым Д.Х. в [83] «излагаются способы построения многомерных аналогов системы

$$\begin{aligned} W_{\bar{z}} + A(z)W(z) + B(z)\bar{W}(z) &= A_1(z)V(z), \\ V_x &= \operatorname{Re}[B_0(z)W(z)], \end{aligned} \quad (1.3)$$

и методы нахождения представления общего решения полученных систем, где $V(z)$ - вещественная, а $W(z)$ - комплексная искомые функции; коэффициенты системы (1.3) предполагаются заданным функциями класса Гельдера. Трехмерным аналогом системы (1.3) является система

$$\begin{aligned} u_x + v_y + w_z &= 0, \\ u_y - v_x &= 0, \\ u_z - w_z &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

которая получается из переопределенной системы уравнений потенциальных векторных полей вычеркиванием лишнего уравнения. Ее характеристическая форма имеет вид

$$\chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1|\xi|^2, |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2.$$

Следовательно, система (1.4) в каждой точке пространства R^3 является системой составного типа. Общее решение системы (1.4) представляется в виде

$$u(x, y, z) = \frac{\partial \omega}{\partial x}, v(x, y, z) = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \chi_1(y, z), w(x, y, z) = \frac{\partial \omega}{\partial z} + \chi_2(y, z),$$

где $\omega(x, y, z)$ - произвольная гармоническая функция, χ_1 и χ_2 - произвольные дифференцируемые функции двух переменных y, z , удовлетворяющие соотношению

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial y} + \frac{\partial \chi_2}{\partial z} = 0.$$

Многомерным обобщением системы (1.4) является система

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_j} = 0, j = \overline{2, n}, \quad (1.5)$$

которая получается также вычеркиванием лишних уравнений из переопределенной системы $\operatorname{div} U = 0, \operatorname{rot} U = 0$, где $U(x) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ $x \in R^n$. Характеристическая форма системы (1.5) имеет вид

$$\chi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \xi_1^{n-2} |\xi|^2, |\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2.$$

Следовательно, эта система при $n \geq 3$ является составной системой.

Общее решение системы (1.5) представляется в виде

$$u_1(x) = \frac{\partial \omega}{\partial x_1}, u_j(x) = \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \chi_j(x_2, \dots, x_n), j = \overline{2, n}, \quad (1.6)$$

где $\omega(x)$ - произвольная гармоническая функция переменной $x \in R^n$, а χ_j - произвольные дифференцируемые функции, связанные соотношением

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \chi_3}{\partial x_3} + \dots + \frac{\partial \chi_n}{\partial x_n} = 0. \quad (1.7)$$

Характерной особенностью систем (1.4) и (1.5) является то, что они обладают одним семейством (в том числе многократные в случае системы (1.5)) вещественных характеристик» [83].

В работе [96] система (1.2) изучена в полупространстве $t > 0$. Как отмечает автор «следствием системы (1.4) является уравнение Лапласа

$$\Delta w = w_{xx} + w_{yy} + w_{tt} = 0.$$

Со второго и третьего уравнений системы (1.4) определим u и v :

$$u = - \int_0^t w_x dt + \varphi(x, y), v = - \int_0^t w_y dt + \psi(x, y), \quad (1.8)$$

где $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ - произвольные непрерывно дифференцируемые функции переменных x и y связанные соотношением

$$\varphi_x + \psi_y = -w_t(x, y, 0). \quad (1.9)$$

Для системы (1.4) исследуем следующие задачи:

Задача 1. Найти в полупространстве $E_3^+ = \{(x, y, t): (x, y) \in E_2, t > 0\}$ решение класса $u, v \in C^1(E_3^+) \cap C(E_3^+ \cup E_2), w \in C^2(E_3^+) \cap C^1(E_3^+ \cup E_2)$ системы (1.4), удовлетворяющее условиям

$$u(x, y, 0) = f(x, y), v(x, y, 0) = g(x, y), \quad (1.10)$$

где $f(x, y)$ и $g(x, y)$ заданные на E_2 , достаточно гладкие и достаточно быстро убывающие на бесконечности функции.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.1. Если функции f и g в (1.10) непрерывно дифференцируемы и $-\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = O(\rho^{-1-\delta}), \delta > 0, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, то задача 1 имеет единственное решение.

Задача 2. Найти в полупространстве $E_3^+ = \{(x, y, t): (x, y) \in E_2, t > 0\}$ решение класса $u, v \in C^1(E_3^+) \cap C(\bar{E}_3^+), w \in C^2(E_3^+) \cap C^1(\bar{E}_3^+)$ системы (1.4), удовлетворяющее условиям

$$u_y(x, y, 0) - v_x(x, y, 0) = 0, w(x, y, 0) = f(x, y), \quad (1.11)$$

где $f(x, y)$ заданная на E_2 , достаточно гладкие и достаточно быстро убывающие на бесконечности функции.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.2. Если в (1.11) $f(x, y) \in C(E_2)$ и $f(x, y) = O(\rho^{-1-\beta}), \beta > 0, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, то задача 2 имеет единственное решение» [96].

В работе [96] также рассмотрен «следующий многомерный аналог системы (1.5)

[illegible]

где $u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t), w(x, t)$ – неизвестные функции переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и t . Характеристический определитель системы (1.12) имеет следующий вид:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_0) = (-1)^{n-1} \lambda_0^{n-2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 + \lambda_0^2).$$

Результатом системы (1.12) является уравнение Лапласа для неизвестной w :

$$\Delta w = w_{x_1 x_1} + \cdots + w_{x_n x_n} + w_{tt} = 0. \quad (1.13)$$

Следовательно, w является гармонической функцией $n+1$ переменных. Неизвестные функции $u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t)$ определим из последних n уравнений системы (1.12):

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \int_0^t w_{x_1} dt + \varphi_1(x), \quad u_2(x, t) = \int_0^t w_{x_2} dt + \varphi_2(x), \dots, \\ u_n(x, t) &= \int_0^t w_{x_n} dt + \varphi_n(x), \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ - произвольные непрерывно дифференцируемые функции переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ связанные соотношением

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = -w_t(x, 0). \quad (1.15)$$

Задача 3. Найти в полупространстве $E_{n+1}^+ = \{(x, t) : x \in E_n, t > 0\}$ решение класса $u_i \in C^1(E_{n+1}^+) \cap C(E_{n+1}^+ \cup E_n), w \in C^2(E_{n+1}^+) \cap C^1(E_{n+1}^+ \cup E_n)$, системы (1.12), удовлетворяющее условиям

$$u_1(x, 0) = f_1(x), u_2(x, 0) = f_2(x), \dots, u_n(x, 0) = f_n(x), \quad (1.16)$$

где $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ - заданные на гиперплоскости $t = 0$ достаточно гладкие и достаточно быстро убывающие на бесконечности функции.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.3. Если функции $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ в (1.16) непрерывно дифференцируемы и $-\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \dots - \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = O(\rho^{-1-\delta})$, $\delta > 0$, $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, то задача 3 имеет единственное решение» [96].

В [86] Сафаровым Д.Х. и Мирзоевым С.С. на основе системы (1.5) были сконструированы и найдены представления общего решения одной многомерной неклассической системы.

«Рассмотрим в пространстве R^{n+1} следующую систему уравнений первого порядка:

[illegible]

с характеристическим определителем

$$\chi(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_0^{n-1} (\xi_0^2 + |\xi|^2), |\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2.$$

Система (1.17) в каждой точке пространства R^{n+1} наряду с комплексными характеристиками имеет многократные вещественные характеристики, следовательно, данная система является неклассической (составной) системой уравнений с частными производными первого порядка.

Обозначим через D оператор, определяемый левой частью системы (1.17). Непосредственным подсчетом можно заметить, что квадрат оператора D порождает уравнение Лапласа $\Delta s = 0$ и следующую систему

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + grad(div U) = 0, U(t, x) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (1.18)$$

с характеристическим определителем

$$\chi(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_0^{2(n-1)} (\xi_0^2 + |\xi|^2),$$

где Δ - оператор Лапласа по всем переменным пространства R^{n+1} , а $grad$ и div - соответственно операторы градиента и дивергенции по $x \in R^n$.

Четвёртая степень оператора D порождает бигармоническое уравнение $\Delta^2 s = 0$ и систему уравнений

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right) grad(div U) = 0 \quad (1.19)$$

с характеристическим определителем

$$\chi(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_0^{4(n-1)} (\xi_0^2 + |\xi|^2).$$

Последовательно, продолжая этот процесс, убедимся, что оператор D^{2m} порождает полигармоническое уравнение $\Delta^m s = 0$ и систему уравнений

$$\frac{\partial^{2m} U}{\partial t^{2m}} + \left[\sum_{j=1}^m \Delta^{j-1} \frac{\partial^{2(m-j)}}{\partial t^{2(m-j)}} \right] grad(div U) = 0, m \geq 1. \quad (1.20)$$

с характеристическим определителем

$$\chi(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_0^{2m(n-1)} (\xi_0^2 + |\xi|^2)^m, m \geq 1.$$

Все регулярные в некоторой области $G \in R^{n+1}$ решения общей системы (1.20) представляются по следующей формуле

$$U(t, x) = grad \Omega + \sum_{k=0}^{n-1} t^k \Psi_k(x),$$

где $\Omega(t, x)$ – решение полигармонического уравнения $\Delta^m \Omega = 0$, $\Psi_k(x)$ – произвольные вектор-функции класса $C^{2m}(R^n)$, удовлетворяющие соотношениям $\operatorname{div} \Psi_k(x) = 0, k = \overline{0, m-1}$ » [86].

Г.И. Эскин [98] исследовал для уравнений составного типа высшего порядка на плоскости ряд краевых задач.

В монографии В.Н. Врагова [18] даны приложения многомерных уравнений составного типа третьего порядка для исследования уравнений смешанного типа второго порядка.

Разнообразные краевые задачи для уравнений смешанно-составного типа на плоскости изучены в работах А.Н. Бицадзе [9], М.С. Салахитдинова [70], их учеников и последователей.

Дальнейшее развитие теории уравнений составного типа связано с именем академика А. Джураева. В его монографиях [22], [23] подытожены результаты его исследований, посвященных системам уравнений составного типа на плоскости и в пространстве.

Ряд многомерных систем уравнений составного типа и различные задачи для них изучены в трудах А. Джураева и Э. Мухамадиева [25], А. Янушаускаса [100], [101] и П. Берхина [8].

В работе [83] «осуществляется построение неклассических систем, обладающих двумя семействами вещественных характеристик.

Получена система

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial s}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

с характеристической формой

$$\chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -|\xi|^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2), \quad |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2.$$

и, следовательно, является в каждой точке пространства R^3 системой составного типа, обладающей двумя семействами вещественных характеристик, при этом ее характеристическими поверхностями является семейство двуполых конусов

$$\sqrt{x^2 + y^2} - z = \text{const}, \sqrt{x^2 + y^2} + z = \text{const}.$$

Общее решение системы (1.21) представляется в виде

$$s = \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad u = \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y},$$

где $\omega(x, y, z)$ – гармоническая функция, $\sigma(x, y, z)$ – решение волнового уравнения $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \sigma_{zz} = 0$.

Четырехмерным обобщением систмы (1.3) является система

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial s}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (1.22)$$

характеристическая форма которой имеет вид

$$\chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_0^2 + |\xi|^2)(\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2).$$

Дальнейшее построение неклассических систем, обобщающих систем (1.21) и (1.22), получено при помощи произвольного гиперболического уравнения второго порядка с тремя, четырьмя независимыми переменными соответственно» [83].

Далее, в [83] «рассматриваются начально-краевые задачи для системы (1.3) в цилиндрической области, в характеристическом конусе и в произвольной односвязной области, ограниченной при $z > 0$ поверхностью Ляпунова и куском плоскости $z = 0$.

Пусть G – ограниченная область на плоскости $z = 0$, Σ – ее граница. В цилиндре $\Omega = \{(x, y, z): (x, y) \in G, z > 0\}$ с границей $S = H \cup \Sigma$, где H – боковая

поверхность цилиндра, рассмотрим следующую начально-краевую (смешанную) задачу.

Задача C_I . Найти непрерывное в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + S$ решение системы (1.21), удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned} s|_{z=0} &= f(x, y), s|_H = 0, s(x, y, \infty) = 0, \\ v|_S &= g(x, y), \\ w|_{z=0} &= \varphi(x, y), w_z|_{z=0} = \psi(x, y), w|_H = 0, \end{aligned}$$

где f, g, φ, ψ – заданные достаточно гладкие функции, причем $f|_S = \varphi|_S = 0$.

Теорема 1.4. *Задача C_I при $f \in C^1_v(\bar{G}), g \in C^1(\bar{G}), \varphi \in C^4(\bar{G}), \psi \in C^3(\bar{G}) \cap C^1_v(\bar{G})$ в цилиндрической области Ω имеет решение, определяемое с точностью до произвольного постоянного слагаемого.*

Пусть теперь Ω – характеристический конус, основание которого G является ограниченной областью плоскости $z = 0$.

Задача C_{II} . Найти в Ω решение системы (1.21), удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} s|_{\partial\Omega} &= f_1(x, y), v|_S = g_1(x, y), \\ w|_{z=0} &= \varphi_1(x, y), w_z|_{z=0} = \psi_1(x, y), \end{aligned}$$

где заданные функции $f_1 \in C(\partial\Omega) \cap C^1_v(\bar{G}), g_1 \in C^1(\bar{G}), \psi_1 \in C^2(G) \cap C^1_v(G)$.

Доказана, что задача C_{II} также имеет решение, определяемое с точностью до произвольного постоянного слагаемого» [83].

В монографиях и статьях Дж. Сафарова [84] – [87], [113] – [119] представлены итоги научных исследований автора по неклассическим системам уравнений первого и второго порядков в пространстве (см. также работы [46], [47]).

Дубля З.Д. в ряде своих работ рассматривал системы составного типа. Например, в работе [30] для многомерного аналога уравнения А. В. Бицадзе [44]

$$\begin{aligned}
-\Delta u + 2 \frac{\partial}{\partial x} (u_x + v_y + w_z) &= 0, \\
-\Delta v + 2 \frac{\partial}{\partial y} (u_x + v_y + w_z) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z - w_y) &= 0, \\
-\Delta w + 2 \frac{\partial}{\partial z} (u_x + v_y + w_z) - \frac{\partial}{\partial z} (v_z - w_y) &= 0,
\end{aligned} \tag{1.23}$$

исследовал задачу типа Дирихле и в результате исследований установил условия разрешимости этой задачи.

В работе [29] исследованы трехмерные системы составного типа

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} + \frac{\partial p_3}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial p_1}{\partial y} - \frac{\partial p_2}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_3}{\partial x} = 0,
\end{aligned} \tag{1.24}$$

и

$$\begin{aligned}
\Delta p_1 &= 0, \\
\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p_2}{\partial y} + \frac{\partial p_3}{\partial z} \right) &= 0, \\
\frac{\partial^2 p_3}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p_2}{\partial y} + \frac{\partial p_3}{\partial z} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Для этих систем рассмотрены задачи Дирихле в полупространстве $\{x > 0\}$.

В работе [19] в области $D = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t < 1\}$ с границей Γ плоскости (x, t) рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned}
L_1(u_1, u_2) &= u_{1tt} - u_{1xx} + a_{11}u_{1t} + a_{12}u_{2t} + b_{11}u_{1x} + b_{12}u_{2x} + c_{11}u_1 \\
&\quad + c_{12}u_2 = f_1, \\
L_2(u_1, u_2) &= u_{2tt} - u_{2xx} + a_{21}u_{1t} + a_{22}u_{2t} + b_{21}u_{1x} + b_{22}u_{2x} + c_{21}u_1 \\
&\quad + c_{22}u_2 = f_2,
\end{aligned} \tag{1.26}$$

для которой исследована краевая задача:

найти решение системы (1.26), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_1|_{t=0} = u_{1_t}|_{t=0} = u_1|_{x=0} = u_1|_{x=1} = u_2|_{\Gamma} = 0. \quad (1.27)$$

Предполагается, что коэффициенты системы (1.26) a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} ($i, j = 1, 2$) – функции класса $C_1(\bar{D})$, причем $a_{11}b_{11} \in C^2(\bar{D})$, а функции $f_i \in L_2(D)$. Система (1.26) запишется в векторно-матричной форме

$$L\bar{u} = A_1\bar{u}_{tt} + A_2\bar{u}_{xx} + a\bar{u}_t - b\bar{u}_x + c\bar{u} = \bar{f},$$

где

$$\bar{u} = \{u_1; u_2\}, L\bar{u} = \{L_1(u_1, u_2); L_2(u_1, u_2)\}, \bar{f} = \{f_1, f_2\},$$

$$a = (a_{ij}), b = (b_{ij}), c = (c_{ij}) \quad (i, j = 1, 2),$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В пространстве вектор-функций $L_2(D)$ вводится скалярное произведение $(\bar{u}, \bar{v})_0 = \int_D (u_1 v_1 + u_2 v_2) dD$. Через $W_2^k(D)$ обозначено, как обычно, пространство Соболева с нормой $\|\cdot\|_k$. Установлена следующая

Лемма 1.1. Пусть функции $c_{11}(x, t), c_{22}(x, t)$ таковы, что

$$c_{11}(x, t) > 0, -c_{22}(x, t) > N_1 \quad ((x, t) \in D), \quad (1.28)$$

где константа $N_1 > 0$ достаточно велика и зависит только от коэффициентов системы (1.26). Тогда для любой вектор-функции $\bar{u} \in W_2^2(D)$, удовлетворяющей граничным условиям (1.27), имеет место неравенство

$$\|L\bar{u}\|_0 \geq \mu \|\bar{u}\|_1 \quad (\mu > 0). \quad (1.29)$$

Далее рассматривается сопряженная краевая задача:

найти решение системы уравнений

$$L^*\bar{v} = A_1\bar{v}_{tt} + A_2\bar{v}_{xx} + a^*\bar{v}_t - b^*\bar{v}_x + (c^* - a_t^* - b_x^*)\bar{v} = \bar{g}, \quad (1.30)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$v_1|_{t=1} = v_{1_t}|_{t=1} = v_1|_{x=0} = v_1|_{x=1} = v_2|_{\Gamma} = 0. \quad (1.31)$$

Верна следующая

Лемма 1.2. Пусть функции $c_{11}(x, t), c_{22}(x, t)$ таковы, что

$$c_{11}(x, t) > 0, -c_{22}(x, t) > N_2 \quad ((x, t) \in D), \quad (1.32)$$

где константа $N_2 > 0$ достаточно велика и зависит только от коэффициентов системы (1.30). Тогда для любой вектор-функции $\bar{v} \in W_2^2(D)$, удовлетворяющей граничным условиям (1.32), имеет место неравенство

$$\|L^*\bar{v}\|_0 \geq \nu \|\bar{v}\|_1 \quad (\nu > 0). \quad (1.33)$$

Доказательство лемм 1.1, 1.2 проводится методом (a, b, c) Фридрихса [6].

Установлены ниже приводимые теоремы о слабых обобщенных решениях задачи (1.26) – (1.28), т.е. о вектор-функциях $\bar{u} \in L_2(D)$, удовлетворяющих тождеству $(\bar{u}, L^*\bar{v})_0 = (\bar{f}, \bar{v})_0$ для любой вектор-функции $\bar{v} \in W_2^2(D)$ с граничными условиями (1.31).

Теорема 1.5. Пусть выполнены условия леммы 1.2. Тогда для любой вектор-функции $\bar{f} \in L_2(D)$ существует слабое обобщенное решение задачи (1.26) – (1.27).

Теорема 1.6. Если выполнены условия (1.28) леммы 1.1, то для любых функций $f_1 \in W_2^2(D), f_2 \in L_2(D)$ существует и притом единственное обобщенное решение задачи (1.26) – (1.27) из пространства $W_2^2(D)$.

§1.2. Обзор литературы по вырождающимся системам уравнений в частных производных

Вырождающиеся уравнения с частными производными встречаются в задачах газовой динамики, теории малых изгибаний поверхностей вращения, безмоментной теории оболочек и др. (см., например, [14], [28], [54], [122], [124]). Как отмечена в [31] «В теории дифференциальных уравнений в частных

производных, под вырождающимися обычно понимают те уравнения, которые меняют свой тип на некотором подмножестве замыкания области определения независимых переменных. В то же время, иногда уравнения, имеющие особенности на некоторых многообразиях рассматриваемой области, также называют вырождающимися. И в первом и во втором случае, характер вырождения может быть очень разнообразным, поэтому точной классификации вырождения не существует» [31].

«Пусть $x \in \Omega \subset R^n, t \in [0, T], \Delta$ – оператор Лапласа по $x, f(x, t), \beta(t)$ – известные функции, γ, δ – известные постоянные. Под λ_k понимается k – ое собственное число для оператора Лапласа при однородных условиях Дирихле.

Работа посвящена получению достаточных условий для существования и единственности регулярных решений $u(x, t)$ для уравнения

$$(\beta(t) - \Delta)D_t^{2p+1}u(x, t) + \gamma\Delta u(x, t) + \delta u(x, t) = f(x, t), \quad (1.34)$$

таких, что

$$\begin{aligned} \exists! t^* \in [0, T], \beta(t^*) = \lambda_1, \\ \forall t \in [0, T], \beta(t) > \lambda_2 \end{aligned} \quad (1.35)$$

и

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{x \in \partial\Omega} = 0, \\ D_t^r u(x, 0) = D_t^r u(x, T) = 0, r = 0, 1, \dots, p + 1. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Теорема 1.7. Пусть $\beta(t) \in C^1([0, T]), \beta'(t) > 0, (-1)^{p+1}(\gamma\lambda_1 + \delta) \geq 0, \left| \frac{f(x, t)}{(\beta(t) - \lambda_1)} \right| \in L_2(\Omega \times [0, T]),$ тогда для задачи (1.34)-(1.36) существует единственное решение $u(x, t) \in W_{2p+1}^2(\Omega \times [0, T]).$

Таким образом, найдены достаточные условия для существования и единственности решения $u(x, t)$ задачи (1.34)-(1.36) в пространстве Соболева $W_{2p+1}^2(\Omega \times [0, T])$ » [31].

В работе [94] изучена система второго порядка. «В области $D: \{x^2 + y^2 < R^2\}$ рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{aligned} -(x^2 + y^2)\Delta u + \lambda \frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y) &= 0, \\ -(x^2 + y^2)\Delta v + \lambda \frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y) &= 0, \end{aligned} \quad (1.37)$$

где $\lambda > 0$ – вещественный параметр. Продифференцируем первое уравнение системы (1.37) по x , а второе – по y :

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)\Delta u_x + 2x\Delta u &= \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_x + v_y), \\ (x^2 + y^2)\Delta v_y + 2y\Delta v &= \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_x + v_y) \end{aligned}$$

и сложив полученные соотношения

$$(x^2 + y^2 - \lambda)\Delta(u_x + v_y) + 2x\Delta u + 2y\Delta v = 0. \quad (1.38)$$

Введем обозначение

$$H = u_x + v_y. \quad (1.39)$$

Выразим $\Delta u, \Delta v$ из (1.21), тогда из (1.22), с учетом (1.23) получим

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - \lambda)\Delta H + 2\lambda(xH_x + yH_y) = 0. \quad (1.40)$$

Характеристический определитель системы (1.37) имеет вид

$$\det = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - \lambda)(\xi_1^2 + \xi_2^2).$$

Следовательно, система эллиптична везде, кроме точки $x = y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 = \lambda$, на которых происходит параболическое вырождение. Собственные числа характеристической матрицы имеют вид

$$\begin{aligned}\mu_1 &= (\lambda - (x^2 + y^2))(\xi_1^2 + \xi_2^2), \\ \mu_2 &= -(x^2 + y^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2).\end{aligned}$$

т.е. система (1.37) сильно эллиптична при $x^2 + y^2 > \lambda$ и слабо эллиптична при $0 < x^2 + y^2 < \lambda$.

Рассмотрим краевую задачу при $R^2 > \lambda$: найти регулярное ограниченное решение системы (1.37) в области D с границей $\Gamma: \{x^2 + y^2 = R^2\}$, удовлетворяющее условиям

$$u|_{\Gamma} = f(x, y), \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)|_{\Gamma} = g(x, y), \quad (1.41)$$

где $f(x, y) \in C^{2,\alpha}(\Gamma)$, $g(x, y) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$.

Теорема 1.8. *При $R^2 > \lambda$ задача (1.37), (1.41) всегда разрешима в классе ограниченных функций, причем u определяется единственным образом по формуле*

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\psi)(R^2 - \rho^2)}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \psi)} d\psi,$$

а v – с точностью до линейной функции $\alpha x + \beta$, где α, β – произвольные постоянные» [94].

Уравнения гиперболического типа с сингулярной поверхностью вида

$$\Delta_x u - u_{yy} - \frac{\mu}{y} u_y = 0, \quad (1.42)$$

$x = (x_1, \dots, x_n), y > 0, \mu \in R, \Delta_x$ – оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_n$ исследованы рядом авторов. Согласно работе [107, с. 244] решение задачи Коши

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = 0 \quad (1.43)$$

даётся формулой

$$u(x, y) = c \int_{\|\xi\| < 1} f(x + y\xi)(1 - \|\xi\|^2)^{\nu} d\xi, \quad \xi \in R^n, \quad (1.44)$$

где $\nu = \frac{1}{2}(\mu - n - 1)$, $c = \left(\int_{\|\xi\| < 1} (1 - \|\xi\|^2)^{\nu} d\xi \right)^{-1}$.

В [107] интеграл вычисляется по сфере $S^n = \{\xi \in R^n: \|\xi\| = 1\}$, а должно быть по шару $\{\xi: \|\xi\| < 1\}$. Доказательство не приведено, есть только ссылка на работу [124]. Отметим, что при $\mu < 0$ задача (1.42), (1.43) может иметь много решений (см., [5-A]).

В работе И.Н. Векуа [13] была получена обобщённая формула Пуассона в случае полуплоскости $y > 0$ для уравнения

$$y^{2k} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

где k - число, удовлетворяющее условию $k > -1$.

В работе [58] рассматриваются многомерные уравнения с частными производными вида

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + x_n^{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - k^2 u = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(x_n^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) - k^2 u = 0,$$

для которых в полупространстве $x_n > 0$ ($n \geq 3$) решаются в явном виде первая и вторая краевые задачи при $\alpha < 1$.

Огромное количество работ Н. Раджабова и его учеников посвящены уравнениям и системам уравнений с частными производными с сингулярными коэффициентами (см., например, [60], [62], [63], [64]). В них получены представления решений и формулы обращения, исследованы разнообразные краевые задачи, изучены поведение решения в окрестности сингулярных точек и др.

В работах С.А. Искокова и его учеников изучены вырождающиеся уравнения с частными производными и дифференциальные операторы в разных аспектах (см., например, [33]).

В работах А. Сатторова и его учеников [72] – [75] получены интегральные представления и решения задач Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений вида Гельмгольца на плоскости и в пространстве.

Отметим также работы [38], [52], [66] – [69], [87], [96], [97], [102] – [104], в которых рассмотрены представление решений уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу через аналитические функции, уравнения Лаврентьева-Бицадзе, Коши-Римана, сингулярные интегральные уравнения, тесно связанные с дифференциальными уравнениями, некоторые обобщения систем уравнений второго и четвертого порядка составного типа, обобщенная эллиптическая система с сингулярностью на границе и получены представление решений систем составного типа степенными рядами. Работы Рахимовой М.А. [65] и Изатуллоева Д. [32] посвящены переопределенным системам двух и трех уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами.

В научных трудах Ошорова Б.Б. и Ошорова Бато Б. (см., например, [54], [55]) установлены условия разрешимости краевых задач для некоторых неклассических систем у.ч.п. и трёхмерных аналогов систем Коши–Римана и Бицадзе.

В работе [28] рассматриваются системы у.ч.п. второго порядка смешанного типа $G(y)v_{xx} - v_{yy} + Av_x + Bv_y + Cu = h$. Для таких систем при некоторых условиях на коэффициенты в областях специального вида ставится краевая задача, доказываются существование и единственность решения, имеющего в области первые производные, интегрируемые с квадратом, и удовлетворяющего граничным условиям в среднем.

В работе [57] в области $G = D \times (0, T)$, $\Gamma = \partial D \times (0, T)$, $T > 0$, D — ограниченная область в R^n , $n \geq 1$, с границей ∂D и $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, рассматривается уравнение

$$Lu = P_{2s}(t, x)u - (-1)^m M_{2m}(x)u + c(t, x)u = f(t, x), \quad (1.45)$$

где

$$P_{2s}(t, x)u = \sum_{i=1}^{2s} k_i(t, x)D_t^i u, \quad M_{2m} = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D_x^\alpha [a^{\alpha\beta}(x)D_x^\beta u], \quad D_t^i u = \partial^i u / \partial t^i,$$

$D_x^\alpha u = \partial^{|\alpha|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha_i \geq 0$, $m \geq 1$, $s \geq 1$ — целые числа и коэффициенты $k_i(t, x)$, $c(t, x)$, $a^{\beta\alpha}(x) = a^{\alpha\beta}(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции в $\bar{G}$. Предполагается, что поверхность Γ гладкая.

Рассмотрена следующая нелокальная краевая задача:

найти решение уравнения (1.45) в G , удовлетворяющее граничным условиям

$$D_x^\alpha u|_\Gamma = 0 \text{ для } |\alpha| \leq m-1, \quad (1.46)$$

$$D_t^i u(T, x) = \lambda D_t^i u(0, x), \quad i = \overline{0, 2s-2}, \quad (1.47)$$

где $\lambda = \text{const} \neq 0$, $|\lambda| < 1$.

Установлена следующая

Теорема 1.9. При выше указанных условиях для любой функции $f \in L_2(G)$ существует обобщенное решение задачи (1.45) — (1.47).

В работе В. Ф. Волкодавова, И. Н. Родионова, С. В. Бушкова [17] в области G , ограниченной плоскостями $z = x - y$, $x = h$, $y = 0$, $z = 0$ для уравнения

$$L(u) = u_{xyz} - (\gamma/(z + y - x))u_{xy} = 0, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (1.48)$$

рассмотрена следующая краевая задача.

Задача С. В области G найти решение уравнения (1.48), непрерывное в $\bar{G}$ и удовлетворяющее условиям:

$$u(x, y, z)|_{z=x-y-0} = \tau(x, y), \quad y \leq x \leq h, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} u_y|_{z=x-y-0} &= \omega(x, y), & (x-y-z)^{-\gamma} u_{xy}|_{z=x-y-0} &= v(x, y), \\ y < x < h, 0 < y < h, \end{aligned} \quad (1.50)$$

Предполагается, что заданные функции удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \tau(x, y) \in C(\bar{N}), \tau_{xy}(x, y) \in C(N), \omega(x, y) \in C(\bar{N}), \omega_x(x, y), \omega_y \in C(N), \\ v(x, y) \in C(N) \cap L(\bar{N}), v_{xy}(x, y) \in C(N), \end{aligned} \quad (1.51)$$

где $N = \{(x, y): 0 < x < h, 0 < y < x\}$.

Непосредственным вычислением доказано, что функция

$$u(x, y, z) = \tau(x, x-z) - \int_y^{x-z} \omega(z+t, t) dt - \int_y^{x-z} dt \int_{z+t}^x v(s, t)(s-t-z)^\gamma ds$$

является решением задачи С при выполнении условий (1.51).

В работах С. Байзаева и его учеников (см., например, [2] – [5]) исследованы эллиптические системы во всей плоскости, которых путем замены независимых переменных можно привести к сингулярным (вырождающимся) системам уравнений в ограниченной области.

Из анализа литературы по теме диссертации, изложенные в параграфах 1.1 и 1.2, видно, что научных работ, посвященных многомерным (трёх-, четырёхмерный) вырождающимся системам уравнений в частных производных неклассического типа существенно меньше, чем в двумерном случае. Объясняется это тем, что в многомерном случае нет общих методов, не работает аппарат теории функций комплексной переменной, отсутствует полная теория многомерных сингулярных интегральных уравнений по областям с краями. Поэтому исследование неклассических систем уравнений с частными производными в многомерных областях представляется очень важным и актуальным.

ГЛАВА 2

Трёхмерные вырождающиеся неклассические системы уравнений первого порядка

В этой главе основное место занимает исследование граничных задач для трёхмерных вырождающихся неклассических (составных) систем дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, обобщающих трёхмерную модельную систему рассмотренную в [79], [84]. В неограниченных областях типа полупространства исследуются начально-краевые и видоизменённые начально-краевые задачи, а в ограниченных областях исследуются смешанные и граничные задачи типа задачи Римана-Гильберта. Результаты этой главы опубликованы в работах [1-А, 2-А, 3-А, 4-А, 7-А, 8-А, 9-А, 10-А, 16-А, 17-А].

§2.1. Вспомогательные сведения и некоторые задачи

В данном параграфе приведены необходимые сведения и известные факты, используемые в дальнейшем, а также ряд задач для вырождающихся гиперболических и эллиптических уравнений.

2.1.1. Неоднородная система Коши–Римана. Рассмотрим неоднородную систему уравнений Коши–Римана [14, с. 27]

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = g(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = h(x, y),$$

где $g(x, y)$ и $h(x, y)$ - заданные вещественные функции вещественных переменных $(x, y) \in G$, G – ограниченная область. Эту систему можно записать в комплексной форме:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = f, \quad f = \frac{g + ih}{2}, \quad w = u + iv, \quad (2.1)$$

где

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Решение системы (2.1) представляется по формуле

$$w(z) = \Phi(z) + T_G f, \quad (2.2)$$

где $\Phi(z)$ - голоморфная в G функция,

$$T_G f \equiv -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\zeta) d\xi d\eta}{\zeta - z}. \quad (2.3)$$

Если G – неограниченная, в частности $G = \mathbb{C}$, то интеграл (2.3) существует при $f \in L_{2,q}(\mathbb{C})$ причем $T_G(f)$ на бесконечности убывает как $|z|^{(2-q)/q}$ (см. [14, с. 45]).

Рассмотрим частный случай задачи Римана-Гильберта – задачу Дирихле для неоднородной системы Коши–Римана (2.1)

$$Re w^+(t) = \gamma(t), \quad t \in \Gamma.$$

В силу представления (2.3), имеем

$$Re \Phi^+(t) = \gamma(t) - Re T_G f = \gamma_1(t), \quad t \in \Gamma. \quad (2.4)$$

Если область G односвязна, то не умаляя общности, можно считать её единичным кругом: $|z| < 1$, ибо задача конформно-инварианта. Тогда общее решение задачи (2.4) можно записать с точностью до мнимого постоянного слагаемого в виде интеграла Шварца (см. [23, с. 50]):

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \gamma_1(t) \frac{t+z}{t-z} \cdot \frac{dt}{t} + iC. \quad (2.5)$$

Но при $|t| = 1$

$$Re T_G f = -\frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta) d\xi d\eta}{\zeta - t} + \frac{t}{2\pi} \iint_{|\zeta|<1} \frac{\bar{f}(\zeta) d\xi d\eta}{1 - \bar{\zeta}t}.$$

Первое слагаемое правой части этого равенства представляет собой граничное значение голоморфной вне круга $|z| < 1$ функции, исчезающей на бесконечности, а второе слагаемое есть граничное значение голоморфной в круге $|z| < 1$ функции

$$\frac{z}{\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{\bar{f}(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}z} d\xi d\eta$$

Поэтому по теореме и формуле Коши из (2.5) получаем

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \gamma(t) \frac{t+z}{t-z} \cdot \frac{dt}{t} - \frac{z}{\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{f(\zeta) d\xi d\eta}{1 - \bar{\zeta}z} + iC$$

Подставляя это выражение в (2.4), получаем решение рассматриваемой задачи для круга $|z| < 1$ в виде

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \gamma(t) \frac{t+z}{t-z} \cdot \frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z\bar{f}(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}z} \right] d\xi d\eta + iC.$$

2.1.2. Уравнения гиперболического типа с сингулярной поверхностью.

Рассмотрим уравнение вида

$$\Delta_x u - u_{yy} - \frac{\mu}{y} u_y = 0, \quad (2.6)$$

$x = (x_1, \dots, x_n), y > 0, \mu \in R, \Delta_x$ – оператор Лаплас по переменным $x_1, \dots, x_n$. Согласно работе [107, с. 244] решение задачи Коши

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = 0 \quad (2.7)$$

даётся формулой

$$u(x, y) = c \int_{\|\xi\| < 1} f(x + y\xi) (1 - \|\xi\|^2)^\nu d\xi, \quad \xi \in R^n, \quad (2.8)$$

где $\nu = \frac{1}{2}(\mu - n - 1)$, $c = \left(\int_{\|\xi\| < 1} (1 - \|\xi\|^2)^\nu d\xi \right)^{-1}$.

В [107] интеграл вычисляется по сфере $S^n = \{\xi \in R^n: \|\xi\| = 1\}$, а должно быть по шару $\{\xi: \|\xi\| < 1\}$. Доказательство не приведено, есть только ссылка на работу [124]. Отметим, что при $\mu < 0$ задача (2.6), (2.7) может иметь много решений (см., [7-A]).

Приведём доказательство в случае $\mu > 1$ (тогда $-2\nu < n$ и несобственный интеграл (2.8) сходится). Для простоты возьмём $n = 2$. Пусть $f \in C^2(R^2)$. В начале покажем, что функция $u(x, y)$ определённая формулой (2.8), где $\nu = \frac{1}{2}(\mu - 3)$ удовлетворяет уравнению (2.6). Имеем

$$\begin{aligned}\Delta_x u &= c \iint_{\|\xi\| < 1} [f_{x_1 x_1}(x + y\xi) + f_{x_2 x_2}(x + y\xi)] (1 - \|\xi\|^2)^\nu d\xi_1 d\xi_2, \xi = (\xi_1, \xi_2), \\ u_y &= c \iint_{\|\xi\| < 1} [\xi_1 f_{x_1}(x + y\xi) + \xi_2 f_{x_2}(x + y\xi)] (1 - \|\xi\|^2)^\nu d\xi_1 d\xi_2, \\ u_{yy} &= c \iint_{\|\xi\| < 1} [\xi_1^2 f_{x_1 x_1}(x + y\xi) + 2\xi_1 \xi_2 f_{x_1 x_2}(x + y\xi) + \xi_2^2 f_{x_2 x_2}(x + y\xi)] \cdot \\ &\quad \cdot (1 - \|\xi\|^2)^\nu d\xi_1 d\xi_2.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\Delta_x u - u_{yy} &= c \iint_{\|\xi\| < 1} [(1 - \xi_1^2) f_{x_1 x_1}(x + y\xi) + 2\xi_1 \xi_2 f_{x_1 x_2}(x + y\xi) + \\ &\quad + (1 - \xi_2^2) f_{x_2 x_2}(x + y\xi)] (1 - \|\xi\|^2)^\nu d\xi_1 d\xi_2.\end{aligned}$$

Так как

$$f_{\xi_i}(x + y\xi) = f_{x_i}(x + y\xi)y,$$

то

$$f_{x_i}(x + y\xi) = \frac{1}{y} f_{\xi_i}(x + y\xi).$$

Аналогично

$$f_{x_i x_j}(x + y\xi) = \frac{1}{y^2} f_{\xi_i \xi_j}(x + y\xi).$$

Следовательно,

$$u_y = \frac{c}{y} \iint_{\|\xi\| < 1} [\xi_1 f_{\xi_1}(x + y\xi) + \xi_2 f_{\xi_2}(x + y\xi)] (1 - \|\xi\|^2)^\nu d\xi_1 d\xi_2, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \Delta_x u - u_{yy} = & \\ = \frac{c}{y^2} \{ & \iint_{\|\xi\| < 1} [(1 - \xi_1^2) f_{\xi_1 \xi_1}(x + y\xi) - \xi_1 \xi_2 f_{\xi_1 \xi_2}(x + y\xi)] (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^\nu d\xi_1 d\xi_2 + \\ & + \iint_{\|\xi\| < 1} [-\xi_1 \xi_2 f_{\xi_1 \xi_2}(x + y\xi) + (1 - \xi_2^2) f_{\xi_2 \xi_2}(x + y\xi)] (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^\nu d\xi_1 d\xi_2 \}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям (см. [53, с. 125]):

$$\iint_G f_{x_i} g dx_1 dx_2 = \int_\Gamma f g \cos(n, x_i) - \iint_G f g_{x_i} dx_1 dx_2.$$

Пусть $\mu > 3$, т.е. $\nu > 0$. Так как на границе круга $\{\xi: \|\xi\| < 1\}$ функция $g(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^\nu$ тождественно равно нулю, то при интегрировании по частям контурные интегралы исчезнут и поэтому

$$\begin{aligned} & \iint_{\|\xi\| < 1} [(1 - \xi_1^2) f_{\xi_1 \xi_1}(x + y\xi) - \xi_1 \xi_2 f_{\xi_1 \xi_2}(x + y\xi)] (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^\nu d\xi_1 d\xi_2 = \\ & = - \iint_{\|\xi\| < 1} \left\{ f_{\xi_1}(x + y\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_1} [(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^\nu] - \right. \\ & \quad \left. - f_{\xi_2}(x + y\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_1} [\xi_1 \xi_2 (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^\nu] \right\} d\xi_1 d\xi_2 = \\ & = \iint_{\|\xi\| < 1} \{ 2f_{\xi_1}(x + y\xi) \xi_1 [(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^\nu + \nu(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^{\nu-1}] + \\ & \quad + f_{\xi_2}(x + y\xi) \xi_2 [(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^\nu + 2\nu \xi_1^2 (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^{\nu-1}] \} d\xi_1 d\xi_2, \\ & \iint_{\|\xi\| < 1} [-\xi_1 \xi_2 f_{\xi_1 \xi_2}(x + y\xi) + (1 - \xi_2^2) f_{\xi_2 \xi_2}(x + y\xi)] (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^\nu d\xi_1 d\xi_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \iint_{\|\xi\|<1} \left\{ -f_{\xi_1}(x+y\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_2} [\xi_1 \xi_2 (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^\nu] + f_{\xi_2}(x \right. \\
&\quad \left. + y\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_2} [(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^\nu] \right\} d\xi_1 d\xi_2 = \\
&= \iint_{\|\xi\|<1} \{ f_{\xi_1}(x+y\xi) \xi_1 [(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^\nu - 2\nu \xi_2^2 (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^{\nu-1}] + \\
&\quad + 2f_{\xi_2}(x+y\xi) \xi_2 [(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^\nu + \nu(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^{\nu-1}] \} d\xi_1 d\xi_2,
\end{aligned}$$

Подставляя в (2.10) будем иметь

$$\begin{aligned}
\Delta_x u - u_{yy} &= \\
&= \frac{c}{y^2} \iint_{\|\xi\|<1} \{ f_{\xi_1}(x+y\xi) (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^{\nu-1} [3\xi_1(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2) + 2\nu \xi_1(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)] + \\
&\quad + f_{\xi_2}(x+y\xi) (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^{\nu-1} [3\xi_2(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2) + 2\nu \xi_2(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)] \} d\xi_1 d\xi_2 = \\
&= \frac{c}{y^2} \iint_{\|\xi\|<1} [f_{\xi_1}(x+y\xi) (3\xi_1 + 2\nu \xi_1) + \\
&\quad + f_{\xi_2}(x+y\xi) (3\xi_2 + 2\nu \xi_2)] (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^\nu d\xi_1 d\xi_2 = \\
&= \frac{(2\nu + 3)c}{y^2} \iint_{\|\xi\|<1} [\xi_1 f_{\xi_1}(x+y\xi) + \xi_2 f_{\xi_2}(x+y\xi)] (1 - \|\xi\|^2)^\nu d\xi_1 d\xi_2,
\end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned}
\Delta_x u - u_{yy} &= \\
&= \frac{(2\nu + 3)c}{y^2} \iint_{\|\xi\|<1} [\xi_1 f_{\xi_1}(x+y\xi) + \xi_2 f_{\xi_2}(x+y\xi)] (1 - \|\xi\|^2)^\nu d\xi_1 d\xi_2. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Учитывая формулы (2.9), (2.11) и равенство $2\nu + 3 = \mu$ получим, что функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2.6).

Теперь покажем, что функция $u(x, y)$ удовлетворяет начальным условиям (2.7). Имеем

$$u(x, 0) = c \int_{\|\xi\|<1} f(x) (1 - \|\xi\|^2)^\nu d\xi = f(x),$$

т.е. первое условие из (2.7) выполняется. Далее,

$$u_y(x, 0) = c \iint_{\|\xi\| < 1} [\xi_1 f_{x_1}(x) + \xi_2 f_{x_2}(x)] (1 - \|\xi\|^2)^\nu d\xi_1 d\xi_2.$$

В интеграле

$$I = \iint_{\|\xi\| < 1} \xi_1 (1 - \|\xi\|^2)^\nu d\xi_1 d\xi_2$$

переходим в полярные координаты: $\xi_1 = r \cos \varphi$, $\xi_2 = r \sin \varphi$.

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \cos \varphi (1 - r^2)^\nu r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^1 r^2 (1 - r^2)^\nu dr = 0.$$

Аналогично

$$\iint_{\|\xi\| < 1} \xi_2 (1 - \|\xi\|^2)^\nu d\xi_1 d\xi_2 = 0.$$

Следовательно, $u_y(x, 0) = 0$.

Ниже приведем результаты наших исследований, опубликованные в работе [7-A].

«Рассмотрим для случая $n = 2$ общую задачу Коши. В полупространстве $\Pi_+ = \{(x, y, z): z > 0\}$ рассмотрим уравнение следующего вида

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{zz} - \frac{\mu}{z} u_z = g(x, y, z), \quad (2.12)$$

где μ — постоянная, $g(x, y, z)$ — заданная в Π_+ функция.

Задача Коши. Найти решения $u(x, y, z)$ уравнения (2.12) из класса $C^2(\Pi_+) \cap C^1(\overline{\Pi}_+)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{z=0} = \varphi(x, y), \quad u_z|_{z=0} = \psi(x, y), \quad (2.13)$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ заданные на плоскости $z = 0$ функции.

Теорема 2.1 (теорема единственности). Пусть $\mu > 0$. Тогда задача Коши имеет не более одного решения» [7-А].

Доказательство. «Пусть функция $u \in C^2(\Pi_+) \cap C^1(\bar{\Pi}_+)$ является решением однородной задачи Коши. Обе части равенства

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{zz} - \frac{\mu}{z} u_z = 0$$

умножим на функцию u_z и проинтегрируем по характеристическому конусу $K = \{(x, y, z): x^2 + y^2 - z^2 < R^2, z > 0\}$:

$$\iiint_K u_z \left(u_{xx} + u_{yy} - u_{zz} - \frac{\mu}{z} u_z \right) dx dy dz = 0. \quad (2.14)$$

Имеем следующие соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(u_x^2) &= 2u_x u_{xz}, \quad \frac{\partial}{\partial z}(u_y^2) = 2u_y u_{yz}, \quad \frac{\partial}{\partial z}(u_z^2) = 2u_z u_{zz}, \\ (u_z u_x)_x &= u_{zx} u_x + u_z u_{xx}, \quad (u_z u_y)_y = u_{zy} u_y + u_z u_{yy}. \end{aligned}$$

Складывая последние два равенства и учитывая первые три, получим

$$(u_z u_x)_x + (u_z u_y)_y = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} [(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + u_z (u_{xx} + u_{yy})].$$

Отсюда и из (2.14) будем иметь

$$\iiint_K \left\{ (u_z u_x)_x + (u_z u_y)_y - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) - \frac{\mu}{z} u_z^2 \right\} dx dy dz = 0.$$

Используя формулу Остроградского получим

$$\iint_S \left[u_z u_x \cos(n, x) + u_z u_y \cos(n, y) - \frac{1}{2} |\text{grad } u|^2 \cos(n, z) \right] dS =$$

$$= \mu \iiint_K \frac{u_z^2}{z} dx dy dz, \quad (2.15)$$

Так как на основании конуса согласно начальным условиям $u = u_x = u_y = u_z = 0$, а на боковой поверхности H имеет место равенство $\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y) = \cos^2(n, z)$, то легко заметить, что соотношение (2.15) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & - \iint_K \left\{ [u_x \cos(n, z) - u_z \cos(n, x)]^2 + [u_y \cos(n, z) - u_z \cos(n, y)]^2 \right\} \frac{ds}{\cos(n, z)} = \\ & = 2\mu \iiint_K \frac{u_z^2}{z} dx dy dz. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\cos(n, z) > 0, \mu > 0, z > 0$ имеем

$$u_z \equiv 0 \text{ в } K, \quad u_x \cos(n, z) \equiv u_z \cos(n, x), \quad u_y \cos(n, z) \equiv u_z \cos(n, y) \text{ на } H$$

и далее в силу того что $u \in C^1(\bar{\Pi}_+)$, получим $u_x \equiv u_y \equiv u_z \equiv 0$ в замкнутом конусе $\bar{K}$. Следовательно, $u(x, y, z) \equiv \text{const}$ и учётом начальных условий и произвольности R получим: $u(x, y, z) \equiv 0$ в Π_+ . Теорема единственности доказана.

Пусть в уравнении (2.12) $\mu < 0$. Следующий пример показывает, что в этом случае задача Коши некорректна. Непосредственной проверкой легко убедиться, что функции $u = u_0(x, y)z^{1-\mu}$, u_0 – гармоническая и $u = z^{1-\mu} \left(v_0(x, y) + \frac{1}{c} \Delta v_0(x, y) z^2 \right)$, v_0 – бигармоническая, $c = 6 - 2\mu$, являются решениями однородной задачи, соответствующей задаче Коши» [7-А].

2.1.3. Уравнения эллиптического типа с сингулярными поверхностями. Аналог формулы Пуассона. В настоящем пункте выводятся формулы, дающие решение задачи типа Дирихле в полупространстве $y > 0$ для уравнения следующего вида

$$L_{\mu}^n u \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\mu}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \mu = \text{const}, \quad (2.16)$$

когда граничные условия заданы на гиперплоскости $y = 0$.

Рассмотрим функцию

$$E_{\mu,n}(x, y, \xi) = \left[\sum_{j=1}^n (x_j - \xi_j)^2 + y^2 \right]^{\frac{1-n-\mu}{2}}, \quad n \geq 1, \quad \mu > 0,$$

где x и ξ точки n -мерного евклидова пространства $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Нетрудно видеть, что функция $E_{\mu,n}(x, y, \xi)$ для фиксированного ξ удовлетворяет уравнению (2.16) при $x \neq \xi$ и $y \neq 0$. При $x = \xi, y \rightarrow 0$ и $E_{\mu,n}(x, y, \xi)$ имеет порядок $O(r^{1-n-\mu}), r^2 = |x - \xi|^2 + y^2$.

Если $u(x, y)$ решение уравнения (2.16) при $\mu < 0$, тогда функция $V(x, y)$, определяемая из равенства $u(x, y) = y^{1-\mu} V(x, y)$ будет решением уравнения $L_{2-\mu}^n V = 0$. Откуда следует, что функция $E_{\mu,n}^1(x, y, \xi) = y^{1-\mu} E_{2-\mu,n}$ для фиксированного ξ удовлетворяет уравнению $L_{\mu}^n u = 0$ ($\mu < 0$) и при $x = \xi, y \rightarrow 0$ имеет порядок $o(r^{-n-1})$.

«Задача D_1 . Найти в полупространстве $y > 0$ решение уравнения $L_{\mu}^n u = 0$, $n \geq 2$, $\mu < 1$, имеющее непрерывные первые и вторые производные, непрерывное в замкнутой области $\overline{R}_{n+1}^+$ (через R_{n+1}^+ - обозначено полупространство $y > 0$) и удовлетворяющее на гиперплоскости $y = 0$ условию

$$u(x, y)|_{y=0} = f_1(x),$$

где $f_1(x)$ - заданная непрерывная и ограниченная функция точек гиперплоскости $y = 0$ » [61].

Задача D_2 . Найти в полупространстве $y > 0$ решение уравнения $L_{\mu}^n u = 0$, $n \geq 2$, $\mu > 1$, имеющее непрерывные первые и вторые производные, для

которых функция $y^{\mu-1}u(x, y)$ является непрерывной и ограниченной в замкнутой области $\bar{R}_{n+1}^+$ и удовлетворяющее на гиперплоскости $y = 0$ условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{\mu-1}u(x, y) = f_2(x),$$

где $f_2(x)$ - заданная непрерывная и ограниченная функция точек гиперплоскости $y = 0$.

Рассмотрим интеграл [61, с. 57]

$$u(x, y) = \frac{1}{\Lambda_{2-\mu}} \int_{R^n} y^{1-\mu} E_{2-\mu, n}(x, y, \xi) f_1(\xi) d\xi, \quad (2.17)$$

где

$$\Lambda_{2-\mu} = \int_{R^n} [|t|^2 + 1]^{-\frac{n+1-\mu}{2}} dt, \quad t = (t_1, \dots, t_n), \quad (2.18)$$

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $f_1(x)$ - непрерывная ограниченная функция.

Легко установить, что данный интеграл сходится абсолютно и равномерно и представляет собой решение уравнения $L_\mu^n u = 0$ при $\mu < 1$ в полупространстве $y > 0$. Далее покажем, что функция $u(x, y)$ является ограниченной и стремится к $f_1(x)$ при $y \rightarrow 0$, если функция f непрерывна в точке x .

Совершая подстановку $\xi_j = x_j + yt_j$, формулу (2.17) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (\Lambda_{2-\mu})^{-1} \int_{R^n} \left[\sum_{j=1}^n t_j^2 + 1 \right]^{-\frac{n+1-\mu}{2}} f_1(x_1 + yt_1, \dots, x_n + yt_n) dt \equiv \\ &\equiv (\Lambda_{2-\mu})^{-1} \int_{R^n} [|t|^2 + 1]^{-\frac{n+1-\mu}{2}} f_1(x + yt) dt. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Если учесть равенство (2.18), то из (2.19) сразу получим, что $|u(x, y)| \leq M = \sup |f_1(x)|$, т.е. $u(x, y)$ ограничена в полупространстве $y > 0$. Далее из (2.19) в силу (2.18) получим

$$u(x, y) - f_1(x) = (\Lambda_{2-\mu})^{-1} \int_{R^n} [f_1(x + yt) - f_1(x)] (|t|^2 + 1)^{-\frac{n+1-\mu}{2}} dt.$$

Откуда

$$\begin{aligned} |u(x, y) - f_1(x)| &\leq \\ &\leq (\Lambda_{2-\mu})^{-1} \int_{R^n} |f_1(x + yt) - f_1(x)| (|t|^2 + 1)^{-\frac{n+1-\mu}{2}} dt. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Через S_ρ обозначим гиперсферу с центром в начале координат и радиусом ρ в пространстве R^n .

В силу ограниченности функции $f_1(x)$ при любых x, y, t имеем:

$$|f_1(x + yt) - f_1(x)| \leq 2M.$$

Пусть ε - произвольное положительное число. Тогда существует такое ρ_ε , которое зависит от ε , но не от x, y, t , что

$$(\Lambda_{2-\mu})^{-1} \int_{R^n - S_{\rho_\varepsilon}} |f_1(x + yt) - f_1(x)| (|t|^2 + 1)^{-\frac{n+1-\mu}{2}} dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу непрерывности $f(x)$, при y достаточно близких к нулю и при $|t|^2 = \sum_{j=1}^n t_j^2 \leq \rho_\varepsilon$, имеем $|f_1(x + yt) - f_2(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. При этом из неравенства (2.20) будет следовать

$$\begin{aligned} |u(x, y) - f_1(x)| &< \frac{\varepsilon}{2} + (\Lambda_{2-\mu})^{-1} \int_{S_{\rho_\varepsilon}} |f_1(x + yt) - f_1(x)| (|t|^2 + 1)^{-\frac{n+1-\mu}{2}} dt < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} (\Lambda_{2-\mu})^{-1} \int_{S_{\rho_\varepsilon}} (|t|^2 + 1)^{-\frac{n+1-\mu}{2}} dt \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности ε , имеем $u(x, 0) = f_1(x)$. Таким образом формула (2.17) даёт решение задачи D_1 .

Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.2. Пусть функция $f_1(x)$ определена, непрерывна и ограничена для всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$. Тогда задача D_1 в полупространстве $y > 0$ имеет решение, которое даётся при помощи формулы (2.17).

Рассмотрим интеграл следующего вида

$$u(x, y) = \frac{1}{\Lambda_\mu} \int_{R^n} E_{\mu,n}(x, y, \xi) f_2(\xi) d\xi. \quad (2.21)$$

После подстановки $\xi_j = x_j + yt_j$ формулу (2.21) преобразуем к виду

$$u(x, y) = \frac{y^{1-\mu}}{\Lambda_\mu} \int_{R^n} [|t|^2 + 1]^{-\frac{n+\mu-1}{2}} f_2(x + yt) dt.$$

Функция $u(x, y)$, определяемая из формулы (2.21), удовлетворяет уравнению $L_\mu^n u = 0$, ($\mu > 0$). Когда $f_2(x)$ непрерывна и ограничена для всех $x \in R^n$, то аналогично как выше можно показать, что $u(x, 0) = f_2(x)$. Следовательно, формула (2.21) даёт решение задачи D_2 .

Теорема 2.3. Если $f_2(x)$ — непрерывная и ограниченная функция на гиперплоскости $y = 0$, то задача D_2 имеет решение, задаваемое формулой (2.21).

Замечание 2.1 - При $\mu = 0$ формулы (2.17) и (2.21) сводятся к интегралу Пуассона — решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве $y > 0$.

Теперь изложим наши результаты, опубликованные в работе [7-А].

«Рассмотрим уравнение гидродинамической осесимметрической теории потенциала (GASPT):

$$Mu \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{\mu}{z} u_z = f(x, y, z), \quad (2.22)$$

в полупространстве $\Pi_+ = \{(x, y, z): (x, y) \in R^2, z > 0\}$, где μ — постоянная.

Задача 2.1. Найти решение уравнения (2.22) из класса $C^2(\Pi_+) \cap C(\bar{\Pi}_+)$, удовлетворяющее условиям

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), (x, y) \in R^2,$$

$$\lim_{x^2+y^2+z^2 \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0.$$

Функция $\varphi(x, y) \in C(R^2)$ должна удовлетворять условию $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \varphi(x, y) = 0$.

Теорема 2.4. *Задача 2.1 не может иметь более одного решения» [7-А].*

Доказательство приведено в Приложении указанной работы. «Пусть $u \in C^2(\Pi_+) \cap C(\bar{\Pi}_+)$ решение соответствующей однородной задачи, т.е.

$$Mu \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{\mu}{z} u_z = 0 \text{ в } \Pi_+ \quad (2.23)$$

$$u(x, y, 0) = 0, (x, y) \in R^2, \quad (2.24)$$

$$\lim_{x^2+y^2+z^2 \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0. \quad (2.25)$$

Из включения $u \in C(\bar{\Pi}_+)$ и условий (2.24), (2.25) следует, что функция $u(x, y, z)$ является ограниченной в $\bar{\Pi}_+$. Пусть $m = \sup_{\bar{\Pi}_+} u(x, y, z)$ и ε - произвольное

положительное число. Можно считать, что $m > 0$, в противном случае нужно рассмотреть функцию $-u(x, y, z)$. Согласно условиям (2.24), (2.25) найдется число $R = R(\varepsilon)$, что

$$|u(x, y, z)| < \varepsilon \text{ при } x^2 + y^2 + z^2 > R.$$

Для решений уравнения (2.23) в области $G_\delta = \{(x, y, z) \in \Pi_+ : x^2 + y^2 + z^2 < \frac{1}{\delta}, z > \delta\}$, δ – достаточно малое положительное число, справедлив принцип максимума (см. [7, с. 159]), т.е. решение отличное от постоянной не может достигать своего наибольшего значения внутри области G_δ . Отсюда и по определению супремума найдется такая последовательность точек $(x_n, y_n, z_n) \in \Pi_+$ и номер N , что

$$u(x_n, y_n, z_n) \rightarrow m \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

$$x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

$$u(x_n, y_n, z_n) > \frac{m}{2} \text{ при } n > N.$$

Теперь выявив номер $n > N$, так чтобы $x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 > R$, получим

$$\frac{m}{2} < u(x_n, y_n, z_n) < \varepsilon.$$

Мы пришли к противоречию, так как $\varepsilon > 0$ было произвольным.

Следовательно $u(x, y, z) \equiv 0$ в Π_+ . Теорема доказана» [7-А].

§2.2. Общее решение неклассических систем четырех уравнений первого порядка с тремя независимыми переменными

2.2.1. Здесь приводятся результаты, опубликованные в нашей работе [1-А].

Рассмотрим систему у.ч.п. первого порядка вида

$$\begin{aligned} u_x + v_y - w_z &= 0, & s_x - v_z + w_y &= 0, \\ s_y + u_z - w_x &= 0, & s_z - u_y + v_x &= 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

символ этой системы имеет вид

$$\chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -|\xi|^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2), \quad |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2.$$

Следовательно, эта система во всем пространстве R^3 является системой неклассического (составного) типа, имеющей двумя семействами вещественных характеристик.

Можно показать, что компонента $s(x, y, z)$ решения системы (2.26) является гармонической, а компонента $w(x, y, z)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\square w \equiv w_{xx} + w_{yy} - w_{zz} = 0.$$

В работах Сафарова Д.Х. установлено, что соотношения

$$s = \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad u = \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \quad (2.27)$$

выражают решения системы (2.26) через гармоническую функцию ω и решение σ волнового уравнения.

В работе [1-А] изучена более общая ситуация. Рассмотрим более общее гиперболическое уравнение второго порядка

$$aU_{xx} + 2bU_{xy} + cU_{yy} + AU_{zz} = 0, \quad (2.28)$$

где a, b, c, A - заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие неравенствам

$$A < 0, \quad a > 0, \quad ac - b^2 > 0. \quad (2.29)$$

Отправляясь от уравнения (2.28), как и в случае системы (2.26), можно получить систему у.ч.п. вида

$$\begin{aligned} au_x + bu_y + bv_x + cw_z + Aw_z &= 0, \\ s_x - v_z + w_y &= 0, \\ s_y + u_z - w_x &= 0, \\ s_z - u_y + v_x &= 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

символ этой системы равен:

$$\chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)(a\xi_1^2 + 2b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2 + A\xi_3^2).$$

В силу неравенств (2.29) система (2.30) является системой составного типа и она отличается от системы (2.26) только первым уравнением.

Для системы (2.30) построим представление общего решения. Отметим, что компонента $s(x, y, z)$ решения системы (2.30) является гармонической функции, а для компоненты $w(x, y, z)$ нельзя получить отдельное уравнение. Поэтому, возьмем произвольную гармоническую функцию $s(x, y, z)$ и произвольное решение $w(x, y, z)$ гиперболического уравнения (2.28) и определяем функции $\omega(x, y, z)$ и $\sigma(x, y, z)$ из уравнений

$$\omega_z = s(x, y, z), \sigma_z = w(x, y, z) \quad (2.31)$$

соответственно.

Теперь из третьего и второго уравнений системы (2.30) находим компоненты $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$:

$$u(x, y, z) = \sigma_x - \omega_y + \phi(x, y), \quad v(x, y, z) = \sigma_y + \omega_x + \psi(x, y), \quad (3.32)$$

где $\phi(x, y), \psi(x, y)$ – произвольные достаточно гладкие функции своих аргументов.

В итоге получаем представление общего решения системы (2.30) в следующем виде

$$s = \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad u = \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \sigma}{\partial z} \quad (2.33)$$

Положение особенно упрощается, когда $a = c > 0$, $b = 0$. При этом в представлении (2.33) функции $\sigma(x, y, z)$ и $\omega(x, y, z)$ определяются из уравнений:

$$\Delta \omega = 0, \quad a(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + A\sigma_{zz} = 0.$$

2.2.2. По выше приведенной схеме можно построить представления общих решений для следующих восьми групп неклассических систем с переменными коэффициентами.

1-я группа:

$$\begin{aligned} u_x + v_y - z^p w_z &= 0, & s_x - v_z + w_y &= 0, \\ s_y + u_z - w_x &= 0, & s_z - u_y + v_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Общее решение

$$s = \omega_z, \quad w = \sigma_z, \quad u = \sigma_x - \omega_y, \quad v = \omega_x + \sigma_y,$$

где ω и σ соответственно являются решениями уравнений

$$\Delta\omega = 0, \quad \sigma_{xx} + \sigma_{yy} - z^p\sigma_{zz} = 0.$$

2-я группа:

$$\begin{aligned} z^p(u_x + v_y) - w_z &= 0, & s_x - v_z + w_y &= 0, \\ s_y + u_z - w_x &= 0, & s_z - u_y + v_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Общее решение

$$s = \omega_z, \quad w = \sigma_z, \quad u = \sigma_x - \omega_y, \quad v = \omega_x + \sigma_y,$$

где

$$\Delta\omega = 0, \quad z^p(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \sigma_{zz} = 0.$$

3-я группа:

$$\begin{aligned} u_x + v_y - z^m w_z &= 0, & z^n s_x - v_z + z^m w_y &= 0, \\ z^n s_y + u_z - z^m w_x &= 0, & z^n s_z - u_y + v_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Общее решение

$$s = z^{-n}\omega_z, \quad w = z^{-m}\sigma_z, \quad u = \sigma_x - \omega_y, \quad v = \omega_x + \sigma_y,$$

где

$$\omega_{xx} + \omega_{yy} + \omega_{zz} - \frac{n}{z}\omega_z = 0, \quad \sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \sigma_{zz} + \frac{m}{z}\sigma_z = 0.$$

4-я группа:

$$\begin{aligned} z^m(u_x + v_y) - w_z &= 0, & z^n(s_x + w_y) - v_z &= 0, \\ z^n(s_y - w_x) + u_z &= 0, & s_z + z^n(v_x - u_y) &= 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Общее решение

$$s = z^{-n}\omega_z, \quad w = z^{-n}\sigma_z, \quad u = \sigma_x - \omega_y, \quad v = \omega_x + \sigma_y,$$

где

$$z^{n+p+1}(\omega_{xx} + \omega_{yy}) + z\omega_{zz} - n\omega_z = 0, \quad z^{m+n+1}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - z\sigma_{zz} + n\sigma_z = 0.$$

5-я группа:

$$\begin{aligned} u_x + v_y - w_z &= 0, & z^p s_x - v_z + w_y &= 0, \\ z^p s_y + u_z - w_x &= 0, & s_z + z^q(v_x - u_y) &= 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Общее решение

$$s = z^{-p}\omega_z, \quad w = \sigma_z, \quad u = \sigma_x - \omega_y, \quad v = \omega_x + \sigma_y,$$

где

$$z^{q+p+1}(\omega_{xx} + \omega_{yy}) + z\omega_{zz} - p\omega_z = 0, \quad \sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \sigma_{zz} = 0.$$

6-я группа:

$$\begin{aligned} z^m(u_x + v_y) - w_z &= 0, & z^n s_x + w_y - v_z &= 0, \\ z^n s_y - w_x + u_z &= 0, & s_z + z^p(v_x - u_y) &= 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Общее решение

$$s = z^{-n}\omega_z, \quad w = \sigma_z, \quad u = \sigma_x - \omega_y, \quad v = \omega_x + \sigma_y,$$

где

$$z^{n+p+1}(\omega_{xx} + \omega_{yy}) + z\omega_{zz} - n\omega_z = 0, \quad z^m(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \sigma_{zz} = 0.$$

7-я группа:

$$\begin{aligned} u_x + v_y - (x^2 + y^2)^p w_z &= 0, & s_x - v_z + w_y &= 0, \\ s_y + u_z - w_x &= 0, & s_z - u_y + v_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Общее решение

$$s = \omega_z, \quad w = \sigma_z, \quad u = \sigma_x - \omega_y, \quad v = \omega_x + \sigma_y,$$

где

$$\Delta\omega = 0, \quad \sigma_{xx} + \sigma_{yy} - (x^2 + y^2)^p \sigma_{zz} = 0.$$

8-я группа:

$$\begin{aligned} w_z - u_x - v_y + u - v &= 0, \\ v_z - z^p s_x - z^q w_y + z^p s + z^q w &= 0, \\ u_z + z^p s_y - z^q w_x + z^p s - z^q w &= 0, \\ s_z + v_x - u_y + u + v &= 0. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Общее решение

$$s = z^{-p} \omega_z, \quad w = z^{-q} \sigma_z, \quad u = \sigma_x - \omega_y, \quad v = \omega_x + \sigma_y,$$

где

$$\begin{aligned} z\omega_{zz} + z^{p+1}(\omega_{xx} + \omega_{yy}) - p\omega_z - 2z^{p+1}\omega &= 0, \\ z\sigma_{zz} - z^{q+1}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - q\sigma_z + 2z^{q+1}\sigma &= 0. \end{aligned}$$

§2.3. Начально-краевые задачи в полупространстве

Рассмотрим частный случай системы (2.30), а именно, пусть $a = c = 1$, $b = 0$, $A = -z^p$, где $p \in (3/2, 2)$. Тогда получим систему

$$\begin{aligned} u_x + v_y - z^p w_z &= 0, & s_x - v_z + w_y &= 0, \\ s_y + u_z - w_x &= 0, & s_z - u_y + v_x &= 0, \end{aligned} \tag{2.42}$$

символ которой имеет вид

$$\chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)[\xi_1^2 + \xi_2^2 - z^p \xi_3^2].$$

Наряду с системой (2.42), будем рассматривать и следующую систему

$$\begin{aligned} u_x + v_y - w_z &= 0, & z^p s_x - v_z + w_y &= 0, \\ z^p s_y + u_z - w_x &= 0, & s_z + z^q(v_x - u_y) &= 0, \end{aligned} \tag{2.43}$$

с характеристическим определителем

$$\chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -[z^{p+q}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_3^2][\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2],$$

где p, q - числа, одновременно не равные нулю и удовлетворяющие неравенствам $p + q + 2 > 0, q > -1$. Если $p = q = 0$, то система (2.43) переходит в систему (2.26). Из характеристических определителей систем (2.42) и (2.43), следует, что при $z > 0$ обе эти системы являются неклассическими (составными) системами, а при $z = 0$ характеристически вырождаются.

Дифференцируя уравнения системы (2.42) по соответствующим переменным и складывая полученные результаты, получим следующие уравнения для функций $s(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$:

$$\Delta s = 0, \quad w_{xx} + w_{yy} - z^p w_{zz} - pz^{p-1} w_z = 0. \quad (2.44)$$

Аналогичным образом из системы (2.43) получим следующие соотношения

$$z^{q+p+1}(s_{xx} + s_{yy}) + zs_{zz} - qs_z = 0, \quad \square w = 0. \quad (2.45)$$

В полупространстве $R_+^3 = \{(x, y, z): (x, y) \in R^2, z > 0\}$ с границей $\Gamma = \{z = 0\}$ рассмотрим следующие задачи.

«В дальнейшем под регулярным решением системы подразумевается непрерывное вплоть до границы, дважды дифференцируемое в R_+^3 решение (s, u, v, w) с ограниченной в R_+^3 компонентой s (соответственно для $z > 0$ $s(x, y, z) \rightarrow 0$ при $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$)» [2-A].

Задача I. Найти регулярное в полупространстве R_+^3 решение (s, u, v, w) системы (2.42), удовлетворяющее условиям

$$s|_{\Gamma} = f(x, y), \quad (2.46)$$

$$w|_{z=0} = g(x, y), \quad w_z = O\left(z^{-\frac{p}{2}}\right), \text{ при } z \rightarrow 0, \quad (2.47)$$

при некотором $z_0 > 0$ функции $u(x, y, z_0)$ и $v(x, y, z_0)$ – ограниченные, а заданные функции $f(x, y)$ – ограниченная функция из $C(R^2)$, $g(x, y) \in C^3(R^2)$, причём $|\nabla g|$ принадлежит $L_{q,2}(R^2)$, $q > 2$.

Задача II. Найти регулярное в полупространстве R_+^3 решение (s, u, v, w) системы (2.43), удовлетворяющее условию (2.46), первому условию (2.47) и

$$w_z|_{z=0} = h(x, y),$$

при некотором $z_0 > 0$ функции $u(x, y, z_0)$ и $v(x, y, z_0)$ – ограниченные, а заданные функции $f \in C(R^2)$, $g \in C^3(R^2)$, $h \in C^2(R^2)$, причем $f(x, y)$ – ограниченная, $h \in L_{r,2}(R^2)$, $r > 2$.

Рассмотрим задачу I. Из следствия (2.44) системы (2.42) следует, что задача определения компонентов s и w решения задачи I сводится соответственно к задаче Дирихле для уравнения Лапласа и к задаче Коши для второго вырождающегося гиперболического уравнения (2.44).

Как известно [40, с. 272], задача Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве R_+^3 при любой заданной функции $f(x, y)$ непрерывной и ограниченной на границе Γ области имеет единственное решение

$$s(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \iint_{R^2} \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.48)$$

Второе уравнение (2.44) с помощью замены

$$t = t(z) \equiv \frac{2}{2-p} z^{\frac{2-p}{2}}$$

можно привести к уравнению Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД)

$$w_{xx} + w_{yy} - w_{tt} - \frac{a}{t} w_t = 0, \quad (2.49)$$

где

$$a = \frac{p}{2-p}.$$

При такой замене начальные условия (2.47) переходят в следующие

$$w(x, y, t)|_{t=0} = g(x, y), \quad w_t(x, y, t)|_{t=0} = 0. \quad (2.50)$$

В силу условий на p имеем $a > 3$. Тогда задача (2.49), (2.50) имеет единственное решение (см. §1.2) :

$$w(x, y, t) = \frac{1}{\tau_a} \int_{|\xi| < 1} \frac{g(\zeta + \xi t) d\xi}{(1 - |\xi|^2)^{\frac{3-a}{2}}}, \quad (2.51)$$

где

$$\tau_a = \int_{|\xi| < 1} (1 - |\xi|^2)^{-\frac{3-a}{2}} d\xi, \quad \zeta = (x, y).$$

Поэтому функция

$$w(x, y, z) = \frac{1}{\tau_a} \int_{|\xi| < 1} \frac{g(\zeta + \xi t(z)) d\xi}{(1 - |\xi|^2)^{\frac{3-a}{2}}}, \quad (2.52)$$

будет решением второго уравнения из (2.44) и удовлетворяет условиям (2.47).

Таким образом, компоненты $s(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ решения системы (2.42) определяются однозначно по формулам (2.48) и (2.52) соответственно.

Теперь, зная s и w , из второго и третьего уравнений системы (2.42) найдём

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_{z_0}^z (w_x - s_y) d\zeta + \phi(x, y), \quad z_0 > 0, \\ v(x, y, z) &= \int_{z_0}^z (w_y + s_x) d\zeta + \psi(x, y), \end{aligned} \quad (2.53)$$

здесь ϕ и ψ - произвольные из $C^1(R^2)$ функции. Если подставить выражения (2.53) в первое и четвёртое уравнения системы (2.42), то относительно функций $\phi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ получаем неоднородную систему уравнений Коши–Римана

$$\phi_x + \psi_y = \alpha(x, y), \quad \psi_x - \phi_y = \beta(x, y), \quad (2.54)$$

где $\alpha(x, y) = z_0^p w_z(x, y, z_0)$, $\beta(x, y) = -s_z(x, y, z_0)$. Систему (2.54) запишем в комплексной форме

$$\partial_{\bar{\zeta}} U = F, \quad (2.55)$$

где $\zeta = x + iy$, $U = \psi + i\phi$, $F = (\beta + i\alpha)/2$, $\partial_{\bar{\zeta}} = (\partial_x + i\partial_y)/2$.

Покажем, что функции α и β принадлежат $L_{q,2}(R^2)$, $q > 2$. Из (2.52) имеем

$$w_z = \frac{1}{\tau_\alpha} \iint_{|\xi| < 1} \frac{(\nabla g(\cdot), \xi) t'(z)}{(1 - |\xi|^2)^{\frac{3-a}{2}}} d\xi,$$

здесь $\nabla g(\cdot)$ - градиент функции $\nabla g(\zeta + \xi t(z))$ по переменной ξ , $(\nabla g, \xi)$ - скалярное произведение векторов ∇g и ξ .

Поэтому

$$\alpha = \frac{z_0^{p/2}}{\tau_\alpha} \iint_{|\xi| < 1} \frac{(\nabla g(\cdot), \xi)}{(1 - |\xi|^2)^{\frac{3-a}{2}}} d\xi$$

и в силу условий, наложенных на функцию $g(x, y)$ получим, что $\alpha \in L_{q,2}(R^2)$.

Далее из (2.48) имеем

$$s_z = \frac{s}{z} - \frac{3z^2}{2\pi} \iint_{R^2} \frac{f(\xi, \eta)}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta.$$

Отсюда видно, что

$$\beta(x, y) = s_z(x, y, z_0) \sim \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty,$$

т.е. $\beta \in L_{q,2}(R^2)$.

Таким образом, мы показали, что $F \in L_{q,2}(R^2)$. Поэтому общее решение уравнения (2.55) (см. §2.1, п.2.1.1)

$$U(\zeta) = \Phi(\zeta) + T_c F,$$

где $\Phi(\zeta)$ - произвольная аналитическая в C функция, а функция

$$T_C F = -\frac{1}{\pi} \iint_C \frac{F(t)}{t-\zeta} d\zeta d\eta, \zeta \in C$$

при $|\zeta| \rightarrow \infty$ убывает как $|\zeta|^{(2-q)/2}$.

Так как по условию задачи **I** $u(x, y, z_0)$ и $v(x, y, z_0)$ ограниченные, то из (2.53) получаем, что функции $\phi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ также ограниченные. Следовательно, функция $U(\zeta)$ и тем самым $\Phi(\zeta)$ ограниченная на всей плоскости. Тогда по теореме Лиувилля $\Phi \equiv C$ - постоянная. Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема 2.5. Пусть в системе (2.42) порядок вырождения p удовлетворяет условию $3/2 < p < 2$. Тогда для любых функций $f(x, y) \in C(R^2)$, $g(x, y) \in C^3(R^2)$, причём $f(x, y)$ – ограниченная и $|\nabla g| \in L_{q,2}(R^2)$, $q > 2$, задача **I** имеет регулярное решение, определяемое с точностью до произвольной постоянной.

Теперь рассмотрим задачу **II**. Для определения компонентов s и w решения системы (2.43) с условиями (2.46) и (2.47), задача **II** сводится соответственно к задаче Дирихле для первого вырождающегося эллиптического уравнения (2.45) и к задаче Коши для волнового уравнения.

Аналогично случаю задачи **I** первое уравнение (2.45) с помощью замены

$$t = t(z) = \frac{2}{2+p+q} z^{\frac{2+p+q}{2}}$$

преобразуем к эллиптическому уравнению ЭПД

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \frac{a}{t} \frac{\partial s}{\partial t} = 0, \quad (2.56)$$

где

$$a = \frac{p-q}{q+p+2},$$

а условие (2.46) - к условию

$$s(x, y, t)|_{t=0} = f(x, y). \quad (2.57)$$

В силу теоремы 2.4 (п.2.1.3) задача (2.56), (2.57) с дополнительным условием $s(x, y, z) \rightarrow 0$ при $z > 0, x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$ имеет не более одного решения (это дополнительное условие в нашем случае выполнено по определению регулярного решения системы (2.43)).

Согласно условиям на p и q имеем $a < 1$. Для таких a решение уравнения (2.56) представляется в виде (см. §2.1, п.2.1.3)

$$s(x, y, t) = \frac{1}{\Lambda_{2-a}} \int_{R^2} t^{1-a} E_{2-a}(M, t, \xi) \theta(\xi) d\xi, \quad (2.58)$$

где

$$\Lambda_{2-a} = \int_{R^2} (|\tau|^2 + 1)^{-\frac{3-a}{2}} d\tau,$$

$$E_{2-a}(M, t, \xi) = [(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + t^2]^{-\frac{3-a}{2}},$$

$M = (x, y)$, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\theta(\xi)$ - непрерывная ограниченная в R^2 функция.

Совершая подстановку $\xi_1 = x + \tau_1 t$, $\xi_2 = y + \tau_2 t$, $d\xi = t^2 d\tau$, интеграл (2.58) преобразуем к виду

$$s(x, y, t) = \frac{1}{\Lambda_{2-a}} \int_{R^2} (|\tau|^2 + 1)^{-\frac{3-a}{2}} \theta(M + t\tau) d\tau.$$

Используя условие (2.57), будем иметь

$$s(x, y, 0) = \frac{\theta(M)}{\Lambda_{2-a}} \int_{R^2} (|\tau|^2 + 1)^{-\frac{3-a}{2}} d\tau = \theta(M) = f(x, y).$$

Тогда решение задачи (2.56)-(2.57) будет иметь вид

$$s(x, y, t) = \frac{1}{\Lambda_{2-a}} \int_{R^2} t^{1-a} E_{2-a}(M, t, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Обратно, переходя к переменной z , получим

$$s(x, y, z) = \frac{cz^{(q+1)(p+q+2)}}{\Lambda_{2-a}} \int_{R^2} E_{2-a}(M, z, \xi) f(\xi) d\xi,$$

где $c = \left(\frac{2}{2+p+q}\right)^{2(q+1)}$.

Функция $w(x, y, z)$ определяется, как решение задачи Коши

$$w|_{z=0} = g(x, y), \quad w_z|_{z=0} = h(x, y)$$

для волнового уравнения, формулой Пуассона [1, с. 55]

$$w(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{K_z} \frac{h(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{z^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{2\pi} \iint_{K_z} \frac{g(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{z^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}},$$

где K_z - круг с центром в точке (ξ, η) и радиусом z .

Теперь, зная s и w , из второго и третьего уравнений системы (2.43) найдём

$$u(x, y, z) = \int_{z_0}^z (w_x - \zeta^p s_y) d\zeta + \phi(x, y), \quad z_0 > 0, \\ v(x, y, z) = \int_{z_0}^z (w_y + \zeta^p s_x) d\zeta + \psi(x, y), \quad (2.59)$$

где ϕ и ψ - произвольные дифференцируемые функции двух независимых переменных x и y , удовлетворяющие системе Коши-Римана (2.54), в которой теперь правые части $\alpha(x, y) = h(x, y)$ и $\beta(x, y) = -z_0^{-q} s_z(x, y, z_0)$. Далее, рассуждая аналогично случаю задачи I получим следующий результат.

Теорема 2.6. Пусть в системе (2.43) постоянные p и q одновременно не равны нулю и $p + q + 2 > 0, q > -1$. Тогда для любых функций $f \in C(R^2), g \in$

$C^3(R^2)$, $h \in C^2(R^2)$, причём $f(x, y)$ – ограниченная и $h \in L_{r,2}(R^2)$, $r > 2$, задача II имеет регулярное решение, определяемое до произвольной постоянной.

§2.4. Видоизменённые начально-краевые задачи

Рассмотрим в полупространстве R_+^3 две более общие системы уравнений первого порядка с переменными коэффициентами вида

$$\begin{aligned} u_x + v_y - z^m w_z &= 0, & z^\mu s_x - v_z + z^m w_y &= 0, \\ z^\mu s_y + u_z - z^m w_x &= 0, & z^\mu s_z - u_y + v_x &= 0, \end{aligned} \quad (2.60)$$

при $\mu > 1$, $m > 3$, а также вида

$$\begin{aligned} z^m(u_x + v_y) - w_z &= 0, & z^n(s_x + w_y) - v_z &= 0, \\ z^n(s_y - w_x) + u_z &= 0, & s_z + z^p(v_x - u_y) &= 0, \end{aligned} \quad (2.61)$$

где числа m, n, p подчинены следующим условиям: $p > -1$, $m + n + 2 > 0$, $n + 2m + 3 < 0$. Характеристические определители этих систем равны

$$\chi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -z^{\mu+m}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2)$$

и

$$\chi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -[z^{n+p}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_3^2][z^{n+m}(\xi_1^2 + \xi_2^2) - \xi_3^2].$$

Следовательно, в каждой точке полупространства R_+^3 обе системы являются системами составного типа, а на плоскости $z = 0$ вырождаются.

Следствием системы (2.60) являются уравнения

$$s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} + \frac{\mu}{z}s_z = 0, \quad (2.62)$$

$$w_{xx} + w_{yy} - w_{zz} - \frac{m}{z}w_z = 0, \quad (2.63)$$

а следствием системы (2.61) – уравнения

$$\begin{aligned} z^{n+p+1}(s_{xx} + s_{yy}) + zs_{zz} - ps_z &= 0, \\ z^{n+m+1}(w_{xx} + w_{yy}) - zw_{zz} + mw_z &= 0, \end{aligned}$$

которые с помощью подстановок

$$t_1 = \frac{2}{n+p+2} z^{\frac{n+p+2}{2}} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{2}{m+n+2} z^{\frac{m+n+2}{2}},$$

преобразуются соответственно в эллиптическое и гиперболическое уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД)

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial t_1^2} + \frac{a_1}{t_1} \frac{\partial s}{\partial t_1} = 0, \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t_2^2} - \frac{a_2}{t_2} \frac{\partial w}{\partial t_2} = 0, \quad (2.65)$$

где $a_1 = \frac{n-p}{n+p+2} < 1$, $a_2 = \frac{n-m}{n+m+2} > 3$ согласно условиям на m, n, p .

Для систем (2.60), (2.61) будем рассматривать следующие видоизменённые начально-краевые задачи.

Задача III. Найти в полупространстве R_+^3 решение (s, u, v, w) класса $C^2(R_+^3) \cap C(\overline{R_+^3})$ системы (2.60), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{\mu-1} s(x, y, z) = g_1(x, y) \quad (2.66)$$

$$w(x, y, z)|_{z=0} = g_2(x, y), \quad w_z(x, y, z)|_{z=0} = 0, \quad (2.67)$$

при некотором $z_0 > 0$ функции $u(x, y, z_0)$ и $v(x, y, z_0)$ – ограниченные, а заданные функции $g_1(x, y)$ и $g_2(x, y)$ из классов $C(R^2)$ и $C^2(R^2)$ соответственно, причем $g_1(x, y)$ – ограниченная и $|\nabla g_2|$ принадлежит $L_{t,2}(R^2)$, $t > 2$.

Задача IV. Найти регулярное в полупространстве R_+^3 решение (s, u, v, w) системы (2.61), удовлетворяющее условиям

$$s(x, y, z)|_{z=0} = b_1(x, y), \quad (2.68)$$

$$w(x, y, z)|_{z=0} = b_2(x, y), \quad w_z(x, y, z) = O\left(z^{\frac{n+m}{2}}\right) \text{ при } z \rightarrow 0, \quad (2.69)$$

при некотором $z_0 > 0$ функции $u(x, y, z_0)$ и $v(x, y, z_0)$ – ограниченные, а заданные функции $b_1(x, y) \in C(R^2)$, $b_2(x, y) \in C^2(R^2)$, причем $b_1(x, y)$ – ограниченная и $|\nabla b_2|$ принадлежит $L_{t,2}(R^2)$, $t > 2$.

Теорема 2.7. Пусть $\mu > 1$, $t > 3$ и заданные функции

$$g_1(x, y) \in C(R^2), \quad g_2(x, y) \in C^2(R^2),$$

причем $g_1(x, y)$ – ограниченная и $|\nabla g_2|$ принадлежит $L_{t,2}(R^2)$, $t > 2$. Тогда задача **III** разрешима и её решение определяется с точностью до произвольной постоянной.

Доказательство. Учитывая следствия системы (2.60) заключаем, что задача **III** сводится к видоизменённой задаче Дирихле (2.62), (2.66) и к частной задаче Коши (2.63), (2.67).

Решение уравнения (2.62) при $\mu > 1$ представляется в виде (см. §2.1, п.2.1.3)

$$s(x, y, z) = \frac{1}{\Lambda_\mu} \int_{R^2} E_\mu(M, z, \xi) \theta(\xi) d\xi, \quad (2.70)$$

где

$$\Lambda_\mu = \int_{R^2} (|\tau|^2 + 1)^{-\frac{1+\mu}{2}} d\tau,$$

$$E_\mu(M, z, \xi) = [(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + z^2]^{-\frac{1+\mu}{2}},$$

$$M = (x, y), \quad \tau = (\tau_1, \tau_2), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2).$$

С помощью подстановки $\xi_1 = x + \tau_1 z$, $\xi_2 = y + \tau_2 z$, $d\xi = z^2 d\tau$ преобразуем интеграл (2.70) к виду

$$s(x, y, z) = \frac{z^{1-\mu}}{\Lambda_\mu} \int_{R^2} (|\tau|^2 + 1)^{-\frac{1+\mu}{2}} \theta(M + \tau z) d\tau,$$

или

$$z^{\mu-1}s(x, y, z) = \frac{1}{\Lambda_\mu} \int_{R^2} (|\tau|^2 + 1)^{-\frac{1+\mu}{2}} \theta(M + \tau z) d\tau.$$

Применяя условие (2.66), будем иметь

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{\mu-1}s(x, y, z) = \frac{\theta(M)}{\Lambda_\mu} \int_{R^2} (|\tau|^2 + 1)^{-\frac{1+\mu}{2}} d\tau = \theta(M) = g_1(x, y).$$

Тогда получим решение видоизменённой задачи Дирихле (2.62), (2.66) в виде

$$s(x, y, z) = \frac{1}{\Lambda_\mu} \int_{R^2} E_\mu(M, z, \xi) g_1(\xi) d\xi.$$

Теперь рассмотрим задачу Коши (2.63), (2.67). Решение этой задачи единственно и имеет вид (см. §2.1, п.2.1.2):

$$w(x, y, z) = \frac{1}{\tau_m} \int_{|\xi| < 1} \frac{g_2(\zeta + \xi t) d\xi}{(1 - |\xi|^2)^{\frac{3-m}{2}}},$$

где

$$\tau_m = \int_{|\xi| < 1} (1 - |\xi|^2)^{\frac{m-3}{2}} d\xi, \quad \zeta = (x, y), \xi = (\xi_1, \xi_2).$$

Таким образом, компоненты $s(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ решения задачи **III** определяются в явном виде.

По известным s и w функции $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^z (z^m w_x - z^\mu s_y) dz + \phi(x, y), \\ v(x, y, z) &= \int_0^z (z^m w_y + z^\mu s_x) dz + \psi(x, y), \end{aligned}$$

в которых функции $\phi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ определяются как и в случае теоремы 2.5. Следовательно, компоненты $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ решения задачи **III** определяются с точностью до произвольной постоянной.

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим задачу **IV**. В этом случае относительно компонент s и w решения системы с учётом следствий (2.64), (2.65) получим задачу Дирихле с граничным условием

$$s(x, y, t_1)|_{t_1=0} = b_1(x, y), \quad (2.71)$$

для уравнения (2.64) и частную задачу Коши

$$w(x, y, t_2)|_{t_2=0} = b_2(x, y), \quad w_{t_2}(x, y, t_2)|_{t_2} = 0, \quad (2.72)$$

для уравнения (2.65).

Задача Дирихле (2.64), (2.71) исследуется подобно задаче (2.56) - (2.57). Поэтому решение задачи (2.64), (2.71) с учётом формулы (2.58) можно записать в виде

$$s(x, y, t_1) = \frac{1}{\Lambda_{2-a_1}} \int_{R^2} t_1^{1-a_1} E_{2-a_1}(M, t_1, \xi) b_1(\xi) d\xi.$$

Обратно, переходя к переменной z , получим

$$s(x, y, z) = \frac{c_1 z^{p+1}}{\Lambda_{2-a_1}} \int_{R^2} E_{2-a_1}(M, t_1(z), \xi) b_1(\xi) d\xi,$$

где

$$c_1 = \left(\frac{n}{n+p+2} \right)^{1-a_1}, \quad t_1(z) = \frac{2}{n+p+2} z^{(n+p+2)/2}.$$

Решение задачи (2.65), (2.69) при условии $a_2 > 3$, представляется в виде (см. п.2.1.2, §2.1):

$$w(x, y, t) = \frac{1}{\tau_{a_2}} \int_{|\xi| < 1} \frac{b_2(\zeta + \xi t_2(z)) d\xi}{(1 - |\xi|)^{\frac{3-a_2}{2}}},$$

где

$$\tau_{a_2} = \int_{|\xi| < 1} (1 - |\xi|)^{\frac{a_2-3}{2}} d\xi, \quad \zeta = (x, y), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2),$$

$$t_2(z) = \frac{2}{m+n+2} z^{\frac{m+n+2}{2}}.$$

Далее, проведя аналогичное рассуждение, как и в случае задачи I, получим следующий аналог теоремы 2.5

Теорема 2.8. Пусть $p > -1$, $n + m + 2 > 0$, $n + 2m + 3 < 0$ и заданные функции

$$b_1(x, y) \in C(R^2), \quad b_2(x, y) \in C^2(R^2),$$

причем $b_1(x, y)$ – ограниченная и $|\nabla b_2|$ принадлежит $L_{t,2}(R^2)$, $t > 2$. Тогда задача IV разрешима и её решение определяется с точностью до произвольной аналитической функции.

§2.5. Задачи типа Римана-Гильберта

в ограниченных трёхмерных областях

2.5.1. Пусть $\Omega = \{(x, y, z): z > 0, (x, y) \in G \subset R^2\}$ – цилиндр с боковой поверхностью $H = \{(x, y, z): z > 0, (x, y) \in \Sigma = \partial G\}$ и границей $\Gamma = H \cup G$.

Для системы дифференциальных уравнений первого порядка,

$$\begin{aligned} u_x + v_y - z^p w_z &= 0, & s_x - v_z + w_y &= 0, \\ s_y + u_z - w_x &= 0, & s_z - u_y + v_x &= 0, \end{aligned} \quad (2.73)$$

где $p < 1$, исследованной ранее в §2.3, изучим следующую видоизменённую начально - краевую задачу [2-A]

Задача V. Найти регулярное в области Ω решение (s, u, v, w) системы (2.73), удовлетворяющее условиям

$$s|_{z=0} = f(x, y), \quad s|_H = 0, \quad s(x, y, \infty) = 0, \quad (2.74)$$

$$w|_{z=0} = \eta(x, y), \lim_{z \rightarrow 0} z^p w_z = \theta(x, y), w|_H = 0, \quad (2.75)$$

$$(au + bv)|_\Sigma = g(x, y), \quad (2.76)$$

где заданные функции $f \in C_v^1(\bar{G})$, $\eta \in C^4(\bar{G})$, $\theta \in C^3(\bar{G}) \cap C_v^1(\bar{G})$, $a, b, g \in C_v(\Sigma)$, $f(x, y)|_\Sigma = \eta(x, y)|_\Sigma = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

Следствием системы (2.73) являются соотношения (см. (2.44))

$$\Delta s = 0, \quad w_{xx} + w_{yy} - z^p w_{zz} - pz^{p-1} w_z = 0. \quad (2.77)$$

Задача Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta s = 0$ с граничными условиями (2.74) имеет решение [91, с. 528], [94, с. 309]:

$$s(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \exp(-\sqrt{\lambda_k} z) \delta_k(x, y),$$

стремящееся к нулю при $z \rightarrow \infty$, где

$$\alpha_k = \iint_G f(x, y) \delta_k(x, y) dG,$$

λ_k – собственные значения, а $\delta_k(x, y)$ – нормированные и попарно ортогональные собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\delta_{xx} + \delta_{yy} + \lambda \delta = 0, \quad \delta(x, y)|_\Sigma = 0. \quad (2.78)$$

Как известно (см. [93, с. 422]), все $\lambda_k > 0$. Для определения компоненты w решения будем решать видоизменённую задачу Коши с условиями (2.75) для второго уравнения (2.77). Решение будем искать в виде ряда

$$w(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(z) \delta_k(x, y), \quad (2.79)$$

где $\delta_k(x, y)$ – собственные функции задачи (2.78). Подставляя ряд (2.79) во второе уравнение (2.77), получим, что Z_k должны удовлетворять уравнению

$$zZ_k'' + pZ_k' + \lambda_k z^{1-p} Z_k = 0. \quad (2.80)$$

Решение уравнения (2.80) можно записать в виде [34, с. 398]:

$$Z_k(z) = z^{\frac{1-p}{2}} \left[A_{1k} J_\nu \left(2q_k z^{\frac{2-p}{2}} \right) + A_{2k} J_{-\nu} \left(2q_k z^{\frac{2-p}{2}} \right) \right],$$

где A_{1k} и A_{2k} - произвольные постоянные, J_ν и $J_{-\nu}$ - бесселевы функции первого рода, $\nu = \frac{1-p}{2-p}$, $q_k = \sqrt{\lambda_k}/(2-p)$. Подставляя значение $Z_k(z)$ при $t = z^{\frac{1-p}{2}}$ в (2.79), получим ряд

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} t \left[A_{1k} J_\nu \left(2q_k t^{\frac{1}{\nu}} \right) + A_{2k} J_{-\nu} \left(2q_k t^{\frac{1}{\nu}} \right) \right] \delta_k(x, y), \quad (2.81)$$

при этом условия (2.75) примут вид

$$w(x, y, t)|_{t=0} = \eta(x, y), \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} w_t = \frac{2}{p-1} \theta(x, y). \quad (2.82)$$

Учитывая формулы

$$\begin{aligned} J_\nu \left(2q_k t^{\frac{1}{\nu}} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (q_k t^{\frac{1}{\nu}})^{\nu+2n}}{n! \Gamma(\nu+n+1)} = t \left[\frac{q_k^\nu}{\Gamma(\nu+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q_k^{\nu+2n} t^{\frac{2n}{\nu}}}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \right] = \\ &= t[\sigma_{1k} + \Sigma_1(t)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{-\nu} \left(2q_k t^{\frac{1}{\nu}} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (q_k t^{\frac{1}{\nu}})^{2n-\nu}}{n! \Gamma(n-\nu+1)} = t^{-1} \left[\frac{q_k^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q_k^{2n-\nu} t^{\frac{2n}{\nu}}}{n! \Gamma(n-\nu+1)} \right] = \\ &= t^{-1}[\sigma_{2k} + \Sigma_2(t)], \end{aligned}$$

где Γ - функция Эйлера, $\sigma_{1k}, \sigma_{2k} \equiv \text{const}$, а $\Sigma_1(0) = \Sigma_2(0) = 0$, перепишем ряд (2.81) в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_{1k} t^2 [\sigma_{1k} + \Sigma_1(t)] + A_{2k} [\sigma_{2k} + \Sigma_2(t)] \right] \delta_k(x, y). \quad (2.83)$$

Почленно дифференцируя ряд (2.83), с учётом его равномерной сходимости (см. [36, с. 381]), получим

$$w_t(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_{1k} 2t[\sigma_{1k} + \Sigma_1(t)] + A_{1k} t^2 \Sigma_1'(t) + \\ + A_{2k} t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q_k^{2n-v} \frac{2n}{v} t^{\frac{2n-2v}{v}}}{n! \Gamma(n-v+1)}] \delta_k(x, y).$$

Удовлетворив начальные условия (2.82), получим

$$w(x, y, 0) = \eta(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} \sigma_{2k} \delta_k(x, y), \\ \frac{2}{p-1} \theta(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} w_t = \sum_{k=1}^{\infty} 2A_{1k} \sigma_{1k} \delta_k(x, y).$$

Далее, воспользовавшись теоремой [93, с. 422] о разложении по собственным функциям задачи (2.78), и обозначая $C_{1k} = (1-p)A_{1k}\sigma_{1k}$ и $C_{2k} = A_{2k}\sigma_{2k}$, найдём

$$C_{1k} = \iint_G \theta(x, y) \delta_k(x, y) dG,$$

$$C_{2k} = \iint_G \eta(x, y) \delta_k(x, y) dG.$$

Отсюда определяем коэффициенты A_{1k} и A_{2k} . Если функции $\eta \in C^4(G)$, $\theta \in C^3(G)$, то обычным методом можно доказать, что ряд (2.79) и ряды, полученные дифференцированием до второго порядка включительно, сходятся равномерно относительно $x, y \in \bar{G}$, $z > 0$ и сумма ряда (2.79) является классическим решением задачи (2.77), (2.75).

Зная s и w , из системы (2.73) находим две остальные компоненты u и v решения системы в виде (2.53), в котором произвольные функции ϕ и ψ удовлетворяют неоднородной системе Коши-Римана

$$\phi_x + \psi_y = \lim_{z \rightarrow 0} z^p w_z, \quad \psi_x - \phi_y = -s_z|_{z=0}$$

на участке G плоскости $z = 0$, а в силу условия (2.76) - граничному условию

$$(a\phi + b\psi)|_L = g(x, y).$$

Таким образом, задача определения компонентов u и v решения задачи **V** сведена к задаче Римана-Гильберта в ограниченной области для неоднородной системы Коши-Римана, которая, как известно [14, с. 185], нётерова. Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.9. *Задача V нётерова и её индекс равен индексу функции $\bar{\lambda}(\zeta) = b(\zeta) - ia(\zeta)$ на границе области G .*

Замечание 2.2 – Аналогично исследуется задача типа задачи V и для вырождающейся неклассической системы вида

$$\begin{aligned} z^p(u_x + v_y) - w_z &= 0, & s_x - v_z + w_y &= 0, \\ s_y + u_z - w_x &= 0, & s_z - u_y + v_x &= 0. \end{aligned}$$

2.5.2. В этом пункте изложим результаты нашей работы [10-А]. «Введём в рассмотрение следующую систему уравнений с младшими членами

$$\begin{aligned} w_z - u_x - v_y + u - v &= 0, \\ v_z - z^p s_x - z^q w_y + z^p s + z^q w &= 0, \\ u_z + z^p s_y - z^q w_x + z^p s - z^q w &= 0, \\ s_z + v_x - u_y + u + v &= 0, \end{aligned} \tag{2.84}$$

характеристический определитель которой имеет вид

$$\chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -[z^p(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_3^2][z^q(\xi_1^2 + \xi_2^2) - \xi_3^2],$$

где p, q - любые положительные числа. Следовательно система (2.84) для любого $z \neq 0$ является системой составного типа, а при $z = 0$ система вырождается.

Для системы (2.84) в цилиндре Ω будем рассматривать задачу

Задача VI. *Найти в цилиндре Ω решение (s, u, v, w) системы (2.84), удовлетворяющее условиям*

$$s|_{z=0} = f_0(x, y), \quad s|_H = 0, \quad s(x, y, \infty) = 0, \tag{2.85}$$

$$w|_{z=0} = g_0(x, y), \quad w_z|_{z=0} = h(x, y), \quad w|_H = 0, \quad (2.86)$$

$$(\alpha u + \beta v)|_\Sigma = \gamma(x, y), \quad (2.87)$$

где

$$f_0 \in C_v^1(\bar{G}), \quad g_0 \in C^4(\bar{G}), \quad h \in C^3(\bar{G}) \cap C_v^1(\bar{G}), \quad \alpha, \beta, \gamma \in C_v(\Sigma),$$

причем $f_0|_\Sigma = g_0|_\Sigma = 0$ и $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Нетрудно заметить, что из системы (2.84) относительно компонентов $s(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ решения системы следуют соотношения

$$s_{zz} + z^p(s_{xx} + s_{yy}) - 2z^p s = 0, \quad (2.88)$$

$$w_{zz} - z^q(w_{xx} + w_{yy}) + 2z^q w = 0. \quad (2.89)$$

Следовательно, для определения функции $s(x, y, z)$ необходимо решать задачу Дирихле с граничными условиями (2.85) для вырождающегося эллиптического уравнения (2.88), а для определения функции $w(x, y, z)$ - задачу Коши с начальными условиями (2.86) для вырождающегося гиперболического уравнения (2.89).

Функцию s будем строить методом Фурье в виде ряда

$$s(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(z) \delta_k(x, y), \quad (2.90)$$

где δ_k составляют полную ортонормированную систему собственных функций задачи

$$\Delta \delta + \lambda^2 \delta = 0, \quad (x, y) \in G, \delta(x, y)|_\Sigma = 0, \quad (2.91)$$

а $\Phi_k(z)$ — решение уравнения

$$\Phi_k'' - (2 + \lambda_k^2)z^p \Phi_k = 0, \quad (2.92)$$

соответствующее собственному значению λ_k задачи (2.91). Решение уравнения (2.92) даётся формулой [34, с. 401]

$$\Phi_k(\tau) = \tau[C_{1k}I_\nu(2\rho_k\tau^{1/\nu}) + C_{2k}K_\nu(2\rho_k\tau^{1/\nu})],$$

где I_ν и K_ν - модифицированные функции Бесселя и Макдональда [12, с. 90], C_{1k} и C_{2k} - произвольные вещественные постоянные, а $\tau = \sqrt{z}$, $\nu = \frac{1}{p+2}$, $\rho_k = \frac{\sqrt{2+\lambda_k^2}}{p+2}$.

Ряд (2.90) запишем в виде

$$s(x, y, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau \left[C_{1k} I_\nu \left(2\rho_k \tau^{\frac{1}{\nu}} \right) + C_{2k} K_\nu \left(2\rho_k \tau^{\frac{1}{\nu}} \right) \right] \delta_k(x, y). \quad (2.93)$$

По условию задачи функция s должна стремиться к нулю на бесконечности, следовательно в (2.93) необходимо положить $C_{1k} = 0$. Тогда

$$s(x, y, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k} \tau K_\nu(2\rho_k \tau^{1/\nu}) \delta_k(x, y).$$

Функцию $\tau K_\nu(2\rho_k \tau^{1/\nu})$ запишем в развёрнутом виде

$$\begin{aligned} \tau K_\nu(2\rho_k \tau^{1/\nu}) = & \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} \left[\left\{ \frac{\rho_k^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_k^{2n-\nu} \tau^{\frac{2n}{\nu}}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-\nu+1)} \right\} - \right. \\ & \left. - \tau^2 \left\{ \frac{\rho_k^\nu}{\Gamma(1+\nu)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_k^{2n+\nu} \tau^{\frac{2n}{\nu}}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)} \right\} \right] \end{aligned}$$

Удовлетворив первое условие (2.85), получим

$$s(x, y, \tau)|_{\tau=0} = f_0(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \delta_k(x, y),$$

где $C_k = C_{2k} \frac{\pi \csc \nu \pi}{2\rho_k^\nu \Gamma(1-\nu)}$. Далее, воспользовавшись теоремой о разложении по собственным функциям задачи (2.91), найдём

$$C_k = f_{0k} = \iint_G f_0(x, y) \delta_k(x, y) dG.$$

Теперь, будем рассматривать задачу (2.89), (2.86). Функцию w будем искать, также в виде ряда (2.90), в котором функция $\Phi_k(z)$ является решением уравнения

$$\Phi_k'' + (2 + \lambda_k^2)z^q \Phi_k = 0,$$

соответствующим собственным значениям задачи (2.91). Функция Φ_k представляется формулой

$$\Phi_k(\tau) = \tau[A_{1k}J_\nu(2\rho_k\tau^{1/\nu}) + A_{2k}J_{-\nu}(2\rho_k\tau^{1/\nu})],$$

где A_{1k} и A_{2k} - произвольные постоянные, $\tau = \sqrt{z}$, $\nu = \frac{1}{q+2}$, $\rho_k = \frac{\sqrt{2+\lambda_k^2}}{q+2}$.

Тогда ряд (2.90) будет принимать следующий вид

$$w(x, y, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau \left[A_{1k}J_\nu \left(2\rho_k\tau^{\frac{1}{\nu}} \right) + A_{2k}J_{-\nu} \left(2\rho_k\tau^{\frac{1}{\nu}} \right) \right] \delta_k(x, y), \quad (2.94)$$

а первые два условия (2.86) примут вид

$$w(x, y, \tau)|_{\tau=0} = g_0(x, y), \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-1}w_\tau = 2h(x, y). \quad (2.95)$$

Сопоставляя ряд (2.94) с рядом (2.81), нетрудно заметить, что условия (2.95) выполняются, если коэффициенты ряда определить соотношениями

$$A_{1k} = \frac{1}{\sigma_{1k}} g_{0k} = \frac{1}{\sigma_{1k}} \iint_G g_0(x, y) \delta_k(x, y) dG,$$

$$A_{2k} = \frac{1}{\sigma_{2k}} h_k = \frac{1}{\sigma_{2k}} \iint_G h(x, y) \delta_k(x, y) dG.$$

Для функций $g_0 \in C^4(G)$, $h \in C^3(G)$ ряд (2.94) и ряды, полученные дифференцированием до второго порядка включительно, сходятся равномерно относительно $x, y \in \overline{G}$, $z > 0$ и сумма ряда (2.94) является классическим

решением задачи (2.89), (2.95). Полагая в (2.94) $\tau = \sqrt{z}$, получим решение задачи (2.89), (2.86).

Зная s и w , из третьего и второго уравнений системы (2.84) находим

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_{z_0}^z (z^q w_x - z^p s_y + z^q w - z^p s) dz + \phi(x, y), \quad z_0 > 0, \\ v(x, y, z) &= \int_{z_0}^z (z^q w_y + z^p s_x - z^q w - z^p s) dz + \psi(x, y). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Для того, чтобы выражения (2.96) удовлетворяли остальным уравнениям системы и граничному условию (2.87), функции $\phi(x, y), \psi(x, y)$ должны удовлетворят системе уравнений

$$\begin{aligned} \phi_x + \psi_y - \phi + \psi &= h(x, y), \\ \phi_y - \psi_x - \phi - \psi &= q(x, y) \end{aligned} \quad (2.97)$$

и граничному условию

$$(\alpha\phi + \beta\psi)|_{\Sigma} = \gamma, \quad (2.98)$$

где $h(x, y) = w_z|_{z=0}$, $q(x, y) = s_z|_{z=0}$.

Пусть функции $h(x, y), q(x, y) \in C_v^1(G)$. Введём обозначения

$$W(\zeta) = \phi + i\psi, \quad \zeta = y + ix, \quad a(\zeta) = \alpha + i\beta,$$

$$\partial_{\bar{\zeta}} = (\partial_y + i\partial_x)/2, \quad F(\zeta) = (q + ih)/2, \quad \mu = -(1 + i)/2.$$

Тогда систему (2.97) и граничное условие (2.98) можем записать в комплексной форме

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\zeta}} + \mu \bar{W}(\zeta) = F(\zeta), \quad (2.99)$$

$$Re[\bar{a}(\zeta)W(\zeta)]_{\Sigma} = \gamma(\zeta). \quad (2.100)$$

Таким образом, задача определения компонентов u и v решения системы (2.84) с граничным условием (2.87) сведена к обобщенной задаче Римана-Гильберта (2.99) - (2.100), которая как известно [14, с. 185], нётерова. Следовательно, имеет место следующий результат.

Теорема 2.10. *Задача VI нётерова и её индекс равен индексу функции $\bar{a}(\zeta) = \alpha - i\beta$ на границе G » [10-A].*

2.5.3. Пусть $\Omega = \{(x, y, z): x^2 + y^2 < a^2, 0 < z < h\}$ - круговой цилиндр радиуса a , с границей Γ и основанием G .

В области Ω рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} u_x + v_y - (x^2 + y^2)^p w_z &= 0, & s_x + w_y - v_z &= 0, \\ s_y - w_x + u_z &= 0, & s_z + v_x - u_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.101)$$

с характеристическим определителем

$$\chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)[\xi_1^2 + \xi_2^2 - (x^2 + y^2)^p \xi_3^2],$$

где p - произвольное вещественное число. Следовательно, система (2.101) во всех точках пространства R^3 является системой составного типа, за исключением точек оси Oz , в которых она вырождается.

Отметим, что в случае, когда система эллиптична в работе [88] исследована задача типа задачи Дирихле.

Для системы (2.101) рассмотрим

Задача VII. *Найти решение (s, u, v, w) системы (8) из класса $C^1(\Omega)$, удовлетворяющее условиям*

$$s|_{\Gamma} = f_1(x, y, z), \quad (2.102)$$

$$w|_{z=0} = g_1(x, y), \quad w_z|_{z=0} = g_2(x, y), \quad w|_{\Sigma} = 0, \quad (2.103)$$

$$v(x, y, 0)|_{\Gamma} = q(x, y), \quad (2.104)$$

где Σ - боковая поверхность цилиндра, γ - окружность $x^2 + y^2 = a^2$, $f_1 \in C(\Gamma)$, $g_1, g_2 \in C^2(\bar{G})$, $q \in C^1_v(\bar{G})$ причем $g_1|_\gamma = 0$.

Ищется решение в классе непрерывных в замкнутом цилиндре $\bar{\Omega}$ функций и ограниченное вблизи оси Oz .

Из системы (2.101) следуют соотношения вида

$$s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} = 0, \quad (2.105)$$

$$w_{xx} + w_{yy} - (x^2 + y^2)^p w_{zz} = 0. \quad (2.106)$$

Тогда, функция s определяется как решение задачи Дирихле (2.105), (2.102), которая имеет единственное решение для любой заданной непрерывной на Γ функции $f_1(x, y, z)$ [59, с. 324].

Для определения функции w будем решать смешанную задачу с условиями (2.103) для вырождающегося гиперболического уравнения (2.106). Решение будем искать в классе функций $C^2(\Omega \setminus Oz)$ и ограниченных при $x^2 + y^2 \rightarrow 0$.

Функцию w представляем в виде ряда

$$w(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(z) \beta_k(x, y),$$

где $\alpha_k(z)$ и β_k удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\alpha_k'' + \lambda_k^2 \alpha_k = 0, \quad (2.107)$$

$$\Delta \beta_k + \lambda_k^2 (x^2 + y^2)^p \beta_k = 0. \quad (2.108)$$

Общее решение уравнения (2.107) имеет вид

$$\alpha_k(z) = C_k^{(1)} \cos \lambda_k z + C_k^{(2)} \sin \lambda_k z.$$

Уравнение (2.108) запишем в полярных координатах (r, ϕ)

$$r^2 \beta_{rr} + r \beta_r + \beta_{\phi\phi} + \lambda_k^2 r^{2p+2} \beta = 0.$$

Применив метод разделения переменных, решение этого уравнения представим в виде

$$\beta(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \Phi_n(\phi),$$

где $R_n(r)$, $\Phi_n(\phi)$ соответственно удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_n'' + \nu_n \Phi_n = 0, \quad (2.109)$$

$$r^2 R_n'' + r R_n' + (\lambda_k^2 r^{2p+2} - \nu_n) R_n = 0. \quad (2.110)$$

Учитывая периодичность функций $\Phi_n(\phi)$, полагая $\nu_n = n^2$, получим решение уравнения (2.109) в виде

$$\Phi_n(\phi) = C_{nk}^{(3)} \cos n \phi + C_{nk}^{(4)} \sin n \phi.$$

Соответствующее таким значениям ν_n решение уравнения (2.110) имеет вид [34, с. 398]

$$R_n(r) = E_n J_{\frac{n}{p+1}} \left(\frac{\lambda_k r^{p+1}}{p+1} \right) + F_n J_{-\frac{n}{p+1}} \left(\frac{\lambda_k r^{p+1}}{p+1} \right), \quad (2.111)$$

где $J_m(r)$ - функция Бесселя первого рода, E_n, F_n - произвольные постоянные. Так как ищется решение задачи ограниченное при $r \rightarrow 0$, то в (2.111) положим $F_n = 0$. Тогда

$$R_n(r) = E_n J_{\frac{n}{p+1}} \left(\frac{\lambda_k r^{p+1}}{p+1} \right).$$

Выбирая $\lambda_k = \frac{\eta_k^{(n)}(p+1)}{a^{p+1}}$, где $\eta_k^{(n)}$ - один из положительных нулей функции Бесселя, получим четыре семейства частных решений уравнения (2.106):

$$J_{\frac{n}{p+1}} \left(\frac{\eta_k^{(n)} r^{p+1}}{a^{p+1}} \right) \cos n \phi \cos \frac{\eta_k^{(n)}(p+1)}{a^{p+1}} z,$$

$$J_{\frac{n}{p+1}} \left(\frac{\eta_k^{(n)} r^{p+1}}{a^{p+1}} \right) \cos n \phi \sin \frac{\eta_k^{(n)} (p+1)}{a^{p+1}} z, \quad n, k = 0, 1, \dots;$$

$$J_{\frac{n}{p+1}} \left(\frac{\eta_k^{(n)} r^{p+1}}{a^{p+1}} \right) \sin n \phi \cos \frac{\eta_k^{(n)} (p+1)}{a^{p+1}} z,$$

$$J_{\frac{n}{p+1}} \left(\frac{\eta_k^{(n)} r^{p+1}}{a^{p+1}} \right) \sin n \phi \sin \frac{\eta_k^{(n)} (p+1)}{a^{p+1}} z, \quad n = 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots,$$

которые обращаются в нуль на боковой поверхности цилиндра Ω , то есть выполняется условие $w|_{\Sigma} = 0$.

Представим функцию w в цилиндрических координатах

$$w(r, \phi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} J_{\frac{n}{p+1}} \left(\frac{\eta_k^{(n)} r^{p+1}}{a^{p+1}} \right) \left[\left(D_{nk}^{(1)} \cos n \phi + D_{nk}^{(2)} \sin n \phi \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \cos \frac{\eta_k^{(n)} (p+1)}{a^{p+1}} z + \left(D_{nk}^{(3)} \cos n \phi + D_{nk}^{(4)} \sin n \phi \right) \sin \frac{\eta_k^{(n)} (p+1)}{a^{p+1}} z \right]. \quad (2.112)$$

Коэффициенты ряда (2.112) определяются следующим образом. Пусть функции g_1 и g_2 такие, что $g_1, g_2 \in C^2(\bar{G})$ и обращаются в нуль на границе γ основания цилиндра Ω . Тогда их можно разложить в равномерно и абсолютно сходящиеся в $\bar{G}$ ряды Фурье.

Удовлетворяя первое условие (2.103), получим

$$w|_{z=0} = g_1(r, \phi) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} J_{\frac{n}{p+1}} \left(\frac{\eta_k^{(n)} r^{p+1}}{a^{p+1}} \right) \left(D_{nk}^{(1)} \cos n \phi + D_{nk}^{(2)} \sin n \phi \right), \quad (2.113)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
D_{0k}^{(1)} &= \frac{1}{\pi \|J_0\|^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} g_1(r, \phi) r^{2p+1} J_0 \left(\frac{\eta_k^{(0)} r^{p+1}}{a^{p+1}} \right) d\phi dr, \\
D_{nk}^{(1)} &= \frac{1}{\pi \|J_n\|^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} g_1(r, \phi) r^{2p+1} J_{\frac{n}{p+1}} \left(\frac{\eta_k^{(n)} r^{p+1}}{a^{p+1}} \right) \cos n\phi d\phi dr, \\
D_{nk}^{(2)} &= \frac{1}{\pi \|J_n\|^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} g_1(r, \phi) r^{2p+1} J_{\frac{n}{p+1}} \left(\frac{\eta_k^{(n)} r^{p+1}}{a^{p+1}} \right) \sin n\phi d\phi dr,
\end{aligned} \tag{2.114}$$

где

$$\|J_0\|^2 = \frac{a^{2(p+1)}}{2(p+1)} [J'_{\frac{n}{p+1}}(\eta_k^{(n)})]^2, \quad \|J_n\|^2 = \frac{a^{2(p+1)}}{p+1} [J_1(\eta_k^{(0)})]^2$$

Теперь удовлетворим второе условие (2.103):

$$\begin{aligned}
w_z|_{z=0} &= g_2(r, \phi) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} J_{\frac{n}{p+1}} \left(\frac{\eta_k^{(n)} r^{p+1}}{a^{p+1}} \right) \frac{a^{p+1}}{(p+1)\eta_k^{(n)}} (D_{nk}^{(3)} \cos n\phi + D_{nk}^{(4)} \sin n\phi). \tag{2.115}
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
D_{0k}^{(3)} &= \frac{1}{\pi \|J_0\|^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} g_2(r, \phi) r^{2p+1} J_0 \left(\frac{\eta_k^{(0)} r^{p+1}}{a^{p+1}} \right) d\phi dr, \\
D_{nk}^{(3)} &= \frac{1}{\pi \|J_m\|^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} g_2(r, \phi) r^{2p+1} J_{\frac{n}{p+1}} \left(\frac{\eta_k^{(n)} r^{p+1}}{a^{p+1}} \right) \cos n\phi d\phi dr, \\
D_{nk}^{(4)} &= \frac{1}{\pi \|J_m\|^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} g_2(r, \phi) r^{2p+1} J_{\frac{n}{p+1}} \left(\frac{\eta_k^{(n)} r^{p+1}}{a^{p+1}} \right) \sin n\phi d\phi dr,
\end{aligned} \tag{2.116}$$

где

$$\|J_m\|^2 = \frac{a^{3(p+1)}}{2\eta_k^{(n)}(p+1)^2} [J'_{\frac{n}{p+1}}(\eta_k^{(n)})]^2, \quad \|J_0\|^2 = \frac{a^{3(p+1)}}{\eta_k^{(0)}(p+1)^2} [J_1(\eta_k^{(0)})]^2.$$

Сходимость ряда (2.112), коэффициенты которого даются формулами (2.114), (2.116) доказывается следующим образом. Пусть ряд (2.112) имеет вид

$$w(r, \phi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [G_{nk}(r, \phi) \cos \lambda_k z + H_{nk}(r, \phi) \sin \lambda_k z]. \quad (2.117)$$

Так как $\cos \lambda_k z, \sin \lambda_k z$ ограниченные функции при любых z , то имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |G_{nk}(r, \phi) \cos \lambda_k z| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |G_{nk}(r, \phi)|, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |H_{nk}(r, \phi) \sin \lambda_k z| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |H_{nk}(r, \phi)|. \end{aligned}$$

Ряды стоящие справа сходятся в силу абсолютной и равномерной сходимости рядов (2.113), (2.115), тогда по критерию Вейерштрасса абсолютно и равномерно сходится в $\overline{\Omega}$ ряд (2.117), а следовательно, и ряд (2.112).

Таким образом, функции s и w определены в явном виде. По известным s и w определим функции u и v аналогично как в случае задачи **I** в виде (2.53), в котором произвольные функции $\phi(x, y), \psi(x, y)$ должны удовлетворять системе

$$\phi_x + \psi_y = \alpha, \quad \psi_x - \phi_y = \beta,$$

где $\alpha = \lim_{z \rightarrow 0} (x^2 + y^2)^p w_z$, $\beta = -\lim_{z \rightarrow 0} s_z$. Записав эту систему в комплексной форме, приходим к уравнению (2.55)

$$\partial_{\bar{\zeta}} U = F,$$

решение которого имеет вид

$$U(\zeta) = \Phi(\zeta) + T_G F, \quad (2.118)$$

где $T_G F = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{F(t)}{t-\zeta} d\zeta d\eta$, а $\Phi(\zeta)$ - произвольная аналитическая в G и непрерывная в $\bar{G}$ функция.

Используя граничное условие (2.104), для определения $\Phi(\zeta)$ получим

$$v(x, y, z)|_\gamma = \psi(x, y)|_\gamma = \operatorname{Re}[U]|_\gamma = q(x, y),$$

или с учётом (2.118)

$$\operatorname{Re}[\Phi]|_\gamma = \operatorname{Re}[U - T_G F]|_\gamma = q(x, y) - \operatorname{Re}[T_G F]|_\gamma.$$

как частный случай задачи Римана-Гильберта [14, с. 170].

Следовательно, $\Phi(\zeta)$ определяется, как аналитическая функция с точностью до произвольного мнимого постоянного слагаемого, входящего в функции $u(x, y, z)$. Таким образом, справедлива следующая теорема

Теорема 2.11. *Задача VII в круговом цилиндре Ω всегда разрешима и её решение находится с точностью до произвольного постоянного слагаемого, входящего в функции $u(x, y, z)$.*

Замечание 2.3 - Условие (2.104) можно заменить аналогичным условием на функцию $u(x, y, z)$, тогда произвольная постоянная будет входить в функцию $v(x, y, z)$.

2.5.4. Пусть $\Omega = \{(x, y, z): (x, y) \in G \subset R^2, 0 < z < \gamma(x, y)\}$ – ограниченная односвязная область пространства R^3 , где G – участок плоскости $z = 0$ и $\gamma \in C^1(G)$ – поверхность Ляпунова. С помощью $\Gamma = \gamma \cup G$ обозначим всю границу области Ω , а через $\Sigma = \gamma \cap G$ – линию пересечения поверхности γ и участка G .

Для системы (2.84) в описанной области Ω рассмотрим следующую задачу.

Задача VIII. *Найти регулярное в области Ω решение (s, u, v, w) системы (2.84), удовлетворяющее условиям*

$$s(x, y, z)|_\Gamma = b_4(x, y, z), \quad (2.119)$$

$$w(x, y, z)|_{z=0} = \tilde{b}_5(x, y), \quad w_z(x, y, z)|_{z=0} = \tilde{b}_6(x, y), \quad (2.120)$$

$$(\alpha u + \beta v)|_\Sigma = g(x, y), \quad (2.121)$$

где $b_4, \tilde{b}_5, \tilde{b}_6$ - заданные достаточно гладкие функции, $\alpha, \beta, g \in C_v(\Sigma)$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Для определения функции s необходимо решать задачу Дирихле с условием (2.119) для уравнения (2.88), а для определения функции w - задачу Коши с начальными данными (2.120) для уравнения (2.89).

Покажем, что задача Дирихле (2.119) для уравнения (2.88), имеет единственное решение. Построим возрастающую последовательность областей Ω_n с гладкой границей таких, что $\Omega_n \subset \Omega$. Граница Γ_n области Ω_n состоит из трёх частей: $\Gamma_n^1 = \{(x, y, z): (x, y, z) \in \gamma, z \geq \frac{2}{n}\}$, Γ_n^2 - пересечение плоскости $z = \frac{1}{n}$ и области $\bar{\Omega}$, Γ_n^3 - часть, гладко соединяющая Γ_n^1 и Γ_n^2 .

Пусть

$$f_n(x, y, z) = \begin{cases} b_4(x, y, z) & \text{при } (x, y, z) \in \Gamma_n^1; \\ g_n(x, y, z) & \text{при } (x, y, z) \in \Gamma_n^2 \cup \Gamma_n^3, \end{cases}$$

здесь g_n такая гладкая функция, что $|g_n(x, y, z) - b_4(x, y, 0)| < 1/n$ и f_n гладкая в Γ . Уравнение (2.88) эллиплично в Ω_n и в нём коэффициент при искомой функции отрицательный, поэтому в силу известной теоремы (см. [7, с. 161]) для этого уравнения задача Дирихле $s|_{\Gamma_n} = f_n$ имеет не более одного решения. Разрешимость этой задачи следует из теорем о задаче Дирихле для эллиптических уравнений (см., [42, с. 150]), причём для решения $s_n(x, y, z)$ справедлива оценка

$$\|s_n\|_{C_\alpha^2(\Omega_n)} \leq M \|f_n\|_{C_\alpha^2(\Gamma_n)},$$

где M - постоянная. Для достаточно больших n имеем очевидное неравенство $\|f_n\|_{C_\alpha^2(\Gamma_n)} \leq \|b_n\|_{C_\alpha^2(\Gamma_n)} + 1$ и поэтому

$$\|s_n\|_{C_\alpha^2(\Omega_n)} \leq M_1 (\|b_n\|_{C_\alpha^2(\Gamma_n)} + 1).$$

Так как Ω_n исчерпывают Ω , то из последнего неравенства следует, что последовательность $\{s_n\}$ и её производные до второго порядка равномерно

сходятся. Тогда предельная функция $s_0(x, y, z)$ будет решением уравнения (2.88) и так как $f_n \rightrightarrows b_4$, то $s_0|_\Gamma = b_4$.

Таким образом, компонента s решения системы (2.84) определяется однозначно.

Теперь, будем решать задачу Коши (2.89), (2.120). Введя вместо z переменную

$$t = (1 - a)z^{\frac{1}{1-a}} \quad (a = \frac{p}{2+p} < 1),$$

уравнение (2.89) преобразуем к виду

$$w_{tt} - (w_{xx} + w_{yy}) + \frac{a}{t} w_t + 2w = 0, \quad (2.122)$$

а условия (2.120) - к условиям

$$w(x, y, t)|_{t=0} = \tilde{b}_5(x, y), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t}{1-a} \right)^a w_t = \tilde{b}_6(x, y). \quad (2.123)$$

Задача Коши (2.122) - (2.123), где функции $\tilde{b}_5(x, y), \tilde{b}_6(x, y)$ имеют непрерывные производные до второго порядка, поставлена корректно при $z > 0$ внутри характеристического коноида $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (t - \zeta)^2$ [35].

Возьмем характеристический коноид, целиком содержащийся в области Ω и положим

$$b_5(x, y) = \begin{cases} \tilde{b}_5(x, y) & \text{при } (x, y) \in \overline{G}, \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin \overline{G}, \end{cases}$$

$$b_6(x, y) = \begin{cases} \tilde{b}_6(x, y) & \text{при } (x, y) \in \overline{G}, \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin \overline{G}. \end{cases}$$

Будем искать решение уравнения (2.122) в виде $w = T(r)$, где

$$r = \sqrt{t^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}.$$

Тогда для $T(r)$ получим уравнение Бесселя

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2+a}{r} \frac{dT}{dr} + 2T = 0,$$

одним из решений которого будет

$$w_1 = T_1(r) = r^{-\frac{a+1}{2}} J_{-\frac{1+a}{2}}(\sqrt{2}r).$$

Воспользуемся теперь следующим свойством уравнения (2.122): если $w(a, x, y, t)$ - интеграл этого уравнения, то решением его будет также функция $t^{1-a}w(2-a, x, y, t)$, и в качестве второго решения этого уравнения возьмём

$$w_2 = T_2(r) = t^{1-a} r^{-\frac{3-a}{2}} J_{-\frac{3-a}{2}}(\sqrt{2}r).$$

Уравнению (2.122) удовлетворяет также и выражение

$$\begin{aligned} w(x, y, t) = & \iint_B \frac{\Psi(\xi, \eta)}{r^{1+a}} \bar{J}_{-\frac{1+a}{2}}(\sqrt{2}r) d\xi d\eta + \\ & + t^{1-a*} \iint_B \frac{\Phi(\xi, \eta)}{r^{3-a}} \bar{J}_{-\frac{3-a}{2}}(\sqrt{2}r) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (2.124)$$

где $\Psi(\xi, \eta), \Phi(\xi, \eta) \in C^2(G)$ - произвольные функции, B - круг с центром в точке (x, y) и радиусом t ,

$$\bar{J}_{-\nu}(t) = \frac{\Gamma(1-\nu)t^\nu}{2^\nu} J_{-\nu}(t),$$

а символ $*$ означает конечную часть интеграла, перед которым он стоит. Для вычисления этого значения введём полярные координаты (ρ, θ) :

$$\xi - x = t\rho \cos \theta, \quad \eta - y = t\rho \sin \theta, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (2.125)$$

Обозначим через $\bar{\Phi} = \Phi(\xi_0, \eta_0) = \Phi(\rho, \theta, t)|_{\rho=1}$. Формулу (2.124)

перепишем в виде

$$\begin{aligned}
w(x, y, t) = & \iint_B \frac{\Psi(\xi, \eta)}{r^{1+a}} \bar{J}_{-\frac{1+a}{2}}(\sqrt{2}r) d\xi d\eta + \\
& + t^{1-a} \iint_B \frac{\Phi(\xi, \eta) \bar{J}_{-\frac{3-a}{2}}(\sqrt{2}r) - \bar{\Phi}}{r^{3-a}} d\xi d\eta + t^{1-a*} \iint_B \frac{\bar{\Phi}}{r^{3-a}} d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{2.126}$$

В силу условий, наложенных на Φ

$$|\Phi(\xi, \eta) - \bar{\Phi}| \leq C \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2} = Ct(1 - \rho),$$

где C - некоторая постоянная. Следовательно, второй интеграл в формуле (2.126) сходится. Конечную часть третьего интеграла легко вычислить, если перейти в нём к полярным координатам (2.125)

$$t^{1-a*} \iint_B \frac{\bar{\Phi}}{r^{3-a}} d\xi d\eta = \frac{1}{a-1} \int_0^{2\pi} \Phi(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) d\theta. \tag{2.127}$$

Подставляя (2.127) в (2.126) и используя начальные условия (2.123), определим $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ в виде

$$\Phi(x, y) = \frac{a-1}{2\pi} b_5(x, y), \quad \Psi(x, y) = \frac{(a-1)^a}{2\pi} b_6(x, y).$$

Следовательно, решение задачи Коши (2.122) - (2.123) получится в виде

$$\begin{aligned}
w = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b_5(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) d\theta - \\
& - \frac{1-a}{2\pi} t^{1-a} \iint_B \frac{b_5(\xi, \eta) \bar{J}_{-\frac{3-a}{2}}(\sqrt{2}r) - \bar{b}_5}{r^{3-a}} d\xi d\eta - \\
& - \frac{(1-a)^a}{2\pi} \iint_B \frac{b_6(\xi, \eta)}{r^{1+a}} \bar{J}_{-\frac{1+a}{2}}(\sqrt{2}r) d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Пологая здесь $t = (1-a)z^{1/(1-a)}$, получим решение задачи (2.89), (2.120).

Далее, по известным s и w определим функции u и v , также как в случае задачи VI. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.12. *Задача VIII для системы (2.84) нётерова и её индекс равен индексу функции $\bar{\alpha}(\zeta) = \alpha(\zeta) - i\beta(\zeta)$ на границе области G .*

Замечание 2.4 – Аналогичный результат можно получить для следующих систем уравнений

$$\begin{aligned} w_z - u_x - v_y + u - v &= 0, & v_z - z^p s_x - w_y + z^p s + w &= 0, \\ u_z + z^p s_y - w_x + z^p s - w &= 0, & s_z + v_x - u_y + u + v &= 0, \end{aligned} \quad (2.128)$$

$$\begin{aligned} w_z - u_x - v_y + u - v &= 0, & v_z - s_x - z^q w_y + s + z^q w &= 0, \\ u_z + s_y - z^q w_x + s - z^q w &= 0, & s_z + v_x - u_y + u + v &= 0, \end{aligned} \quad (2.129)$$

из которых относительно компонентов $s(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ решения получим соответствующие уравнения

$$w_{zz} - w_{xx} - w_{yy} + 2w = 0, \quad s_{zz} + z^p(s_{xx} + s_{yy}) - 2z^p s = 0, \quad (2.130)$$

$$s_{zz} + s_{xx} + s_{yy} - 2s = 0, \quad w_{zz} - z^q(w_{xx} + w_{yy}) + 2z^q w = 0. \quad (2.131)$$

Остальные компоненты $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ решения определяются соотношениями

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^z (w_x - z^p s_y + w - z^p s) dz + \phi(x, y), \\ v(x, y, z) &= \int_0^z (w_y + z^p s_x - w - z^p s) dz + \psi(x, y), \\ \phi_x + \psi_y - \phi + \psi &= w_z|_{z=0}, \quad \phi_y - \psi_x - \phi - \psi = s_z|_{z=0}, \end{aligned}$$

соответственно

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^z (z^q w_x - s_y + z^q w - s) dz + \phi(x, y), \\ v(x, y, z) &= \int_0^z (z^q w_y + s_x - z^q w - s) dz + \psi(x, y), \\ \phi_x + \psi_y - \phi + \psi &= w_z|_{z=0}, \quad \phi_y - \psi_x - \phi - \psi = s_z|_{z=0}. \end{aligned}$$

2.5.5. По аналогии с [84, с. 174] для системы (2.42) рассмотрим начально – краевую задачу. «Пусть область Ω является характеристическим конусом с основанием G , представляющим собой ограниченную область плоскости $z = 0$.

Задача IX. Найти в конусе Ω решение системы (2.42), удовлетворяющее граничным условиям

$$s(x, y, z)|_{\partial\Omega} = f(x, y, z), \quad (2.132)$$

$$u(x, y, z)|_{\partial G} = h(x, y) \quad (\text{или} \quad v(x, y, z)|_{\partial G} = h), \quad (2.133)$$

и начальным условиям

$$w(x, y, z)|_{z=0} = \eta(x, y), \quad w_z(x, y, z)|_{z=0} = \sigma(x, y), \quad (2.134)$$

где заданные функции $f \in C(\partial\Omega)$, $h \in C^1(\overline{G})$, $\eta, \sigma \in C^2(G)$ » [84, с. 174].

Для функций s и w имеем соотношения $\Delta s = 0$ и

$$w_{xx} + w_{yy} - z^p w_{zz} - pz^{p-1} w_z = 0. \quad (2.135)$$

Функция s снова определяется однозначно как решение задачи Дирихле (2.132) для уравнения Лапласа в Ω .

Функцию w определим решая задачу Коши с условиями (2.134) для уравнения (2.135), которое заменой независимой переменной

$$t = (1 - a)z^{\frac{1}{1-a}}, \quad (a = \frac{p}{p-2} < 1)$$

приводится к задаче

$$w_{xx} + w_{yy} - w_{tt} - \frac{a}{t} w_t = 0, \quad (2.136)$$

$$w(x, y, t)_{t=0} = \eta(x, y), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t}{1-a} \right)^a w_t = \sigma(x, y). \quad (2.137)$$

Областью зависимости для точки $M(x_0, y_0, t_0) \in \Omega$ является характеристический конус, т. е. значение $w(M)$ однозначно определяется условиями (2.137), заданными в круге B , который высекается этим конусом на плоскости $t = 0$. Ввиду этого для простоты ограничимся случаем, когда область G является некоторым кругом B .

Следуя [35], решение уравнения (2.136) будем искать в виде $w = T(r)$, где

$$r = \sqrt{t^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}.$$

Тогда для $T(r)$ получим уравнение

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2+a}{r} \frac{dT}{dr} = 0,$$

частные решения которого представляются в виде

$$w_1 = T_1 = r^{-a-1}, \quad w_2 = T_2 = t^{1-a} r^{a-3}.$$

Уравнению (2.136) удовлетворяет также и выражение

$$w(x, y, t) = \iint_B \frac{\Psi(\xi, \eta)}{r^{1+a}} d\xi d\eta + t^{1-a*} \iint_B \frac{\Phi(\xi, \eta)}{r^{3-a}} d\xi d\eta,$$

где $\Psi(\xi, \eta), \Phi(\xi, \eta) \in C^2(G)$ - произвольные функции, а символ $*$ означает конечную часть интеграла, перед которым он стоит.

Используя схему вычисления интеграла (2.124) при решении задачи (2.122) - (2.123), и определив затем функции $\Psi(\xi, \eta)$ и $\Phi(\xi, \eta)$ из начальных данных (2.137), получим решение задачи Коши (2.136), (2.137) в виде

$$\begin{aligned} w(x, y, t) = & \frac{(1-a)^a}{2\pi} \iint_B \frac{\sigma(\xi, \eta)}{r^{1+a}} d\xi d\eta - \frac{1-a}{2\pi} t^{1-a} \iint_B \frac{\eta(\xi, \eta) - \bar{\eta}}{r^{3-a}} d\xi d\eta + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменной z , получим решение задачи (2.135), (2.134).

Теперь, по известным s и w функции $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ определим аналогично как в случае задачи VII. Справедлива следующая

Теорема 2.13. *Задача IX разрешима, причем решение определяется с точностью до произвольной постоянной, входящей в функции $v(x, y, z)$ (или в $u(x, y, z)$).*

ГЛАВА 3

ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ НЕКЛАССИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ ЧЕТЫРЁХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этой главе мы займёмся исследованием граничных задач для четырёхмерных аналогов неклассических систем, рассмотренных во второй главе.

В начале рассмотрим систему

$$\begin{aligned} s_t - u_x - v_y + w_z &= 0, \\ s_x + u_t - v_z + w_y &= 0, \\ s_y + u_z + v_t - w_x &= 0, \\ s_z - u_y + v_x + w_t &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Система (3.1) имеет характеристический определитель вида

$$\chi(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)(\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2).$$

Следовательно, эта система неклассического (составного) типа, обладающей двумя семействами вещественных характеристик, представленных семействами конусов

$$\sqrt{t^2 + x^2 + y^2} - z = \text{const}, \quad \sqrt{t^2 + x^2 + y^2} + z = \text{const}.$$

Аналогично, исходя из системы (2.31), получаем систему

$$\begin{aligned} s_t - au_x - bu_y - bv_x - cv_y - Aw_z &= 0, \\ s_x + u_t - v_z + w_y &= 0, \\ s_y + u_z + v_t - w_x &= 0, \\ s_z - u_y + v_x + w_t &= 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

характеристическая форма которой имеет следующий вид

$$\chi(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)(\xi_0^2 + a\xi_1^2 + 2b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2 + A\xi_3^2).$$

Отсюда, система (3.2) является системой составного типа тогда и только тогда, когда уравнение

$$U_{tt} + aU_{xx} + 2bU_{xy} + cU_{yy} + AU_{zz} = 0 \quad (3.3)$$

гиперболического типа.

Если $U(t, x, y, z)$ - любое решение уравнения (3.3), то всякий вектор вида $(-U_t, U_x, U_y, U_z)$ удовлетворяет системе (3.2), поэтому (3.2) естественно считать обобщением (3.1), а следовательно, четырёхмерным обобщением системы (2.26).

В этой главе также, изучается некоторый класс неклассических систем уравнений в частных производных первого порядка, имеющих связь с системой уравнений теории векторных полей

$$\operatorname{div} U(X) = 0, \quad \operatorname{rot} U(X) = 0, \quad (3.4)$$

которой удовлетворяет градиент гармонической функции трёх независимых переменных, где $U(X) = (u, v, w)$ - искомая вектор-функция переменной $X \in R^3$.

Система (3.4), хотя и является переопределённой системой уравнений, иногда рассматривается как простейшая эллиптическая система уравнений первого порядка, обобщающая систему уравнений Коши-Римана в пространстве R^3 .

Запишем систему (3.4) в развёрнутом виде

$$\begin{aligned} u_x + v_y + w_z &= 0, & v_z - w_y &= 0, \\ u_z - w_x &= 0, & u_y - v_x &= 0. \end{aligned}$$

Вычёркивая одно из уравнений этой системы, получим неклассическую (составную) систему

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad u_y - v_x = 0, \quad u_z - w_x = 0, \quad (3.5)$$

являющуюся трёхмерным аналогом более общей двумерной системы первого порядка, для которой в работе А. Джураева [21] построена соответствующая теория краевых задач в ограниченных областях плоскости переменных x, y .

Обобщением системы (3.4) на пространство R^n относительно вектор-функции $U(X) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ является переопределённая система

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (3.6)$$

Аналогично системе (3.5), если из переопределённой системы (3.6) вычеркивать "лишние" уравнения, то получится следующая определённая система n уравнений в R^n относительно n неизвестных функций $u_1, u_2, \dots, u_n$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{2, n}, \quad (3.7)$$

характеристическая форма которой имеет вид

$$\chi = \xi_1^{n-2} |\xi|^2, \quad |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2,$$

следовательно, эта система при $n \geq 3$ в каждой точке пространстве R^n является составной системой. При $n = 2$ система эллиптическая. Системы (3.5) и (3.7) рассматривались многими авторами (см. например, [24], [79], [105] и имеющуюся там библиографию).

Далее, если ввести ещё одну искомую функцию $s(x, y, z)$, добавив к второму уравнению системы (3.4) слагаемое *grads*, получим определённую систему

$$\begin{aligned} \operatorname{div} U &= 0, \\ \operatorname{grad} s + \operatorname{rot} U &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

которая называется системой Моисила-Теодореску (см. [23, с. 328])

Исследованию системы (3.8) посвящено много работ, как отечественных так и зарубежных авторов (см. например, [24], [113] – [116] и имеющуюся там библиографию). В работе [79] Д.Х. Сафаровым рассматривалась обобщённая система уравнений Моисила-Теодореску с сингулярными коэффициентами при

младших членах и найдены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Дирихле для этой системы.

Другой важной и ещё менее исследованной системой является система [84, с. 256]:

$$\begin{aligned} s_t + \operatorname{div} U &= 0, \\ \operatorname{grad} s + U_t - \operatorname{rot} U &= 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $U(t, X) = (u, v, w)$, $s(t, X)$ – искомые вектор и скалярная функции соответственно, операции div , grad , rot рассматривается по переменной $X \in R^3$.

Характеристическая форма системы (3.9) имеет вид

$$\chi(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_0^2 + |\xi|^2)(\xi_0^2 - |\xi|^2), \quad |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2.$$

Следовательно, система (3.9) в каждой точке пространстве R^4 является неклассической (составной) системой.

§3.1. Задачи в полупространстве

3.1.1. Всюду в дальнейшем под регулярным решением систем будем понимать решение из класса $C^2(\Omega)$.

В полупространстве $R_+^4 = \{(t, x, y, z): (t, x, y) \in R^3, z > 0\}$ с границей $\Gamma = \{z = 0\}$ рассмотрим задачу

Задача X. Найти решение (s, u, v, w) системы (3.1) из класса $C^1(R_+^4)$, удовлетворяющее условиям

$$w(t, x, y, z)|_{z=0} = f(t, x, y), \quad w_z(t, x, y, z)|_{z=0} = g(t, x, y), \quad (3.10)$$

$$s(t, x, y, z)|_{z=0} = h_1(t, x, y), \quad (3.11)$$

$$u(t, x, y, z)|_{z=0} = h_2(t, x, y), \quad (3.12)$$

$$v(t, x, y, z)|_{z=0} = h_3(t, x, y), \quad (3.13)$$

где заданные на Γ функции $f(t, x, y) \in C^3(\Gamma)$, $g(t, x, y) \in C^2(\Gamma)$, а функции $h_1(t, x, y), h_2(t, x, y), h_3(t, x, y) \in C(\Gamma)$.

Следующая система дифференциальных уравнений второго порядка является следствием системы (3.1)

$$\begin{aligned} w_{tt} + w_{xx} + w_{yy} - w_{zz} &= 0, \\ \Delta s + 2w_{tz} &= 0, \\ \Delta u - 2w_{xz} &= 0, \\ \Delta v - 2w_{yz} &= 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где Δ - оператор Лапласа по всем переменным.

Таким образом, для определения компоненты w решения системы (3.1) рассмотрим задачу Коши с условиями (3.10) для первого уравнения системы (3.14), а для определения компонентов s , u и v решения - задачу Дирихле с соответствующими граничными условиями (3.11), (3.12) и (3.13) для остальных уравнений системы (3.14).

Как известно [89, с. 549], решение задачи Коши (3.10) для волнового уравнения представляется формулой Кирхгофа

$$w(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi z} \iiint_{|\xi| < z} g(\xi) d\sigma + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{4\pi z} \iint_{|\xi|=z} f(\xi) ds \right], \quad (3.15)$$

где $\xi = (t, x, y)$, $d\sigma$ - элемент объёма, ds - элемент площади.

Теперь введём следующие обозначения: $l_1(t, x, y, z) = -2w_{tz}$, $l_2(t, x, y, z) = 2w_{xz}$, $l_3(t, x, y, z) = 2w_{yz}$, $U = (s, u, v)$, $l = (l_1, l_2, l_3)$, $h = (h_1, h_2, h_3)$. Тогда для определения вектор-функции $U = (s, u, v)$ получим задачу Дирихле $U|_{z=0} = h$ для уравнения Пуассона

$$\Delta U = l(t, x, y, z).$$

Решение этой задачи единственно и имеет вид [1, с. 110]:

$$U(M_0) = \frac{2}{\omega} \iiint_{R^3} \frac{z_0 h(t, x, y) dt dx dy}{[(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^2} + \quad (3.16)$$

$$+ \iiint_{R^3} \int_0^\infty G(M, M_0) l(t, x, y, z) dt dx dy dz,$$

где $G(M, M_0)$ - функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве R_+^4 , ω - площадь поверхности единичной сферы в R^3 .

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Задача X для системы (3.1) в полупространстве R_+^4 всегда разрешима и имеет единственное решение, представляемое в явном виде формулами (3.15) и (3.16).*

3.1.2. Пусть теперь в системе (3.2) $a = c = 1$, $b = 0$, $A = -z^{-m}$, где $m < -2$. Тогда получим систему

$$\begin{aligned} z^m(s_t - u_x - v_y) + w_z &= 0, \\ s_x + u_t - v_z + w_y &= 0, \\ s_y + u_z + v_t - w_x &= 0, \\ s_z - u_y + v_x + w_t &= 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

с характеристическим определителем

$$\chi(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)(z^m[\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2] - \xi_3^2).$$

Следовательно, система (3.17) в каждой точке полупространства R_+^4 является системой составного (неклассического) типа.

Из системы (3.17) получаются следующие соотношения

$$\begin{aligned} w_{tt} + w_{xx} + w_{yy} - \partial_z(z^{-m}w_z) &= 0, \\ \Delta s + (1 + z^{-m})w_{tz} &= 0, \\ \Delta u - (1 + z^{-m})w_{xz} &= 0, \\ \Delta v - (1 + z^{-m})w_{yz} &= 0, \end{aligned} \tag{3.18}$$

где Δ - оператор Лапласа по переменным t, x, y, z . Систему (3.18) перепишем в следующем виде

$$\begin{aligned} w_{tt} + w_{xx} + w_{yy} - \partial_z(z^{-m}w_z) &= 0, \\ \Delta U &= l(t, x, y, z), \end{aligned} \tag{3.19}$$

где $U = (s, u, v)$, $l = (l_1, l_2, l_3)$, $l_1 = -(1 + z^{-m})w_{tz}$, $l_2 = (1 + z^{-m})w_{xz}$, $l_3 = (1 + z^{-m})w_{yz}$. В двугранном угле $E: \{y > 0, z > 0\}$ [45] рассмотрим задачу

Задача XI. Найти решение (s, u, v, w) системы (3.17) из класса $C^1(E)$, убывающее на бесконечности и удовлетворяющее условиям

$$k \lim_{z \rightarrow 0} z^{-(1+m)} w(t, x, y, z) = \tilde{f}(t, x, y), \quad (3.20)$$

$$w(t, x, y, z)|_{y=0} = g(t, x, z), \quad w_y(t, x, y, z)|_{y=0} = h(t, x, z), \quad (3.21)$$

$$U(t, x, y, z)|_{z=0} = b(t, x, y), \quad (3.22)$$

где $\tilde{f}(t, x, y) \in C^1(\Gamma)$, $g(t, x, z) \in C^3(\Gamma')$, $h(t, x, z) \in C^2(\Gamma')$, $b(t, x, y) \in C(\Gamma)$, а $k = \left(\frac{2+m}{2}\right)^{\frac{2m+2}{m+2}}$, $\Gamma = \{z = 0\}$, $\Gamma' = \{y = 0\}$.

Введя переменную

$$\tau = (1 - a)z^{\frac{1}{1-a}}, \quad (a = \frac{m}{m+2}),$$

увидим, что функция w удовлетворяет уравнению

$$w_{tt} + w_{xx} + w_{yy} - w_{\tau\tau} + \frac{a}{\tau} w_{\tau} = 0, \quad (3.23)$$

решение которого представляется в виде [61, с. 156]

$$w(M, \tau) = \tau^{1+a} [\Pi_{2+a}(\omega) + \Phi_{2+a}(f_0)], \quad (3.24)$$

где

$$\Phi_{\mu} = \frac{1}{\Lambda_a} \int_{|\xi| < 1} \frac{f_0(\zeta + \xi\tau) d\xi}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{3+a}{2}}}, \quad \Lambda_a = \int_{|\xi| < 1} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{3+a}{2}} d\xi, \quad \zeta = (t, x, y),$$

$$\Pi_{\mu}(\omega) = \frac{1}{B\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}\right)} \int_0^1 \frac{\omega(\zeta, \tau(1 - 2\sigma)) d\sigma}{[\sigma(1 - \sigma)]^{1-\frac{\mu}{2}}},$$

$\omega(\zeta, \tau)$ - чётное по τ решение волнового уравнения $\square\omega = 0$.

Используя условие (3.20), из (3.24) получим, что $f_0(M) = \tilde{f}(M)$. Продолжим функцию $\tilde{f}(M)$ следующим образом:

$$f(M) = \begin{cases} \tilde{f}(M) & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Учитывая это значение функции f и условия (3.21), имеем

$$\begin{aligned} w(\zeta, \tau)|_{y=0} &= \tau^{1+a} [\Pi_{2+a}(\omega|_{y=0}) + \Phi_{2+a}(f)|_{y=0}] = g(t, x, \tau), \\ w_y(\zeta, \tau)|_{y=0} &= \tau^{1+a} \left[\Pi_{2+a} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_{2+a}(f)) \Big|_{y=0} \right] = h(t, x, \tau). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Pi_{2+a}(\omega|_{y=0}) &= \tau^{-(1+a)} g(t, x, \tau) - \Phi_{2+a}(f)|_{y=0} \equiv G(t, x, \tau), \\ \Pi_{2+a} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) &= \tau^{-(1+a)} h(t, x, \tau) - \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_{2+a}(f)) \Big|_{y=0} \equiv H(t, x, \tau). \end{aligned}$$

На основании обращения интегрального выражения $\Pi_{2+a}(\omega)$ (см. [61, с. 17]) будем иметь

$$\omega|_{y=0} = [\Pi_{2+a}]^{-1}(G(t, x, \tau)), \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{y=0} = [\Pi_{2+a}]^{-1}(H(t, x, \tau)). \quad (3.26)$$

Теперь решая задачу Коши с условиями (3.25), (3.26) для волнового уравнения $\square \omega = 0$, находим функцию $\omega(\zeta, \tau)$.

Таким образом, решение уравнения (3.23), удовлетворяющее условиям (3.20)-(3.21) представляется в виде

$$w(\zeta, \tau) = \tau^{1+a} [\Pi_{2+a}(\omega) + \Phi_{2+a}(f)],$$

или

$$w(t, x, y, z) = \frac{1}{k} z^{m+1} [\Pi_\mu(\omega) + \Phi_\mu(f)], \quad (3.27)$$

где $\mu = \frac{3m+4}{m+2}$.

Зная функцию w , тем самым мы определим правую часть $l(\zeta, z)$ второго уравнения системы (3.19). Тогда решение уравнения $\Delta U = l(\zeta, z)$, удовлетворяющее условию (3.22) представляется в виде интеграла (3.16).

Теорема 3.2. *Задача XI в двугранном угле E всегда разрешима и её решение представляется в явном виде формулами (3.27) и (3.16).*

3.1.3. Теперь будем рассматривать одно из возможных обобщений системы (3.1) в следующем виде

$$\begin{aligned} s_t - u_x - v_y + z^p w_z &= 0, \\ s_x + u_t - z^p v_z + w_y &= 0, \\ s_y + z^p u_z + v_t - w_x &= 0, \\ z^p s_z - u_y + v_x + w_t &= 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где p - положительная постоянная, причем $p \neq 1$. Характеристический определитель данной системы имеет вид

$$\chi(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + z^{2p} \xi_3^2)(\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 - z^{2p} \xi_3^2).$$

Следовательно, эта система в каждой точке пространства $R^4 \setminus \{z = 0\}$ является системой составного типа, а на гиперплоскости $z = 0$ вырождается.

В полупространстве R_+^4 рассмотрим следующую задачу:

Задача XII. *Найти решение (s, u, v, w) системы (3.28) из класса $C^1(R_+^4)$, удовлетворяющее на границе $\Gamma: \{z = 0\}$ полупространства условиям*

$$w(t, x, y, z)|_{z=0} = f(t, x, y), \lim_{z \rightarrow 0} z^p w_z(t, x, y, z) = g(t, x, y), \quad (3.29)$$

$$s(t, x, y, z)|_{z=0} = h_1(t, x, y), \quad (3.30)$$

$$u(t, x, y, z)|_{z=0} = h_2(t, x, y), \quad (3.31)$$

$$v(t, x, y, z)|_{z=0} = h_3(t, x, y), \quad (3.32)$$

где функции $f(t, x, y) \in C^3(\Gamma)$, $g(t, x, y) \in C^2(\Gamma)$, а функции $h_1(t, x, y)$, $h_2(t, x, y)$, $h_3(t, x, y) \in C(\Gamma)$.

Следствием системы (3.28) является следующая система уравнений второго порядка

$$\begin{aligned}
w_{tt} + w_{xx} + w_{yy} - z^p \partial_z (z^p w_z) &= 0, \\
s_{tt} + s_{xx} + s_{yy} + z^p \partial_z (z^p s_z + 2w_t) &= 0, \\
u_{tt} + u_{xx} + u_{yy} + z^p \partial_z (z^p u_z - 2w_x) &= 0, \\
v_{tt} + v_{xx} + v_{yy} + z^p \partial_z (z^p v_z - 2w_y) &= 0,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Таким образом, для определения компоненты w решения необходимо решать видоизменённую задачу Коши с условиями (3.29) для первого уравнения системы (3.33), а для определения компонентов s, u и v решения - задачу Дирихле с соответствующими граничными условиями (3.30), (3.31) и (3.32) для остальных уравнений системы (3.33).

Введя вместо z переменную

$$\zeta = \frac{1}{1-p} z^{1-p}, \tag{3.34}$$

преобразуем систему (3.33) к виду

$$\begin{aligned}
w_{tt} + w_{xx} + w_{yy} - w_{\zeta\zeta} &= 0, \\
\Delta s - l_1(t, x, y, \zeta) &= 0, \\
\Delta u - l_2(t, x, y, \zeta) &= 0, \\
\Delta v - l_3(t, x, y, \zeta) &= 0,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

где $\Delta \equiv \partial_{tt} + \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{\zeta\zeta}$ - оператор Лапласа, $l_1(t, x, y, \zeta) = -2w_{t\zeta}$, $l_2(t, x, y, \zeta) = 2w_{x\zeta}$, $l_3(t, x, y, \zeta) = 2w_{y\zeta}$, а условия (3.29)-(2.1.23) - к условиям

$$w(t, x, y, \zeta)|_{\zeta=0} = f(t, x, y), \lim_{\zeta \rightarrow 0} w_{\zeta}(t, x, y, \zeta) = g(t, x, y),$$

$$s(t, x, y, \zeta)|_{\zeta=0} = h_1(t, x, y),$$

$$u(t, x, y, \zeta)|_{\zeta=0} = h_2(t, x, y),$$

$$v(t, x, y, \zeta)|_{\zeta=0} = h_3(t, x, y).$$

Таким образом задача определения компонентов s, u, v, w решения системы (3.35) сведена к эквивалентной задаче, аналогичной задаче **X**, и можно получить следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Задача XII для системы (3.28) в полупространстве R_+^4 всегда разрешима и имеет единственное решение, представляемое в явном виде.*

§3.2. Задачи в ограниченной области четырёхмерного пространства

Пусть $\Omega \subset R^4$ - односвязная область, ограниченная в полупространстве $z > 0$ поверхностью Ляпунова γ и участком G гиперплоскости $z = 0$. При этом γ однозначно проектируется на G и $\Gamma = G \cup \gamma$.

Для системы (3.28) в области Ω рассмотрим следующую задачу.

Задача XIII. Найти в области Ω регулярное решение (s, u, v, w) системы (3.28), удовлетворяющее условиям

$$w(M, z)|_{z=0} = f(M), \lim_{z \rightarrow 0} z^p w_z(M, z) = g(M) \quad (3.36)$$

$$s|_{\Gamma} = \phi_1(M, z), \quad u|_{\Gamma} = \phi_2(M, z), \quad v|_{\Gamma} = \phi_3(M, z), \quad (3.37)$$

где $M = (t, x, y)$, функции $f(M) \in C^3(G)$, $g(M) \in C^2(G)$, $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in C^1(\Gamma)$.

Как и в случае задачи XII из системы (3.28) следуют соотношения (3.33). Преобразуя их с помощью подстановки (3.34), получим

$$\begin{aligned} w_{tt} + w_{xx} + w_{yy} - w_{\zeta\zeta} &= 0, \\ \Delta U &= -l(t, x, y, \zeta), \end{aligned}$$

где введены обозначения: $U = (s, u, v)$, $l(t, x, y, \zeta) = (l_1, l_2, l_3)$, $l_1 = 2w_{t\zeta}$, $l_2 = -2w_{x\zeta}$, $l_3 = -2w_{y\zeta}$.

Решение w волнового уравнения в области Ω можно однозначно определить с помощью формулы Кирхгофа [1, с. 60], [92, с. 194] как решение задачи Коши с условиями (3.36), которые в новой переменной имеют вид

$$w(t, x, y, \zeta)|_{\zeta=0} = f(t, x, y), \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} w_{\zeta}(t, x, y, \zeta) = g(t, x, y).$$

По известной w вектор-функцию $U = (s, u, v)$ определим как решение задачи Дирихле

$$\Delta U = -l(t, x, y, \zeta), \quad U|_{\Gamma} = \phi(t, x, y, \zeta). \quad (3.38)$$

Пусть задана гармоническая всюду в области Ω функция $\delta(M; M')$, такая, что $\delta|_{\Gamma} = \frac{1}{2r^2}$, где r - расстояние от переменной точки $M = (t, x, y, \zeta)$ до $M' = (t_0, x_0, y_0, \zeta_0)$. Тогда решение задачи Дирихле (3.38) представляется в виде [89, с. 614], [92, с. 177]:

$$U(M') = \int_{\Omega} G(M; M') l(M) d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(M; M')}{\partial n} \phi(M) d\Gamma. \quad (3.39)$$

Функция

$$G(M; M') = \frac{1}{(2\pi r)^2} - \frac{\delta}{2\pi^2}, \quad (3.40)$$

называется функцией Грина, предельное значение которой на поверхности Γ равно нулю. Для того, чтобы функция U определяемое формулой (3.39) имела непрерывные производные до второго порядка внутри Ω , необходимо потребовать наличие непрерывной производной первого порядка у функции $l(t, x, y, \zeta)$ внутри Ω . Непрерывная же дифференцируемость функции $l(t, x, y, \zeta)$ является простым следствием дифференцируемости функции w . Таким образом справедлива

Теорема 3.4. *Задача XIII в области Ω однозначно разрешима и её решение представляется в явном виде (формулы Кирхгофа и (3.39)).*

§3.3. Начально-краевая задача для системы уравнений с младшими членами

Через Ω обозначим односвязную ограниченную область: $\{(t, x, y, z): t \in R^1, (x, y) \in G, 0 < z < \varphi(x, y)\}$, где $\varphi \in C^1(G)$ - поверхностью Ляпунова, а G - ограниченная область в R^2 . С помощью $\Gamma = G \cup \varphi$ обозначим всю границу области. В этой области для системы

$$\begin{aligned} s_t - u_x - v_y + w_z &= a_{11}s + a_{12}u + a_{13}v + a_{14}w, \\ s_x + u_t - v_z + w_y &= a_{21}s + a_{22}u + a_{23}v + a_{24}w, \\ s_y + u_z + v_t - w_x &= a_{31}s + a_{32}u + a_{33}v + a_{34}w, \\ s_z - u_y + v_x + w_t &= a_{41}s + a_{42}u + a_{43}v + a_{44}w, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

- заданная матрица с вещественными элементами, рассмотрим задачу.

Задача XIV. Найти регулярное решение (s, u, v, w) системы (3.41) в области Ω , удовлетворяющее условиям

$$w(t, x, y, z)|_{z=0} = f_1(t, x, y), \quad w_z(t, x, y, z)|_{z=0} = f_2(t, x, y), \quad (3.42)$$

$$U(t, x, y, z)|_{\Gamma} = 0. \quad (3.43)$$

где $f_1(t, x, y)$, $f_2(t, x, y)$ - заданные достаточно гладкие функции, $U = (s, u, v)$.

Рассматривая в §3.1 систему (3.1) без младших членов, относительно w мы получили отдельное волновое уравнение. Теперь не получается отдельное уравнение второго порядка, в него входят сами функции s, u, v и некоторые их первые производные. Наличие в уравнении функций s, u, v не осложняют ситуацию, а наличие их производных существенно осложняет исследование системы. В связи с этим рассмотрим случай, когда матрица коэффициентов при младших членах системы (3.41) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ -k_2 & -k_1 & k_4 & -k_3 \\ -k_3 & -k_4 & -k_1 & k_2 \\ -k_4 & k_3 & -k_2 & k_1 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Следовательно, из системы (3.41) с учётом условий (3.44) для компонентов w, s, u, v решения получаем соотношения

$$\begin{aligned} w_{tt} + w_{xx} + w_{yy} - w_{zz} + 2k_2w_x + 2k_3w_y - (k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 - k_4^2)w &= 0, \\ s_{tt} + s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} + 2k_1s_t + 2k_2s_x + 2k_3s_y + 2k_4s_z + \\ &+ (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)s = l_1(t, x, y, z), \\ u_{tt} + u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2k_1u_t + 2k_2u_x + 2k_3u_y + 2k_4u_z + \\ &+ (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)u = l_2(t, x, y, z), \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$v_{tt} + v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} + 2k_1v_t + 2k_2v_x + 2k_3v_y + 2k_4v_z + \\ + (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)v = l_3(t, x, y, z)$$

где

$$l_1(t, x, y, z) = 2(k_1k_4w - w_{tz}), \quad l_2(t, x, y, z) = 2(w_{xz} - k_1k_3w - k_1w_y + k_2w_z), \\ l_3(t, x, y, z) = 2(w_{yz} + k_1k_2w + k_1w_x + k_3w_z). \quad (3.46)$$

Задача Коши с начальными условиями (3.42) для гиперболического уравнения (первого уравнения системы (3.45)) приводится к интегральному уравнению типа Вольтерра [90, с. 159], которое при значениях z , достаточно близких к нулю имеет единственное решение. Это решение может быть получено применением обычного метода последовательных приближений, и что это решение является вместе с тем и решением поставленной задачи Коши для первого уравнения системы (3.45).

Теперь, следуя методу интегральных уравнений принадлежащему Э.Леви [43], будем определять остальные компоненты s, u, v решения системы (3.41). Введя вектор-функцию $U = (s, u, v)$, три последние уравнения системы (3.45) запишем в виде

$$L[U] \equiv \sum_{i=1}^4 U_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^4 a_i U_{x_i} + bU = l(X), \quad (3.47)$$

где $l = (l_1, l_2, l_3)$, $a_i = 2k_i$, $i = 1, \dots, 4$, $b = \sum_{i=1}^4 k_i^2$. Функция $l(X)$ в правой части уравнения (3.47) непрерывно дифференцируема. Решение задачи (3.47), (3.43) будем искать в виде

$$U = \int_{\Omega} G(X; Y) \phi(Y) dY,$$

где $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $Y = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, $G(X; Y)$ - функция Грина уравнения $\Delta U = 0$ для области Ω , имеющий вид (3.40), а ϕ - некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Полагаем

$$K(X; Y) = \sum_{i=1}^4 a_i G_{x_i}(X; Y) + bG(X; Y)$$

и допускаем, что в Ω она удовлетворяет неравенству

$$|K(X; Y)| < \frac{\alpha}{r} \quad (r = |X - Y|), \quad (3.48)$$

где $\alpha > 0$ - некоторая независящая от X, Y константа. Тогда получаем

$$L[U] = \int_{\Omega} K(X; Y) \phi(Y) dY - \phi(X),$$

так что функция ϕ должна удовлетворять уравнению

$$\phi(X) = -l(X) + \int_{\Omega} K(X; Y) \phi(Y) dY. \quad (3.49)$$

К этому уравнению нельзя непосредственно применить теорию Фредгольма, так как в точке $X = Y$ ядро K имеет особенность первого порядка и, следовательно не является интегрируемым с квадратом. Но легко видеть, что итерированное ядро

$$K_2(X; Y) = \int_{\Omega} K(X; S) K(S; Y) dS$$

интегрируема с квадратом, так как из (3.48) следует, что $K_2(X, Y)$ имеет логарифмическую особенность:

$$|K_2(X; Y)| < \alpha_0 |\log r| + \beta_0, \quad (3.50)$$

где $\alpha_0, \beta_0 > 0$ и не зависят от X, Y . Поэтому мы сначала рассмотрим итерированное интегральное уравнение

$$\phi(X) = -h(X) + \int_{\Omega} K_2(X; Y) \phi(Y) dY, \quad (3.51)$$

где

$$h(X) = l(X) + \int_{\Omega} K(X; Y) l(Y) dY.$$

В силу достаточной малости $z > 0$ будет выполнено неравенство

$$\int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} K_2^2(X; Y) dX \right] dY < 1.$$

Поэтому из теоремы Фредгольма следует существование решения $\phi(X)$ уравнения (3.51).

Теперь используя связь $h(X)$ и $l(X)$ нетрудно показать, что $\phi(X)$ будет удовлетворять уравнению (3.49).

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.5. Пусть матрица коэффициентов при младших членах (3.41) имеет вид (3.44) и область Ω достаточно мала. Тогда задача XIV является фредгольмовой.

§3.4. Начальные и смешанные задачи для одного класса неклассических систем уравнений

3.4.1. В этом пункте приводятся результаты наших исследований, опубликованные в работе [6-A]: «В полупространстве $R_+^4 = \{(t, X): t > 0, X \in R^3\}$ с границей $\Gamma = \{t = 0\}$ рассмотрим систему (3.9)

$$\begin{aligned} s_t + u_x + v_y + w_z &= 0, \\ s_x + u_t + v_z - w_y &= 0, \\ s_y - u_z + v_t + w_x &= 0, \\ s_z + u_y - v_x + w_t &= 0, \end{aligned}$$

или в векторной форме

$$\begin{aligned} s_t + \operatorname{div} U &= 0, \\ \operatorname{grad} s + U_t - \operatorname{rot} U &= 0, \end{aligned} \tag{3.52}$$

где $U = (u, v, w)$, операции grad , div и rot по переменным x, y, z .

Через $\mathcal{M}$ обозначим класс функций (или вектор-функций) $C^2(R_+^4) \cap C^1(\bar{R}_+^4)$. Прежде всего приведем следующую лемму, устанавливающую связь между решениями системы (3.52) и решениями волнового уравнения и уравнения Пуассона.

Лемма 3.1. Пусть (s, U) является решением системы (3.52) из класса $\mathcal{M}$. Тогда компонента s будет решением волнового уравнения

$$\omega_{tt} - \Delta \omega = 0, \quad (3.53)$$

а компонента U - решением системы уравнений Пуассона

$$U_{tt} - \Delta U = -2 \operatorname{grad} s_t \quad [6-A]. \quad (3.54)$$

Доказательство. «К первому уравнению системы (3.52) применим операцию $\partial/\partial t$, а ко второму - операцию div :

$$\begin{aligned} s_{tt} + (\operatorname{div} U)_t &= 0, \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} s + \operatorname{div} U_t - \operatorname{div} \operatorname{rot} U &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу того, что

$$(\operatorname{div} U)_t = \operatorname{div} U_t, \operatorname{div} \operatorname{grad} s = \Delta s, \operatorname{div} \operatorname{rot} U = 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} s_{tt} + \operatorname{div} U_t &= 0, \\ \Delta s + \operatorname{div} U_t &= 0, \end{aligned}$$

т.е. $s_{tt} = \Delta s$ и s удовлетворяет уравнению (3.53).

Теперь к второму уравнению системы (3.52) применим операцию rot :

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} s + \operatorname{rot} U_t - \operatorname{rot} \operatorname{rot} U = 0. \quad (3.55)$$

Так как

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} s = 0, \operatorname{rot} \operatorname{rot} U = \operatorname{grad} \operatorname{div} U - \Delta U = -\operatorname{grad} s_t - \Delta U,$$

то равенство (3.55) примет вид

$$\operatorname{rot} U_t + \operatorname{grad} s_t + \Delta U = 0. \quad (3.56)$$

Далее к второму уравнению системы (3.52) применим операцию $\partial/\partial t$:

$$\operatorname{grad} s_t + U_{tt} - \operatorname{rot} U_t = 0. \quad (3.57)$$

Сложив равенства (3.56) и (3.57), получим

$$2\operatorname{grad} s_t + \Delta U + U_{tt} = 0,$$

т.е. U удовлетворяет системе (3.54).

Лемма 3.1 доказана» [6-А].

Замечание 3.1 – Система уравнений (3.53), (3.54) является следствием системы (3.52). Кажется, что можно поставить начально-краевые задачи для системы (3.52) и решить их для системы (3.53), (3.54). Но, обратный ход не очевиден.

Поэтому в дальнейшем будем использовать следующую теорему.

Теорема 3.6. *Все решения системы (3.52) из класса $\mathcal{M}$ представляются в виде*

$$s(t, X) = \omega_t(t, X), \quad (3.58)$$

$$U(t, X) = -\operatorname{grad} \omega(t, X) + V(t, X), \quad (3.59)$$

где $\omega(t, X)$ – произвольное решение волнового уравнения (3.53), а $V(t, X)$ – произвольное решение системы

$$\begin{cases} V_t - \operatorname{rot} V = 0, \\ \operatorname{div} V = 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

$$(3.61)$$

из класса $\mathcal{M}$. Наоборот, пара (s, U) , определенная формулами (3.58), (3.59) с соответствующими $\omega(t, X), V(t, X)$ будет решениями системы (3.52).

Доказательство. Пусть (s, U) – решение системы (3.52) из класса $\mathcal{M}$. Покажем, что существуют решение $\omega(t, X)$ уравнения (3.53) и решение $V(t, X)$ системы (3.60), (3.61), такие что представления (3.58), (3.59) являются верными.

Положим

$$\omega(t, X) = \int_0^t s(\tau, X) d\tau + \psi(X), \quad (3.62)$$

где $\psi(X)$ – какое-нибудь решение уравнения

$$\Delta\psi = s_t(0, X). \quad (3.63)$$

Тогда

$$\omega_t = s. \quad (3.64)$$

Проверим, что ω удовлетворяет уравнению (3.53). Согласно лемме 3.1 и соотношений (3.62) – (3.64), имеем

$$\omega_{tt} = s_t, \quad \Delta\omega = \int_0^t \Delta s d\tau + \Delta\psi = \int_0^t s_{tt} d\tau + s_t(0, X) = s_t(t, X).$$

Отсюда

$$\omega_{tt} - \Delta\omega = 0.$$

Полагая $V = U + \text{grad } \omega$ проверим, что вектор-функция V удовлетворяет системе (3.60), (3.61). Учитывая первое уравнение системы (3.52) и соотношение (3.64), имеем

$$\text{div } V = \text{div } U + \text{div grad } \omega = -s_t + \Delta\omega = -\omega_{tt} + \Delta\omega = 0,$$

т.е. V удовлетворяет уравнению (3.61).

Далее находим

$$\begin{aligned} V_t - \text{rot } V &= U_t + (\text{grad } \omega)_t - \text{rot } U - \text{rot grad } \omega = \\ &= U_t + \text{grad } s - \text{rot } U = 0, \end{aligned}$$

т.е. V удовлетворяет системе (3.60); здесь мы использовали равенство (3.64), второе уравнение системы (3.52) и соотношение $\text{rot grad} = 0$.

Обратно, теперь покажем, что пара (s, U) из класса $\mathcal{M}$, определенная формулами (3.58), (3.59) с соответствующими ω и V , удовлетворяет системе (3.52).

Так как $\operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta$, то из (3.58) имеем

$$s_t + \operatorname{div} U = \omega_{tt} - \Delta \omega + \operatorname{div} V = 0,$$

т.е. первое уравнение системы (3.52) удовлетворяется.

Далее будем иметь

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} s + U_t - \operatorname{rot} U &= \operatorname{grad} \omega_t - (\operatorname{grad} \omega)_t + V_t + \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} \omega - \operatorname{rot} V &= V_t - \operatorname{rot} V = 0, \end{aligned}$$

т.е. второе уравнение системы (3.52) тоже удовлетворяется.

Теорема 3.6 доказана.

Замечание 3.2 – Система уравнений (3.60), (3.61) является переопределённой и совместной. Система (3.60) рассмотрена в работе П.Е. Берхина [8].

Теперь для системы (3.52) рассмотрим следующую задачу.

Задача XV. Найти решение (s, U) системы (3.52) из класса $\mathcal{M}$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$s(0, X) = s_0(X), \tag{3.65}$$

$$s_t(0, X) = s_1(X), \tag{3.66}$$

$$U(0, X) = U_0(X) \text{ и } \lim_{|x| \rightarrow \infty} U(t, X) = 0, t \geq 0. \tag{3.67}$$

Ниже мы построим решение этой задачи. В ходе построения решения мы будем накладывать условия на начальные функции s_0, s_1, U_0 , позволяющие определить обобщенное или классическое решение задачи XV.

Для волнового уравнения (3.53) возьмём начальные условия в виде

$$\omega(0, X) = \varphi(X), \tag{3.68}$$

$$\omega_t(0, X) = s_0(X), \tag{3.69}$$

где

$$\varphi(X) = -\frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{s_1(\xi)}{|X - \xi|} d\xi, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (3.70)$$

находим однозначно решение $\omega(t, X)$. Отметим, что выбор начальных условий для $\omega(t, X)$ связан с соотношениями вида (3.58) и (3.63).

Теперь будем определять вектор-функцию $V(t, X)$, т.е. решение системы (3.60), (3.61), принадлежащее пространству S' при каждом $t > 0$.

В системе (3.60) совершим преобразование Фурье по переменной X . Пусть $w(t, \xi) = \mathcal{F}_x V(t, X)$, тогда имеем

$$w_t + A(\xi)w = 0, \quad (3.71)$$

где

$$A(\xi) = -i \begin{bmatrix} 0 & \xi_3 & -\xi_2 \\ -\xi_3 & 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $A(\xi)$ при $\xi \neq 0$ равны:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -|\xi|, \quad \lambda_3 = |\xi|.$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные векторы:

$$e_1 = \xi, e_2 = (-\xi_1 \xi_3 - i \xi_2 |\xi|; -\xi_2 \xi_3 + i \xi_1 |\xi|; \xi_1^2 + \xi_2^2), e_3 = \bar{e}_2.$$

Решения системы (3.71), принадлежащие S' при каждом $t > 0$ имеют вид

$$w(t, \xi) = C_1(\xi)e_1 + C_2(\xi)e^{-|\xi|t}e_2, \quad (3.72)$$

где C_1, C_2 – скалярные обобщённые функции из S' .

Уравнение (3.61) в пространстве S' эквивалентно уравнению

$$\xi_1 \mathcal{F} v_1 + \xi_2 \mathcal{F} v_2 + \xi_3 \mathcal{F} v_3 = 0, \quad (3.73)$$

где v_i – компоненты вектор-функции V . Из (3.72) и (3.73) следует, что

$$\begin{aligned} & \xi_1 [C_1(\xi) \xi_1 + C_2(\xi)(-\xi_1 \xi_3 - i \xi_2 |\xi|) e^{-|\xi|t}] + \\ & + \xi_2 [C_1(\xi) \xi_2 + C_2(\xi)(-\xi_2 \xi_3 + i \xi_1 |\xi|) e^{-|\xi|t}] + \\ & + \xi_3 [C_1(\xi) \xi_3 + C_2(\xi)(\xi_1^2 + \xi_2^2) e^{-|\xi|t}] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда легко получить:

$$C_1(\xi) |\xi|^2 = 0.$$

Используя теорему о структуре обобщённых функций с точечным носителем, после несложных вычислений находим:

$$C_1(\xi) e_1 = d_1 \delta(\xi) + A \cdot \nabla \delta(\xi),$$

$$\text{где } d_1 \in C^3, A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_j \in C, \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_3} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$w(t, \xi) = (d_1 + A \cdot \nabla) \delta(\xi) + C_2(\xi) e^{-|\xi|t} e_2.$$

Используя начальное условие (3.67), находим

$$C_2(\xi) e_2 = w(0, \xi) = \mathcal{F}V(0, X) = \mathcal{F}[U_0(X) + \text{grad } \varphi(X)].$$

Поэтому

$$w(t, \xi) = \mathcal{F}[U_0(X) + \text{grad } \varphi(X)] e^{-|\xi|t}.$$

Отсюда

$$V(t, \xi) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F}[U_0(X) + \text{grad } \varphi(X)] e^{-|\xi|t} \}. \quad (3.74)$$

Найдём преобразование Фурье функции $e^{-|\xi|t}$. Следуя [16, с. 115], имеем

$$\mathcal{F}[e^{-|\xi|t}] = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{|\xi|}} \int_0^\infty e^{-rt} r^{\frac{3}{2}} J_{\frac{1}{2}}(r|\xi|) dr,$$

где $r = |X|$, $J_{\frac{1}{2}}$ — функция Бесселя, причём (см. [34, с. 400]),

$$J_{\frac{1}{2}}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \sin \lambda.$$

Поэтому

$$\mathcal{F}[e^{-|\xi|t}] = \frac{4\pi}{|\xi|} \int_0^\infty e^{-rt} r \sin(r|\xi|) dr = \frac{4\pi}{|\xi|} \frac{2t|\xi|}{(t^2 + |\xi|^2)^2} = \frac{8\pi t}{(t^2 + |\xi|^2)^2},$$

здесь мы использовали значение интеграла из [20, с. 205]. Следовательно,

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{8\pi t}{(t^2 + |\xi|^2)^2}\right] = e^{-|\xi|t}$$

и с учётом равенства $\mathcal{F}^{-1}[f(\xi)] = (2\pi)^{-3}\mathcal{F}[f(-\xi)]$, из выражения (3.74) имеем

$$V(t, X) = \frac{t}{\pi^2} \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[U_0(X) + \text{grad } \varphi(X)] \mathcal{F}\left[\frac{1}{(t^2 + |X|^2)^2}\right]\}$$

или в силу свойств преобразования Фурье

$$\begin{aligned} V(t, X) &= \frac{t}{\pi^2} \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}[(U_0(X) + \text{grad } \varphi) * \frac{1}{(t^2 + |X|^2)^2}]\right\} = \\ &= \frac{t}{\pi^2} (U_0(X) + \text{grad } \varphi) * \frac{1}{(t^2 + |X|^2)^2}, \end{aligned}$$

здесь $*$ - операция свёртки. Поэтому

$$V(t, X) = \frac{t}{\pi^2} \int_{R^3} \frac{U_0(Y) + \text{grad } \varphi(Y)}{(t^2 + |X - Y|^2)^2} dY, \quad Y = (y_1, y_2, y_3). \quad (3.75)$$

Итак, решение системы (3.60), (3.61) однозначно определяется формулой (3.75).

Таким образом, решение задачи **XV** определяется однозначно формулами

$$s(t, X) = \omega_t(t, X), \quad (3.76)$$

$$U(t, X) = -\operatorname{grad} \omega(t, X) + \frac{t}{\pi^2} \int_{R^3} \frac{U_0(Y) + \operatorname{grad} \varphi(Y)}{(t^2 + |X - Y|^2)^2} dY, \quad (3.77)$$

где $\omega(t, X)$ – решение волнового уравнения (3.53) с начальными условиями (3.68), (3.69) $\varphi(Y)$ – определяется формулой (3.70)» [6-A].

Замечание 3.3 – «Как видно из построения решения задачи **XV**, если функции $s_0(X)$, $s_1(X)$ и вектор-функция $U_0(X)$ гладкие и такие, что интегралы в формулах (3.70) и (3.77) вместе с их производными являются абсолютно и равномерно сходящимися, то формулы (3.76), (3.77) определяют классическое решение задачи **XV**, а вообще они дают обобщённое решение задачи» [6-A].

3.4.2. В этом пункте мы рассмотрим более общую чем (3.52) систему. Ниже приводимые результаты опубликованы в работе [6-A]: «Теперь обобщим систему (3.52) в виде

$$\begin{aligned} a(t)s_t + u_x + v_y + w_z &= 0, \\ s_x + a(t)u_t + v_z - w_y &= 0, \\ s_y - u_z + a(t)v_t + w_x &= 0, \\ s_z + u_y - v_x + a(t)w_t &= 0, \end{aligned} \quad (3.78)$$

где $a(t)$ такая непрерывная на $R_+ = [0, \infty)$ функция, что $a(0) = 0$, $a(t) > 0$ при $t > 0$, интеграл $\int_0^1 \frac{d\tau}{a(\tau)}$ сходящийся, а интеграл $\int_1^\infty \frac{d\tau}{a(\tau)}$ расходящийся.

Характеристическая форма системы (3.78) имеет вид

$$\chi(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (a^2 \xi_0^2 + |\xi|^2)(a^2 \xi_0^2 - |\xi|^2), \quad |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2.$$

Следовательно, система (3.78) в каждой точке пространства $R^4 \setminus \{t = 0\}$ является системой составного типа, а на гиперплоскости $t = 0$ вырождается.

Как и в случае системы (3.52) систему (3.78) перепишем в векторной форме

$$\begin{cases} a(t)s_t + \operatorname{div} U = 0, \\ \operatorname{grad} s + a(t)U_t - \operatorname{rot} U = 0. \end{cases} \quad (3.79)$$

В этой системе произведём замену независимой переменной

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{d\rho}{a(\rho)}, \quad t \geq 0.$$

Тогда для новой неизвестной вектор-функции (R, W) , где

$$R(t, X) = s[\tau^{-1}(t), X], \quad W(t, X) = U[\tau^{-1}(t), X],$$

$\tau^{-1}(t)$ — обратная к $\tau(t)$ функция, получим систему вида

$$\begin{cases} R_t + \operatorname{div} W = 0, \\ \operatorname{grad} R + W_t - \operatorname{rot} W = 0 \end{cases} \quad (3.80)$$

с постоянными коэффициентами.

Так как

$$R(0, X) = s(0, X)$$

и

$$R_t(t, X) = \frac{1}{\tau'(t)} s_t[\tau^{-1}(t), X] = a(t) s_t[\tau^{-1}(t), X],$$

то естественно для системы (3.79) изучить следующую задачу.

Задача XVI. Найти в полупространстве R_+^4 решение системы (3.79) из класса $\mathcal{M}$, принадлежащее при каждом $t \geq 0$ пространству S' и удовлетворяющее условиям:

$$s(0, X) = s_0(X), \quad (3.81)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} a(t) s_t(t, X) = s_1(X), \quad (3.82)$$

$$U(0, X) = U_0(X), \quad (3.83)$$

здесь s_0, s_1, U_0 — заданные на R^3 функции из S' .

Для системы (3.80) условия (3.81) – (3.83) перейдут в следующие условия

$$R(0, X) = s_0(X),$$

$$R_t(0, X) = s_1(X),$$

$$W(0, X) = U_0(X),$$

т.е. для системы (3.80) мы получили задачу вида **XV**. Решение такой задачи единственно и имеет вид

$$R(t, X) = v_t(t, X),$$

$$W(t, X) = -grad v(t, X) + \frac{t}{\pi^2} \int_{R^3} \frac{U_0(Y) + grad \varphi(Y)}{(t^2 + |X - Y|^2)^2} dY,$$

где $v(t, X)$ – решение волнового уравнения

$$\omega_{tt} - \Delta \omega = 0$$

с начальными условиями

$$\omega(0, X) = \varphi(X),$$

$$\omega_t(0, X) = s_0(X),$$

а

$$\varphi(X) = -\frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{s_1(\xi)}{|X - \xi|} d\xi, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

Таким образом, решение задачи **XVI** единственно и даётся формулами

$$s(t, X) = v_t[\tau(t), X],$$

$$U(t, X) = -grad v[\tau(t), X] + \frac{\tau(t)}{\pi^2} \int_{R^3} \frac{U_0(Y) + grad \varphi(Y)}{\{[\tau(t)]^2 + |X - Y|^2\}^2} dY. \quad (3.85)$$

Для задачи **XVI** замечание 3.3 остаётся в силе» [6-A].

3.4.3. В полупространстве $R_+^4 = \{t > 0\}$ рассмотрим ещё одно из возможных обобщений системы (3.52) в виде

$$s_t + a(t)(u_x + v_y + w_z) = 0,$$

$$s_x + u_t + v_z - w_y = 0,$$

$$s_y - u_z + v_t + w_x = 0,$$

$$s_z + u_y - v_x + w_t = 0$$
(3.86)

или

$$s_t + a(t)div U = 0,$$

$$grad s + U_t - rot U = 0, \quad (3.87)$$

где $a(t)$ – такая непрерывная на R_+ функция, что $a(0) = 0, a(t) > 0 \forall t > 0$ и интеграл $\int_0^\infty a(\rho) d\rho$ расходящийся.

Характеристический определитель системы равен

$$\chi(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_0^2 + |\xi|^2)(\xi_0^2 - a(t)|\xi|^2), \quad |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2.$$

Следовательно, система (3.86) при $t > 0$ является системой составного типа, а при $t = 0$ вырождается.

Замена $\tau(t) = \int_0^t a(\rho) d\rho$ систему (3.87) приводит к системе

$$\begin{cases} R_t + \operatorname{div} U = 0, \\ \operatorname{grad} R + U_t - \operatorname{rot} U = 0, \end{cases}$$

где $R(t, X) = s(\tau^{-1}(t), X)$. Поэтому можно изучить следующую задачу.

Задача XVII. Найти в полупространстве R_+^4 решение системы (3.87) из класса $\mathcal{M}$, принадлежащее при каждом $t \geq 0$ пространству S' и удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} s(0, X) &= s_0(X), \\ \lim_{t \rightarrow +0} \frac{s_t(t, X)}{a(t)} &= s_1(X), \\ U(0, X) &= U_0(X), \end{aligned}$$

здесь s_0, s_1, U_0 – заданные на R^3 функции из S' .

Решение этой задачи находится аналогично как решение задачи XVI и даётся формулами

$$\begin{aligned} s(t, X) &= v_t[\tau(t), X], \\ U(t, X) &= -\operatorname{grad} v[\tau(t), X] + \frac{\tau(t)}{\pi^2} \int_{R^3} \frac{U_0(Y) + \operatorname{grad} \varphi(Y)}{\{[\tau(t)]^2 + |X - Y|^2\}^2} dY, \end{aligned}$$

где $v(t, X)$ – решение задачи (3.84) для волнового уравнения.

3.4.4. Пусть $\Omega = \{(t, X): t \geq 0, X \in G \subset R^3\}$ – цилиндр, $P = \{(t, X): t > 0, X \in \Gamma\}$ – боковая поверхность цилиндра Ω и $\Gamma \in \partial G$. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу.

Задача XVIII. Найти решение (s, U) системы (3.52), удовлетворяющее начальным условиям

$$s(0, X) = \varphi_0(X), \quad s_t(0, X) = \varphi_1(X), \quad s(\infty, X) = 0, \quad (3.88)$$

$$U(0, X) = \Phi(X), \quad \operatorname{div} U_t(0, X) = \Psi(X) \quad (3.89)$$

и граничным условиям

$$s(t, X)|_P = 0, \quad (3.90)$$

$$\operatorname{div} U|_P = 0, \quad \operatorname{rot} U|_P = 0, \quad \operatorname{rot} U(\infty, X) = 0, \quad (3.91)$$

$$(n, U_t(0, X)) = \varphi(X), \quad X \in \Gamma, \quad (3.92)$$

где n – единичный вектор-нормали в точке $X \in \Gamma$, $\varphi_0(X) \in C^3(R^3)$, $\varphi_1(X) \in C^2(R^3)$, а функции Φ, Ψ и φ предполагаются заданными функциями класса C^∞ .

Компонента $s(t, X)$ решения задачи (3.88), (3.89), (3.90) определяется однозначно как решение начально-краевой задачи (см. [40, с. 182])

$$s(0, X) = \varphi_0(X), \quad s_t(0, X) = \varphi_1(X), \quad s(t, X)|_P = 0, \quad s(\infty, X) = 0$$

для волнового уравнения $s_{tt} - \Delta s = 0$, где $\varphi_0(X)|_\Gamma = 0$.

Применение операции div и rot к системе (3.53) приводит теперь начально-краевую задачу к эквивалентной начально-краевой задаче

$$\theta(0, X) = \operatorname{div} \Phi(X), \quad \theta_t(0, X) = \Psi(X), \quad \theta(t, X)|_P = 0 \quad (3.93)$$

для волнового уравнения

$$\theta_{tt} - \Delta \theta = 0, \quad (3.94)$$

относительно скалярной функции $\theta(t, X) = \operatorname{div} U$ и к задаче Дирихле

$$v(0, X) = \text{rot } \Phi(X), \quad v(t, X)|_P = 0, \quad v(\infty, X) = 0 \quad (3.95)$$

для уравнения Лапласа

$$v_{tt} + \Delta v = 0, \quad (3.96)$$

в которой $\text{rot } \Phi(X)|_\Gamma = 0$.

Начально-краевая задача (3.93) для волнового уравнения (3.94) однозначно определяет в цилиндре Ω функцию $\theta(t, X)$, а задача Дирихле (3.95) для уравнения Лапласа (3.96) - гармоническую в цилиндре Ω вектор-функцию $v(t, X)$. В силу

$$\text{div } v(0, X) = 0, \quad \text{div } v|_P = 0,$$

в Ω вектор-функция $v(t, X)$ удовлетворяет условию $\text{div } v(t, X) = 0$. Тогда неоднородная система у.ч.п. потенциальных векторных полей

$$\text{div } U = \theta(t, X), \quad \text{rot } U = v(t, X) \quad (3.97)$$

при фиксированных t будет совместной и её решение можно представить в виде [23, с. 366], [84, с. 286]:

$$U(t, X) = H(t, X) + \text{grad} \left(\frac{-1}{|\sigma|} \int_G \frac{\theta(t, \xi)}{|\xi - X|} d\xi \right) + \text{rot} \frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{v(t, \xi)}{|\xi - X|} d\xi, \quad (3.98)$$

где вектор-функция $H(t, X)$ - решение однородной системы (3.97) (при фиксированных t), её можно определить из требования о том, что формула (3.98) должна удовлетворять системе (3.53) и условию (3.92). Из (3.98) с учётом (3.94) и (3.96) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \text{grad} \left(\frac{-1}{|\sigma|} \int_G \frac{\theta_{tt}(t, \xi)}{|\xi - X|} d\xi \right) + \text{rot} \frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{v_{tt}(t, \xi)}{|\xi - X|} d\xi = \\ &= \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \text{grad} \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{\Delta \theta}{|\xi - X|} d\xi \right) - \text{rot} \frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{\Delta v}{|\xi - X|} d\xi. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Преобразуем интегралы в правой части (3.99):

$$\frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{\Delta \theta}{|\xi - X|} d\xi = -\theta(t, X) + \frac{1}{|\sigma|} \int_\Gamma \left[\frac{1}{|\xi - X|} \frac{\partial \theta}{\partial n} - \theta(t, \xi) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\xi - X|} \right) \right] d_\xi \Gamma,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{\Delta v}{|\xi - X|} d\xi &= \frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{\text{grad div } v(t, \xi) - \text{rot rot } v(t, \xi)}{|\xi - X|} d\xi = \\ &= \text{grad} \frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{\text{div } v(t, \xi)}{|\xi - X|} d\xi - \text{rot} \frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{\text{rot } v(t, \xi)}{|\xi - X|} d\xi. \end{aligned}$$

Тогда выражение (3.99) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \text{grad } \theta(t, X) - \\ &- \text{grad} \frac{1}{|\sigma|} \int_\Gamma \left[\frac{1}{|\xi - X|} \frac{\partial \theta}{\partial n} - \theta(t, \xi) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\xi - X|} \right) \right] d_\xi \Gamma + \\ &+ \text{rot rot} \frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{\text{rot } v(t, \xi)}{|\xi - X|} d\xi = \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \text{grad } \theta(t, X) + \text{rot } v(t, X) - \\ &- \text{grad} \frac{1}{|\sigma|} \int_\Gamma \left[\frac{1}{|\xi - X|} \frac{\partial \theta}{\partial n} - \theta(t, \xi) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\xi - X|} \right) \right] d_\xi \Gamma. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Однако в силу (3.97)

$$\text{grad } \theta(t, X) + \text{rot } v(t, X) = 2 \text{grad div } U - \Delta U.$$

Поэтому из (3.100) следует, что для того, чтобы выражение (3.98) давало решение системы (3.53), необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $H(t, X)$ по t удовлетворяла уравнению

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \text{grad} \frac{1}{|\sigma|} \int_\Gamma \left[\frac{1}{|\xi - X|} \frac{\partial \theta}{\partial n} - \theta(t, \xi) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\xi - X|} \right) \right] d_\xi \Gamma,$$

решая которое, получим

$$H(t, X) = H(0, X) + t H_t(0, X) +$$

$$+grad \frac{1}{|\sigma|} \int_0^t d\tau \int_{\Gamma} \left[\frac{t-\tau}{|\xi-X|} \frac{\partial \theta}{\partial n} - \theta(t, \xi) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{t-\tau}{|\xi-X|} \right) \right] d_{\xi} \Gamma.$$

Пологая в (3.98) $t = 0$, с учётом начального условия (3.89) и равенств $\theta(0, X) = div \Phi$, $v(0, X) = rot \Phi$ получаем

$$H(0, X) + grad \left(\frac{-1}{|\sigma|} \int_G \frac{div \Phi}{|\xi-X|} d\xi \right) + rot \frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{rot \Phi}{|\xi-X|} d\xi = \Phi(X).$$

Отсюда

$$H(0, X) = \Phi(X) + grad \frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{div \Phi}{|\xi-X|} d\xi - rot \frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{rot \Phi}{|\xi-X|} d\xi.$$

Дифференцируя (3.98) по t и, полагая $t = 0$, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = H_t(0, X) + grad \left(\frac{-1}{|\sigma|} \int_G \frac{\theta_t(0, \xi)}{|\xi-X|} d\xi \right) + rot \frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{v_t(0, \xi)}{|\xi-X|} d\xi \quad (3.101)$$

и так как $div H_t(0, X) = 0$, то, учитывая второе равенство (3.93), будем иметь

$$div U_t(0, X) = \Delta \left(\frac{-1}{|\sigma|} \int_G \frac{\theta_t(0, \xi)}{|\xi-X|} d\xi \right) = \theta_t(0, X) = \Psi(X),$$

то есть выражение (3.98) удовлетворяет также и начальному условию (3.91).

Далее, принимая во внимание, что $div H = div v(t, X) = 0$, из (3.98) получим

$$div U(t, X) = \Delta \left(\frac{-1}{|\sigma|} \int_G \frac{\theta(t, \xi)}{|\xi-X|} d\xi \right) = \theta(t, X), \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} rot U(t, X) &= rot rot \frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{v(t, \xi)}{|\xi-X|} d\xi = grad div \frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{v(t, \xi)}{|\xi-X|} d\xi + \\ &+ \Delta \left(\frac{-1}{|\sigma|} \int_G \frac{v(t, \xi)}{|\xi-X|} d\xi \right) = v(t, X) + grad \frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{div v(t, \xi)}{|\xi-X|} d\xi = v(t, X). \end{aligned} \quad (3.103)$$

Поэтому в силу $\theta|_{P=0} = 0$, $v|_P = 0$ из (3.102) и (3.103) следует, что выражение (3.98) удовлетворяет также и краевым условиям (3.91).

Остаётся подобрать вектор-функцию $H_t(0, X)$ так, чтобы выполнялось условие (3.92). Замечая, что $\operatorname{div} H_t(0, X) = 0$, $\operatorname{rot} H_t(0, x) = 0$, получим $H_t(0, X) = \operatorname{grad} h(X)$, где $h(X)$ - гармоническая в G функция. Поэтому из (3.92) с учётом (3.101) получаем задачу Неймана

$$\left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \varphi(X) + (n, h_0(X)), \quad (3.104)$$

где

$$h_0(X) = \operatorname{grad} \frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{\theta_t(0, \xi)}{|\xi - X|} d\xi - \operatorname{rot} \frac{1}{|\sigma|} \int_G \frac{\nu_t(0, \xi)}{|\xi - X|} d\xi.$$

Для разрешимости этой задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\Gamma} \{\varphi(X) + (n, h_0(X))\} d_x \Gamma = 0,$$

или

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \varphi(X) d_x \Gamma &= - \int_{\Gamma} (n, h_0(X)) d_x \Gamma = - \int_G \operatorname{div} h_0(X) dX = \\ &= \int_G \operatorname{div} \operatorname{grad} \left(\frac{-1}{|\sigma|} \int_G \frac{\theta_t(0, \xi)}{|\xi - X|} d\xi \right) dX = \int_G \theta_t(0, X) dX, \end{aligned} \quad (3.105)$$

где $\theta(t, X)$ - решение смешанной задачи (3.93) для волнового уравнения (3.94). Но выше было установлено, что $\theta(t, X) = \operatorname{div} U(t, X)$. Тогда условие (3.105) равносильно условию

$$\int_{\Gamma} \varphi(X) d_x \Gamma = \int_G \operatorname{div} U_t(0, X) dX = \int_{\Gamma} (n, U_t(0, X)) d_x \Gamma$$

и в силу (3.92) оно выполнено. Следовательно, задача (3.104) разрешима. Решая эту задачу, определим гармоническую функцию $h(X)$, а тем самым функцию $H_t(0, X)$. Очевидно, что если $\Phi(X), \Psi(X) \in C^\infty(\bar{G})$, $\phi(X) \in C^\infty(\Gamma)$, то решение

поставленной начально-краевой задачи будет классическим решением из класса $C^\infty(\Omega)$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3.7. *Если $\varphi_0 \in C^4(\overline{G})$, $\varphi_1 \in C^3(\overline{G})$, $\Phi(X), \Psi(X) \in C^\infty(\overline{G})$, $\varphi(X) \in C^\infty(\Gamma)$, то начально-краевая задача XVIII имеет единственное, непрерывно зависящее от начальных данных решение.*

ГЛАВА 4

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ

В диссертации исследованы вырождающиеся неклассические (составные) системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка в ограниченных и неограниченных областях трёх- и четырёхмерного пространства с разными характерами вырождения на границах областей.

Во второй главе диссертации основное место занимает исследование граничных задач для трёхмерных вырождающихся неклассических (составных) систем дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. В неограниченных областях типа полупространства исследованы начально-краевые и видоизменённые начально-краевые задачи, а в ограниченных областях исследованы смешанные и граничные задачи типа задачи Римана-Гильберта. Результаты этой главы опубликованы в работах [1-А, 2-А, 3-А, 4-А, 7-А, 8-А, 9-А, 10-А, 16-А, 17-А].

В третьем параграфе главы 2 исследованы начально-краевые задачи (задачи I и II) для систем уравнений

$$\begin{aligned} u_x + v_y - z^p w_z &= 0, & s_x - v_z + w_y &= 0, \\ s_y + u_z - w_x &= 0, & s_z - u_y + v_x &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

символ которой имеет вид

$$\chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)[\xi_1^2 + \xi_2^2 - z^p \xi_3^2].$$

где $p \in (3/2, 2)$ и

$$\begin{aligned} u_x + v_y - w_z &= 0, & z^p s_x - v_z + w_y &= 0, \\ z^p s_y + u_z - w_x &= 0, & s_z + z^q (v_x - u_y) &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

с характеристическим определителем

$$\chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -[z^{p+q}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_3^2][\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2],$$

где p, q - числа, одновременно не равные нулю и удовлетворяющие неравенствам $p + q + 2 > 0, q > -1$.

Доказано, что задача I при порядок вырождения p удовлетворяет условию $3/2 < p < 2$ для любых функций $f(x, y) \in C(R^2), g(x, y) \in C^3(R^2)$, причём $f(x, y)$ – ограниченная и $|\nabla g| \in L_{q,2}(R^2), q > 2$, имеет регулярное решение, определяемое с точностью до произвольной постоянной, а задача II при постоянные p и q одновременно не равны нулю и $p + q + 2 > 0, q > -1$ для любых функций $f \in C(R^2), g \in C^3(R^2), h \in C^2(R^2)$, причём $f(x, y)$ – ограниченная и $h \in L_{r,2}(R^2), r > 2$ имеет регулярное решение, определяемое до произвольной постоянной (теоремы 2.5 и 2.6).

В четвёртом параграфе главы 2 исследованы видоизменённые начально-краевые задачи (задачи III и IV) для более общих систем уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} u_x + v_y - z^m w_z &= 0, & z^\mu s_x - v_z + z^m w_y &= 0, \\ z^\mu s_y + u_z - z^m w_x &= 0, & z^\mu s_z - u_y + v_x &= 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

при $\mu > 1, m > 3$, а также вида

$$\begin{aligned} z^m(u_x + v_y) - w_z &= 0, & z^n(s_x + w_y) - v_z &= 0, \\ z^n(s_y - w_x) + u_z &= 0, & s_z + z^p(v_x - u_y) &= 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где числа m, n, p подчинены следующим условиям: $p > -1, m + n + 2 > 0, n + 2m + 3 < 0$. Характеристические определители этих систем равны

$$\chi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -z^{\mu+m}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2)$$

и

$$\chi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -[z^{n+p}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_3^2][z^{n+m}(\xi_1^2 + \xi_2^2) - \xi_3^2].$$

Следовательно, в каждой точке полупространства R_+^3 обе системы являются системами составного типа, а на плоскости $z = 0$ вырождаются.

Основными результатами данного параграфа являются теоремы 2.7 и 2.8 утверждающие существование регулярного решения задач с точностью до произвольного постоянного.

Пусть $\Omega = \{(x, y, z): z > 0, (x, y) \in G \subset R^2\}$ – цилиндр с боковой поверхностью $H = \{(x, y, z): z > 0, (x, y) \in \Sigma = \partial G\}$ и границей $\Gamma = H \cup G$.

В пятом параграфе главы 2 (п. 2.5.1) для системы дифференциальных уравнений первого порядка (4.1), где $p < 1$ изучено следующая видоизменённая начально-краевая задача V: найти регулярное в области Ω решение (s, u, v, w) системы (4.1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} s|_{z=0} &= f(x, y), \quad s|_H = 0, \quad s(x, y, \infty) = 0, \\ w|_{z=0} &= \eta(x, y) \\ (au + bv)|_\Sigma &= g(x, y), \end{aligned}$$

где заданные функции $f \in C_v^1(\bar{G})$, $\eta \in C^4(\bar{G})$, $\theta \in C^3(\bar{G}) \cap C_v^1(\bar{G})$, $a, b, g \in C_v(\Sigma)$, $f(x, y)|_\Sigma = \eta(x, y)|_\Sigma = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

Доказана, что задача V нётерова и её индекс равен индексу функции $\bar{\lambda}(\zeta) = b(\zeta) - ia(\zeta)$ на границе области G (теорема 2.9).

Нужно отметить, что аналогично исследуется задача типа задачи V и для вырождающейся неклассической системы вида

$$\begin{aligned} z^p(u_x + v_y) - w_z &= 0, & s_x - v_z + w_y &= 0, \\ s_y + u_z - w_x &= 0, & s_z - u_y + v_x &= 0. \end{aligned}$$

В п. 2.5.2. рассматривается следующая система уравнений с младшими членами

$$\begin{aligned} w_z - u_x - v_y + u - v &= 0, \\ v_z - z^p s_x - z^q w_y + z^p s + z^q w &= 0, \\ u_z + z^p s_y - z^q w_x + z^p s - z^q w &= 0, \\ s_z + v_x - u_y + u + v &= 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

характеристический определитель которой имеет вид

$$\chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -[z^p(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_3^2][z^q(\xi_1^2 + \xi_2^2) - \xi_3^2],$$

где p, q - любые положительные числа. Следовательно система (4.5) для любого $z \neq 0$ является системой составного типа, а при $z = 0$ система вырождается. Для системы (4.5) в цилиндре Ω исследована задача VI: найти в цилиндре Ω решение (s, u, v, w) системы (4.5), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} s|_{z=0} &= f_0(x, y), \quad s|_H = 0, \quad s(x, y, \infty) = 0, \\ w|_{z=0} &= g_0(x, y), \quad w_z|_{z=0} = h(x, y), \quad w|_H = 0, \\ (\alpha u + \beta v)|_\Sigma &= \gamma(x, y), \end{aligned}$$

где $f_0 \in C_v^1(\bar{G})$, $g_0 \in C^4(\bar{G})$, $h \in C^3(\bar{G}) \cap C_v^1(\bar{G})$, $\alpha, \beta, \gamma \in C_v(\Sigma)$, причем $f_0|_\Sigma = g_0|_\Sigma = 0$ и $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Доказана, что задача VI нётерова и её индекс равен индексу функции $\bar{a}(\zeta) = \alpha - i\beta$ на границе G (теорема 2.10).

Пусть $\Omega = \{(x, y, z): x^2 + y^2 < a^2, 0 < z < h\}$ – круговой цилиндр радиуса a , с границей Γ и основанием G .

В п. 2.5.3 диссертации рассматривается неклассическая система

$$\begin{aligned} u_x + v_y - (x^2 + y^2)^p w_z &= 0, & s_x + w_y - v_z &= 0, \\ s_y - w_x + u_z &= 0, & s_z + v_x - u_y &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

с характеристическим определителем

$$\chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)[\xi_1^2 + \xi_2^2 - (x^2 + y^2)^p \xi_3^2],$$

где p - произвольное вещественное число. Следовательно, система (4.6) во всех точках пространства R^3 является системой составного типа, за исключением точек оси Oz , в которых она вырождается.

Здесь исследуется характер разрешимости начально-краевой задачи (задача VII) и ряд других задач (задачи VIII-IX) для некоторого класса вырождающихся составных систем (теоремы 2.11-2.13).

Третья глава диссертации состоит из четырёх параграфов (§§ 3.1 - 3.4) и посвящена исследованию граничных задач для четырёхмерных аналогов модельных и вырождающихся неклассических систем уравнений первого порядка. Результаты этой главы опубликованы в работах [5-А, 6-А, 11-А, 12-А, 13-А, 14-А, 15-А, 18-А].

В первом параграфе главы 3 (п. 3.1.1) рассматривается следующая модельная неклассическая система

$$\begin{aligned} s_t - u_x - v_y + w_z &= 0, \\ s_x + u_t - v_z + w_y &= 0, \\ s_y + u_z + v_t - w_x &= 0, \\ s_z - u_y + v_x + w_t &= 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Характеристический определитель системы (4.7) имеет вид

$$\chi(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)(\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2).$$

Следовательно, эта система неклассического (составного) типа, обладающей двумя семействами вещественных характеристик, представленных семействами конусов

$$\sqrt{t^2 + x^2 + y^2} - z = \text{const}, \quad \sqrt{t^2 + x^2 + y^2} + z = \text{const}.$$

В полупространстве $R_+^4 = \{(t, x, y, z): (t, x, y) \in R^3, z > 0\}$ с границей $\Gamma = \{z = 0\}$ исследована задача X: найти решение (s, u, v, w) системы (4.7) из класса $C^1(R_+^4)$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} w(t, x, y, z)|_{z=0} &= f(t, x, y), \quad w_z(t, x, y, z)|_{z=0} = g(t, x, y), \\ s(t, x, y, z)|_{z=0} &= h_1(t, x, y), \\ u(t, x, y, z)|_{z=0} &= h_2(t, x, y), \\ v(t, x, y, z)|_{z=0} &= h_3(t, x, y), \end{aligned}$$

где заданные на Γ функции $f(t, x, y) \in C^3(\Gamma)$, $g(t, x, y) \in C^2(\Gamma)$, а функции $h_1(t, x, y)$, $h_2(t, x, y)$, $h_3(t, x, y) \in C(\Gamma)$.

Доказана, что задача X в полупространстве R_+^4 всегда разрешима и имеет единственное решение, представляемое в явном виде формулами (3.15) и (3.16) (теорема 3.1).

Далее, в п. 3.1.2 в двугранном угле $E: \{y > 0, z > 0\}$ [45, с. 50] для более общей системы вида

$$\begin{aligned} z^m(s_t - u_x - v_y) + w_z &= 0, \\ s_x + u_t - v_z + w_y &= 0, \\ s_y + u_z + v_t - w_x &= 0, \\ s_z - u_y + v_x + w_t &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

с характеристическим определителем

$$\chi(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)(z^m[\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2] - \xi_3^2)$$

исследована задача XI: найти решение (s, u, v, w) системы (4.8) из класса $C^1(E)$, убывающее на бесконечности и удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} k \lim_{z \rightarrow 0} z^{-(1+m)} w(t, x, y, z) &= \tilde{f}(t, x, y), \\ w(t, x, y, z)|_{y=0} &= g(t, x, z), \quad w_y(t, x, y, z)|_{y=0} = h(t, x, z), \\ U(t, x, y, z)|_{z=0} &= b(t, x, y), \end{aligned}$$

где $\tilde{f}(t, x, y) \in C^1(\Gamma)$, $g(t, x, z) \in C^3(\Gamma')$, $h(t, x, z) \in C^2(\Gamma')$, $b(t, x, y) \in C(\Gamma)$, а $k = \left(\frac{2+m}{2}\right)^{\frac{2m+2}{m+2}}$, $\Gamma = \{z = 0\}$, $\Gamma' = \{y = 0\}$.

Получен следующий результат: задача XI в двугранном угле E всегда разрешима и её решение представляется в явном виде формулами (3.27) и (3.16) (теорема 3.2).

Далее, в п. 3.1.3 рассмотрено одно из возможных обобщений системы (4.7) в следующем виде

$$\begin{aligned}
s_t - u_x - v_y + z^p w_z &= 0, \\
s_x + u_t - z^p v_z + w_y &= 0, \\
s_y + z^p u_z + v_t - w_x &= 0, \\
z^p s_z - u_y + v_x + w_t &= 0,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

где p – положительная постоянная, причем $p \neq 1$. Характеристический определитель данной системы имеет вид

$$\chi(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + z^{2p} \xi_3^2)(\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 - z^{2p} \xi_3^2).$$

Система (4.9) во всём пространстве R^4 является составной, кроме, может быть, точек гиперплоскости $z=0$, в которых вырождается.

Рассмотрим задачу XII: найти решение (s, u, v, w) системы (4.9) из класса $C^1(R_+^4)$, удовлетворяющее на границе $\Gamma: \{z = 0\}$ полупространства условиям

$$\begin{aligned}
w(t, x, y, z)|_{z=0} &= f(t, x, y), \lim_{z \rightarrow 0} z^p w_z(t, x, y, z) = g(t, x, y), \\
s(t, x, y, z)|_{z=0} &= h_1(t, x, y), \\
u(t, x, y, z)|_{z=0} &= h_2(t, x, y), \\
v(t, x, y, z)|_{z=0} &= h_3(t, x, y),
\end{aligned}$$

где функции $f(t, x, y) \in C^3(\Gamma)$, $g(t, x, y) \in C^2(\Gamma)$, а функции $h_1(t, x, y)$, $h_2(t, x, y)$, $h_3(t, x, y) \in C(\Gamma)$.

Результатом данного параграфа является теорема 3.3: задача XII для системы (4.9) в полупространстве R_+^4 всегда разрешима и имеет единственное решение, представляемое в явном виде.

Пусть $\Omega \subset R^4$ – односвязная область, ограниченная в полупространстве $z > 0$ поверхностью Ляпунова γ и участком G гиперплоскости $z = 0$. Причём поверхность γ однозначно проектируется на G . Пусть $\Gamma = G \cup \gamma$.

В параграфе §3.2 в области Ω для системы (4.9) исследована следующая задача XIII: найти регулярное решение (s, u, v, w) системы (4.9) удовлетворяющее условиям

$$w(M, z)|_{z=0} = f(M), \lim_{z \rightarrow 0} z^p w_z(M, z) = g(M)$$

$$s|_\Gamma = \phi_1(M, z), \quad u|_\Gamma = \phi_2(M, z), \quad v|_\Gamma = \phi_3(M, z),$$

где $M = (t, x, y)$, функции $f(M) \in C^3(G)$, $g(M) \in C^2(G)$, $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in C^1(\Gamma)$.

Доказана, что задача XIII в области Ω однозначно разрешима и её решение представляется в явном виде формулами Кирхгофа и (3.39) (теорема 3.4).

Через Ω обозначим односвязную ограниченную область: $\{(t, x, y, z): t \in R^1, (x, y) \in G, 0 < z < \varphi(x, y)\}$, где $\varphi \in C^1(G)$ - поверхностью Ляпунова, а G - ограниченная область в R^2 . С помощью $\Gamma = G \cup \varphi$ обозначим всю границу области. В §3.3 рассмотрена система (4.7) с младшими членами

$$\begin{aligned} s_t - u_x - v_y + w_z &= a_{11}s + a_{12}u + a_{13}v + a_{14}w, \\ s_x + u_t - v_z + w_y &= a_{21}s + a_{22}u + a_{23}v + a_{24}w, \\ s_y + u_z + v_t - w_x &= a_{31}s + a_{32}u + a_{33}v + a_{34}w, \\ s_z - u_y + v_x + w_t &= a_{41}s + a_{42}u + a_{43}v + a_{44}w, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

- заданная матрица с вещественными элементами. Здесь исследована задача XIV: найти регулярное решение (s, u, v, w) системы (4.10) в области Ω , удовлетворяющее условиям

$$w(t, x, y, z)|_{z=0} = f_1(t, x, y), \quad w_z(t, x, y, z)|_{z=0} = f_2(t, x, y),$$

$$U(t, x, y, z)|_\Gamma = 0.$$

где $f_1(t, x, y)$, $f_2(t, x, y)$ - заданные достаточно гладкие функции, $U = (s, u, v)$.

Имеет место следующая теорема 3.5: пусть матрица коэффициентов при младших членах (4.7) имеет вид (3.44) и область Ω достаточно мала. Тогда задача XIV является фредгольмовой.

В пункте 3.4.1 параграфа §3.4 в полупространстве $R_+^4 = \{(t, X): t > 0, X \in R^3\}$ с границей $\Gamma = \{t = 0\}$ рассмотрена система

$$\begin{aligned} s_t + u_x + v_y + w_z &= 0, \\ s_x + u_t + v_z - w_y &= 0, \\ s_y - u_z + v_t + w_x &= 0, \\ s_z + u_y - v_x + w_t &= 0, \end{aligned}$$

или в векторной форме

$$\begin{aligned} s_t + \operatorname{div} U &= 0, \\ \operatorname{grad} s + U_t - \operatorname{rot} U &= 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

где $U = (u, v, w)$, операции grad , div и rot по переменным x, y, z .

Через $\mathcal{M}$ обозначим класс функций (или вектор-функций) $C^2(R_+^4) \cap C^1(\bar{R}_+^4)$. Для системы (4.11) рассмотрена следующая задача XV: найти решение (s, U) системы (4.11) из класса $\mathcal{M}$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{aligned} s(0, X) &= s_0(X), \\ s_t(0, X) &= s_1(X), \\ U(0, X) &= U_0(X) \text{ и } \lim_{|x| \rightarrow \infty} U(t, X) = 0, t \geq 0. \end{aligned}$$

Доказана, что если функции $s_0(X), s_1(X)$ и вектор-функция $U_0(X)$ гладкие и такие, что интегралы в формулах (3.70) и (3.77) вместе с их производными являются абсолютно и равномерно сходящимися, то формулы (3.76), (3.77) определяют классическое решение задачи XV, а вообще они дают обобщённое решение задачи.

В пункте 3.4.2. рассмотрена более общая чем (4.11) система:

$$\begin{aligned} a(t)s_t + u_x + v_y + w_z &= 0, \\ s_x + a(t)u_t + v_z - w_y &= 0, \\ s_y - u_z + a(t)v_t + w_x &= 0, \\ s_z + u_y - v_x + a(t)w_t &= 0, \end{aligned} \tag{4.12}$$

где $a(t)$ такая непрерывная на $R_+ = [0, \infty)$ функция, что $a(0) = 0$, $a(t) > 0$ при $t > 0$, интеграл $\int_0^1 \frac{d\tau}{a(\tau)}$ сходящийся, а интеграл $\int_1^\infty \frac{d\tau}{a(\tau)}$ расходящийся.

Характеристическая форма системы (4.12) имеет вид

$$\chi(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (a^2 \xi_0^2 + |\xi|^2)(a^2 \xi_0^2 - |\xi|^2), \quad |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2.$$

Следовательно, система (4.12) в каждой точке пространства $R^4 \setminus \{t = 0\}$ является системой составного типа, а на гиперплоскости $t = 0$ вырождается.

Систему (4.12) перепишем в векторной форме

$$\begin{cases} a(t)s_t + \operatorname{div} U = 0, \\ \operatorname{grad} s + a(t)U_t - \operatorname{rot} U = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Для системы (4.13) поставлена следующая задача XVI: найти в полупространстве R_+^4 решение системы (4.13) из класса $\mathcal{M}$, принадлежащее при каждом $t \geq 0$ пространству S' и удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} s(0, X) &= s_0(X), \\ \lim_{t \rightarrow +0} a(t) s_t(t, X) &= s_1(X), \\ U(0, X) &= U_0(X), \end{aligned}$$

здесь s_0, s_1, U_0 — заданные на R^3 функции из S' .

Доказано, что решение задачи XVI единственно и даётся формулами (3.85).

В п. 3.4.3 в полупространстве $R_+^4 = \{t > 0\}$ рассмотрено ещё одно из возможных обобщений системы (4.11) в виде

$$\begin{aligned} s_t + a(t)(u_x + v_y + w_z) &= 0, \\ s_x + u_t + v_z - w_y &= 0, \\ s_y - u_z + v_t + w_x &= 0, \\ s_z + u_y - v_x + w_t &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} s_t + a(t) \operatorname{div} U &= 0, \\ \operatorname{grad} s + U_t - \operatorname{rot} U &= 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $a(t)$ – такая непрерывная на R_+ функция, что $a(0) = 0, a(t) > 0 \forall t > 0$ и интеграл $\int_0^\infty a(\rho) d\rho$ расходящийся.

Характеристический определитель системы равен

$$\chi(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_0^2 + |\xi|^2)(\xi_0^2 - a(t)|\xi|^2), \quad |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2.$$

При $t > 0$ система (4.14) имеет составной тип, а при $t = 0$ вырождается.

Рассмотрена задача XVII: найти в полупространстве R_+^4 решение системы (4.14) из класса $\mathcal{M}$, принадлежащее при каждом $t \geq 0$ пространству S' и удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} s(0, X) &= s_0(X), \\ \lim_{t \rightarrow +0} \frac{s_t(t, X)}{a(t)} &= s_1(X), \\ U(0, X) &= U_0(X), \end{aligned}$$

здесь s_0, s_1, U_0 – заданные на R^3 функции из S' .

Решение этой задачи найдена аналогично как решение задачи XVI и даётся формулами

$$\begin{aligned} s(t, X) &= v_t[\tau(t), X], \\ U(t, X) &= -\operatorname{grad} v[\tau(t), X] + \frac{\tau(t)}{\pi^2} \int_{R^3} \frac{U_0(Y) + \operatorname{grad} \varphi(Y)}{\{[\tau(t)]^2 + |X - Y|^2\}^2} dY, \end{aligned}$$

где $v(t, X)$ – решение задачи (3.84) для волнового уравнения.

Далее рассмотрена начально-краевая задача XVIII и найдены условия однозначной разрешимости и формула для решения (теорема 3.7).

ВЫВОДЫ

Сформулируем основные выводы, вытекающие из полученных результатов диссертационного исследования.

- На основе модельной неклассической системы у.ч.п. первого порядка созданы вырождающиеся системы у.ч.п. в трёхмерных и четырёхмерных областях с разными характерами вырождения на границах областей [1-А], [5-А], [6-А], [7-А], [8-А].
- Найдены формулы для выражения общего решения полученных систем через решения уравнений Лапласа, EPD и GASPT [1-А], [8-А].
- Доказаны теоремы единственности решений задачи Коши в полупространстве $R_+^3 = \{(x, y, z): (x, y) \in R^2, z > 0\}$ для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (EPD) и задачи Дирихле в полупространстве R_+^3 для уравнения гидродинамической осесимметрической теории потенциала (GASPT) [7-А, 16-А, 17-А].
- Получены теоремы существования и формулы решений смешанных краевых задач в R_+^3 для вырождающихся составных систем четырех у.ч.п. [2-А, 3-А, 4-А, 7-А, 9-А, 16-А, 17-А].
- Получены условия нётеровости краевых задач Римана-Гильберта и подсчитан индекс задач для вырождающихся составных систем у.ч.п., а также систем с младшими членами [2-А, 3-А, 4-А, 10-А].
- Доказаны теоремы существования решений и найдены формулы решений краевых задач в полупространстве $R_+^4 = \{(t, x, y, z): (t, x, y) \in R^3, z > 0\}$, в двугранном угле $E = \{(t, x, y, z): y > 0, z > 0\}$ и в ограниченной области из R_+^4 с участком границы на гиперплоскости $z = 0$ для вырождающихся неклассических систем четырех у.ч.п. первого порядка с четырьмя независимыми переменными [5-А, 6-А, 11-А, 13-А, 14-А, 15-А, 18-А].
- Установлена теорема о фредгольмовости начально-краевых задач для неклассических систем четырех у.ч.п. с младшими членами.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты, полученные в ходе проведённого исследования, преимущественно носят теоретический характер. Разработанные методы решения краевых задач могут быть использованы при изучении различных классов неклассических систем у.ч.п., включая вырождающиеся системы с тремя и четырьмя независимыми переменными. Разработки, представленные во 2-й и 3-й главах диссертации, обладают практической значимостью и могут применяться при проведении специальных учебных курсов для студентов и магистрантов математических направлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

А) Список использованных источников

1. Бабич, В.М. Линейные уравнения математической физики [Текст] / В.М. Бабич, М.Б. С.Г. Капилевич, Г.И. Михлин, П.М. Натансон, Риз, Л.Н. Слободецкий, М.М. Смирнов. –М.: Наука, 1964. – 367 с.
2. Байзаев, С. О решениях полиномиального роста многомерной обобщенной системы Коши-Римана [Текст] / С. Байзаев // Уфимский математический журнал. 2015. Т. 7, № 3. – С. 3 – 8.
3. Байзаев, С. О некоторых функциональных уравнениях в пространствах Шварца и их приложениях [Текст] / С. Байзаев, Рахимова М.А. // Уфимский математический журнал. 2018. Т. 10, № 1. – С. 3 – 13.
4. Байзаев, С. О построении регулярных решений одного класса обобщенных систем Коши-Римана с ограниченными на всей плоскости коэффициентами [Текст] / С. Байзаев, Баротов Р.Н. // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. 2024. Т. 166, кн. 3. - С. 297–305.
5. Байзаев, С. Осори мунтахаб. Избранные труды. Selected works [Текст] / С. Байзаев. –Худжанд: Дабир, 2024. -350 с.
6. Березанский, Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов [Текст] / Ю.М. Березанский. – Киев: «Наукова думка», 1965. – 799 с.
7. Берс, Л. Уравнения с частными производными [Текст] / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. –М.: Мир, 1966. – 351 с.
8. Берхин, П.Е. Начальная краевая задача для одной составной системы [Текст] / П.Е. Берхин // Сиб. мат. журн. - 1976. - Т.17. - №1. - С. 12–20.
9. Бицадзе, А.В. Об уравнениях смешанно–составного типа [Текст] / А.В. Бицадзе // Некоторые проблемы математики и механики. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР. - 1961. – 268 с.
10. Бойматов, К.Х. Об асимптотике спектра вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов, далеких от самосопряженных [Текст] / К.Х.

Бойматов // Докл. РАН. – 1995, - Т.345. - №3. - С. 295-299.

11. Бойматов, К.Х. Многомерные системы дифференциальных уравнений составного типа с негладкими коэффициентами [Текст] / К.Х. Бойматов // ДАН СССР. - 1990. - Т. 313. - №3. С. 525–528.

12. Ватсон, Г.Н. Теория Бесселевых функций [Текст] / Г.Н. Ватсон. – М.: Издательства иностранной литературы, 1949. –804 с.

13. Векуа, И.Н. Об одном обобщении интеграла Пуассона для полуплоскости [Текст] / И.Н. Векуа // ДАН СССР. - 1947. - Т.56. - №3. - С. 229–231.

14. Векуа, И.Н. Обобщенные аналитические функции [Текст] / И.Н. Векуа. – М.: Наука, 1988. –509 с.

15. Вишик, М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений [Текст] / М.И. Вишик // Мат. сборник. - 1951. - Т.29. - №3. - С. 615–676.

16. Владимиров, В.С. Обобщённые функции в математической физике [Текст] / В.С. Владимиров. - М.: Наука, 1976. – 280 с.

17. Волкодавов, В. Ф. Решение видоизмененной задачи Коши методом Римана для одного пространственного аналога уравнения Эйлера–Дарбу с отрицательным параметром [Текст] / В. Ф. Волкодавов, И. Н. Родионова, С. В. Бушков // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т.36, №4, - С. 552–554.

18. Врагов, В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики [Текст] / В.Н. Врагов. –Новосибирск: НГУ. - 1983. –84с.

19. Гатабон, Д. Об одной краевой задаче для системы уравнений составного типа второго порядка [Текст] / Д. Гатабон // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13. - №2. – С.290–293.

20. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы [Текст] / Г.Б. Двайт. - М.: Наука, 1977. – 224 с.

21. Джураев, А.Д. Граничная задача для системы уравнений первого порядка составного типа [Текст] / А.Д. Джураев // Докл. АН Тадж. ССР. 1964. -Т.7, №10. – С.3–7.

22. Джураев, А.Д. Системы уравнений составного типа [Текст] / А.Д.

Джураев. –М.: Наука, 1972, – 227 с.

23. Джураев, А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений [Текст] / А.Д. Джураев. –М.: Наука, 1987. – 415 с.

24. Джураев, А.Д. О некоторых пространственных системах составного типа [Текст] / А.Д. Джураев // Комплексный анализ и его приложения. –М.: Наука, 1977. - С. 217–223.

25. Джураев, А.Д. О нормальной разрешимости и индексе систем первого порядка составного типа [Текст] / А.Д. Джураев, Э. Мухамадиев // ДАН СССР. - 1977. - Т. 235, №4. – С. 753 – 756.

26. Джураев, Т.Д. Об одной краевой задаче для уравнения составного типа [Текст] / Т.Д. Джураев // Доклады АН Узб.ССР. - 1962. - №4. - С. 5–8.

27. Джураев Т.Д. Об одной краевой задаче для уравнения $\frac{\partial}{\partial x} \Delta u = 0$ [Текст] / Т.Д. Джураев // Исследование по дифференциальным уравнениям. –Ташкент: Изд-во АН Узб.ССР. - 1963.

28. Диденко, В. П. О некоторых системах дифференциальных уравнений смешанного и смешанно-составного типов [Текст] / В. П. Диденко // Дифференциальные уравнения. – 1966. – Т.2, №1. – С. 33–46.

29. Дубля, З. Д. О задаче Дирихле для системы уравнений составного типа [Текст] / З. Д. Дубля // Дифференциальные уравнения. – 1978. - Т14. - №4. – С.731–733.

30. Дубля, З. Д. О задаче Дирихле для системы составного типа, аналогичной уравнению А. В. Бицадзе [Текст] / З. Д. Дубля // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т.15. - №1. – С. 171–172.

31. Жигжитжапов, Б.В. Краевая задача для одного класса уравнений составного типа с вырождением [Текст] / Б.В. Жигжитжапов, А.И. Кожанов // Материалы VIII Международной конференции Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО23). Улан-Удэ, 2023 г., с. 104-105.

32. Иззатуллоев, Д. Переопределенные линейные системы двух и трех дифференциальных уравнений первого порядка с сингулярной и

сверхсингулярной точками [Текст]: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Д. Иззатуллоев. -Душанбе. 2012. – 23 с.

33. Исхоков, С.А. О конечномерности ядра некоторых вырождающихся эллиптических операторов недивергентного типа [Текст] / С.А. Исхоков // Доклады НАНТ. - 2022. Т. 65, №3-4. – С. 157 – 161.

34. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст] / Э. Камке. –М.: Наука, 1976. –576 с.

35. Капилевич, М.Б. Об одном уравнении смешанного эллипτικο-гиперболического типа [Текст] / М.Б. Капилевич // Мат. сборник. - 1952. - Т. 30(72). - №1. - С. 11–38.

36. Келдыш, М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области [Текст] / М.В. Келдыш // ДАН СССР. - 1951. - Т.77. - №2. - С. 181–183.

37. Кратцер, А. Трансцендентные функции [Текст] / А. Кратцер, В. Франц. – М.: ИЛ, 1963. –466 с.

38. Кривенков, Ю.П. О некотором представлении решений уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу через аналитические функции [Текст] / Ю.П. Кривенков // ДАН СССР. - 1957. - Т.116. - №3. - С. 351–354.

39. Кудрявцев, Л.Д. О решении вариационным методом эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области [Текст] / Л.Д. Кудрявцев // ДАН СССР. - 1956. - Т.108. - №1. - С. 16–19.

40. Курант, Р. Методы математической физики, том 2 [Текст] / Р. Курант, Д. Гильберт. –М.: МИР, 1962. – 620 с.

41. Ладыженская, О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения [Текст] / О.А. Ладыженская. –М.: Гостехиздат, 1953. – 280 с.

42. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа [Текст] / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. –М.: Наука, 1973. –576.

43. Леви, Е.Е. О линейных эллиптических уравнениях в частных производных [Текст] / Е.Е. Леви // УМН. - 1941. Выпуск 8. - С. 249–292.

44. Математическая энциклопедия: Уравнение Бицадзе. –М.: Советская энциклопедия, 1977. - Т. 1. - С. 499.
45. Математическая энциклопедия: Двугранный угол. –М.: Советская энциклопедия, 1979. - Т. 2. - С. 50.
46. Мирзоев, С.С. Задача Дирихле для одной неклассической (составной) системы уравнений высшего порядка в полупространстве [Текст] / С.С. Мирзоев, Б.А. Рахмонов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. - 2017, № 1-5. - С. 162–166.
47. Мирзоев, С.С. Обобщение системы уравнений второго порядка составного типа [Текст] / С.С. Мирзоев // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. - 2020, № 4. - С. 110–117.
48. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами [Текст] / Л.Г. Михайлов. - Душанбе, 1963. – 183 с.
49. Муллоев, С.Х. К граничной задаче для одной системы уравнений составного типа [Текст] / С.Х. Муллоев // Доклады АН ТаджССР. - 1969. - Т.12, №3. - С. 6–9.
50. Муртазаев, Д. Граничная задача для системы уравнений составного типа со многими вещественными характеристиками [Текст] / Д. Муртазаев // Доклады АН ТаджССР. - 1970. - Т. 13. - №12. - С. 12–15.
51. Муртазаев, Д. Краевая задача для вырождающейся системы уравнений первого порядка составного типа [Текст] / Д. Муртазаев // Доклады АН ТаджССР. - 1973. - Т. 16. - №4. - С. 7–11.
52. Мухелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения [Текст] / Н.И. Мухелишвили. –М.: Физматгиз, 1968. – 512 с.
53. Никольский, С.М. Курс математического анализа [Текст] / С.М. Никольский. – М.: Физматлит, 2001. – 591 с.
54. Олейник, О.А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области [Текст] / О.А. Олейник // ДАН СССР. - 1952. - Т.87. - №6. - С. 885–888.

55. Ошоров, Б.Б. Краевые задачи для некоторых неклассических систем уравнений [Текст] / Б.Б. Ошоров, Бато Б. Ошоров // Тезисы докладов международной научной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвящённая 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева. 5 – 12 августа 2012 г., - Новосибирск: Сибирское научное издательство. – 2012. - С. 409-410.

56. Ошоров, Б.Б. Трёхмерные аналоги систем уравнений Коши-Римана и Бицадзе [Текст] / Б.Б. Ошоров // Вестник Новосибирского госуниверситета. Серия «Математика, механика, информатика». - 2005. - Т. 5. Выпуск 1. – С. 64 – 68.

57. Паскалев, Г. П. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа высокого порядка [Текст] / Г. П. Паскалев // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т.36, №3. – С.393–399.

58. Парасюк, П.С. Краевые задачи для двух эллиптических дифференциальных уравнений 2-го порядка вырождающейся на границе области [Текст] / П.С. Парасюк // УМН. - 1962. – Т. 14. - С. 215–217.

59. Петровский, И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными [Текст] / И.Г. Петровский. –М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.

60. Раджабов, Н.Р. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями [Текст] / Н.Р. Раджабов. –Душанбе: Изд-во ТГУ им. В.И.Ленина, 1980, часть 1. – 126 с.

61. Раджабов, Н.Р. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями [Текст] / Н.Р. Раджабов. –Душанбе: Изд-во ТГУ им. В.И. Ленина, 1982, часть 3. – 170 с.

62. Раджабов, Н.Р. Переопределённая линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями [Текст] / Н.Р. Раджабов, Мохамед эл Саид – LAP. LAMBERT. Akademik Publishig, - 2011. – 234 с.

63. Раджабова, Л.Н. К теории одного класса гиперболического уравнения с

сингулярными линиями [Текст] / Л.Н. Раджабова // ДАН Республики Таджикистан. - 2006. - Т. 49, № 8. - С. 710-717.

64. Раджабова, Л.Н. Некоторые случаи для одного класса линейных уравнении третьего порядка с сингулярной точкой [Текст] / Л.Н. Раджабова // ДАН Республики Таджикистан. Душанбе. - 1999. Т.17, №4. - С. 41-49.

65. Рахимова, М.А. Полиномиальные решения переопределенных систем уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами [Текст] / М.А. Рахимова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физ.-мат., хим., геол. и тех. наук. - 2017. - №4 (169). – С. 3 – 13.

66. Рахмонов, Б.А. Начально-краевые задачи для неклассических систем уравнений второго порядка с переменными коэффициентами [Текст] / Б.А. Рахмонов // ДАН Республики Таджикистан. - 2014. - Т. 57, № 7. - С. 544-550.

67. Рахмонов, Б.А. Об одном обобщении вырождающейся неклассической системы уравнений 4-го порядка [Текст] / Б.А. Рахмонов // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физ.-мат., хим., геол. и тех. наук. - 2015. - №3(160). – С. 24 – 30.

68. Рахмонов, Б.А. Граничная задача в двугранном угле для многомерной неклассической системы уравнений с сингулярностью на границе [Текст] / Б.А. Рахмонов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. - 2016. - № 1-1(192). - С. 14–17.

69. Саидов, К.Ш. К задаче Римана–Гильберта для одной вырождающейся системы уравнений первого порядка [Текст] / К.Ш. Саидов // Дифференциальные уравнения. - 1987. - Т. 23. - №9. - С. 1585–1590.

70. Салахитдинов, М.С. Уравнения смешанно–составного типа [Текст] / М.С. Салахитдинов. –Ташкент: Фан, 1974. – 156 с.

71. Сангинов, А. К задаче о наклонной производной для системы уравнений составного типа [Текст] / А. Сангинов // Доклады АН ТаджССР. - 1969. - Т.12. - №7. - С. 8–12.

72. Сатторов, А. Интегральные представления и решения задач Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений вида Гельмгольца на плоскости [Текст] / Сатторов А., Джобиров Ё // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. -

2020. - № 1. - С. 25–44.

73. Сатторов, А.С. Интегральные представления и решения задач типов Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений первого рода вида Гельмгольца в плоскости и пространстве [Текст] / Сатторов А.С., Назаров Дж.Ю. // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. - 2020. - № 1. - С. 78–93.

74. Сатторов, А.С. Интегральное представление и решение задачи Коши для некоторых вырождающихся дифференциальных уравнений типа Гельмгольца в пространстве [Текст] / Сатторов А.С., Джобиров Ё.Р., Саъдулозода Ш.Н. // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. - 2020. - № 2. - С. 51–68.

75. Сатторов, А.С. Муодилаҳои дифференсиалии таназзулбанда [Текст] / Сатторов, А.С. – Душанбе: ДМТ, 2021. - 640 с.

76. Сафаров, Д.Х. Смешанная граничная задача для системы трех уравнений составного типа [Текст] / Д.Х. Сафаров // Доклады АН ТаджССР. - 1974. - Т.17. - №3. - С.8–12.

77. Сафаров, Д.Х. Граничные задачи для системы уравнений составного типа в трехмерных областях [Текст] / Д.Х. Сафаров // Доклады АН ТаджССР. - 1977. - Т.20. - №12. - С. 8–11.

78. Сафаров, Д.Х. О системах уравнений с частными производными второго порядка [Текст] / Д.Х. Сафаров // Дифференц.уравн. – 1984. - Т. 20. - №4. - С. 716–719.

79. Сафаров, Д.Х. Об одном аналоге системы Мойсила-Теодореско [Текст] / Д.Х. Сафаров // ДАН СССР. - 1984. - Т.277. №5. - С. 1070–1073.

80. Сафаров, Д.Х. Начально–краевые задачи для системы уравнений составного типа [Текст] / Д.Х. Сафаров // Доклады АН ТаджССР. - 1984. - Т.27. - №2. - С. 66–69.

81. Сафаров, Д.Х. О системах уравнений с частными производными первого порядка составного типа [Текст] / Д.Х. Сафаров // Дифференц.уравн. - 1985. - Т.21. - №2. - С. 272–276.

82. Сафаров, Д.Х. Об одной начальной задаче для многомерной неклассической системы [Текст] / Д.Х. Сафаров // Доклады АН ТаджССР. - 1990.

- Т.33. - №8. - С. 505–508.

83. Сафаров, Д.Х. Граничные задачи для многомерных неклассических систем уравнений в частных производных [Текст]: автореф. дис. ... докт. физ.–мат. наук / Д.Х. Сафаров. – Новосибирск, 1996.

84. Сафаров, Д.Х. Неклассические системы уравнений [Текст] / Д.Х. Сафаров. – Душанбе: Дониш, 2008. – 431 с.

85. Сафаров, Д.Х. Обобщённая эллиптическая система уравнений с сингулярностью на границе [Текст] / Д.Х. Сафаров // Доклады АН РТ. - 2014. - Т.57. - №3. - С. 192–196.

86. Сафаров, Д.Х. Представление общего решения многомерных неклассических систем уравнений высшего порядка [Текст] / Д.Х. Сафаров, С.С. Мирзоев // Академический журнал Западной Сибири. - 2015. - Т.11. - №4(59). - С. 61–62.

87. Сафаров, Д.Х. Обобщение одной неклассической системы уравнений второго порядка [Текст] / Д.Х. Сафаров, Б.А. Рахмонов // Доклады АН РТ. - 2016. - Т.59. - №5-6. - С. 195–199.

88. Сергиенко, Л.С. Первая краевая задача для системы дифференциальных уравнений первого порядка, вырождающейся внутри области [Текст] / Л.С. Сергиенко // Аналитические методы в теории эллиптических уравнений. – Новосибирск: Наука СО, 1982. - С. 92–99.

89. Смирнов, В.И. Курс высшей математики, том 2 [Текст] / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – 656 с.

90. Смирнов, В.И. Курс высшей математики, том 4, часть 2 [Текст] / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1981. – 551 с.

91. Смирнов, М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения [Текст] / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1966. – 292 с.

92. Соболев, С.Л. Уравнения математической физики [Текст] / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1966. – 444 с.

93. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 660 с.

94. Тренёва, Г.А. Видоизмененная задача Дирихле для эллиптической системы, вырождающейся на окружности и в нуле [Текст] / Г.А. Тренёва // Вестник ИрГТУ. - 2014, №10(93). - С. 180-184.

95. Усманов З.Д. Обобщенные системы Коши-Римана с сингулярной точкой [Текст] / З.Д. Усманов. Душанбе, 1993. - 244 с.

96. Шукуров, Х.Р. Некоторые граничные задачи для одного класса систем уравнений составного типа [Текст] / Х.Р. Шукуров // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. - 2017, № 1-2. - С. 15–19.

97. Шукуров, Х.Р. Представление решений систем составного типа степенными рядами [Текст] / Х.Р. Шукуров, С.С. Мирзоев // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. - 2019, № 2. - С. 44–49.

98. Эскин, Г.И. О краевой задаче для уравнения $\frac{\partial}{\partial t} P \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0$, $P \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ – эллиптический оператор [Текст] / Г.И. Эскин // Сиб.мат.журн. – 1969. – Т. №6.

99. Эскин, Г.И. Краевые задачи для уравнений с постоянными коэффициентами на плоскости [Текст] / Г.И. Эскин // Матем. сб. – 1962. – Т. 59(101) (дополнительный).

100. Янушаускас, А.И. Гармонические отображения трехмерных областей [Текст] / А.И. Янушаускас // «Дифференциальные уравнения и их применения», вып. 7. – Вильнюс. – 1974. - С. 93—151.

101. Янушаускас, А.И. Многомерные эллиптические системы с переменными коэффициентами [Текст] / А.И. Янушаускас. – Вильнюс : Москлас, 1990. – 180 с.

102. Aldashev, S. Well-posedness of the Tricomi Problem for the Multidimensional Lavrent'ev-Bitsadze Equation [Text] / S. Aldashev // Kazakh Mathematical Journal. – 2022. – Vol. 22, No. 1. – P. 6–14.

103. Begehr, H. On continuous solutions of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity [Text] / H. Begehr, D.-Q. Dai // Journal of Differential Equations. – 2004. – Vol. 196, No. 1. – P. 67–90.

104. Bers, L. Theory of pseudo-analytic function [Text] / N.Y., 1953. 187 c.
105. Davis, R.B. A boundary value Problem for thirdorder linear partial Differential Equations of Composite type [Text] / R.B. Davis // Proceedings Amer. Math.Soc. – 1952. v. 3. – P.751.
106. Davis, R.B. A Special Case of the normal derivative Problem for a thirdorder Composite Partial Differential Equation [Text] / R.B. Davis // Proceedings Amer. Math.Soc. – 1954. v. 5. – P. 720.
107. Gilbert, R. Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations [Text] / R. Gilbert. - New York - London. Acad. Press. - 1969. – P.335.
108. Hadamard, J. Propriétés d'une Equation lineaire aux derivees du quatrieme Ordre [Text] / J. Hadamard // Tohoku Math. - 1933. - V. 37. - P. 133.
109. Handbook of Mathematical Functions [Text] / Editor-in-Chief and Mathematics Editor: Frank W. J. Olver. NIST. 2010. U.S. Department of Commerce and Cambridge University Press. 967 p.
110. Kozhanov, A. I. Composite Type Equations and Inverse Problems [Text] / A. I. Kozhanov. – Utrecht: VSP, 1999.
111. Makatsaria, G. Some properties of the irregular elliptic systems on the plane [Text] / G. Makatsaria // Proceedings of the International Conference on Generalized Analytic Functions and Their Applications. Tbilisi, Georgia, 12 – 14 September 2011, p. 115 – 120.
112. Reissig, M. Special Vekua equations with singular coefficients [Text] / M. Reissig, A. Yu. Timofeev // Applicable Analysis. – 1999. – Vol. 73, No. 1–2. – P. 187–199.
113. Safarov, D.Kh. On Multidimensional Nonclassical Systems of Partial Differential Equations of Second Order [Text] / D.Kh. Safarov // Complex Variables. - 1994. - V.26. - P. 167–175.
114. Safarov, D.Kh. On the theory of nonclassical Differential Equations [Text] / D.Kh. Safarov // Daily News ICM'98. Berlin. 1998. 3. P.4.
115. Safarov, D.Kh. The initial boundary value Problem for Nonclassical systems of Equations of the first order [Text] / D.Kh. Safarov // Abstract of the second Congress

ISAAC'99. - Fukuoka–Japan.- 1999. - P.195–199.

116. Safarov, D.Kh. On well-Posedness of Problems for Nonclassical systems of Equations [Text] / D.Kh. Safarov // Complex Methods for PDE. Kluwer Academic Publishers. - Dordrecht-Boston-London. - 1999. - V. 6. - P. 97–102.

117. Safarov, D.Kh. A kind of Riemann–Gilbert Problem for Nonclassical systems of PDE [Text] / D.Kh. Safarov // Proceedings of the second ISAAC'2000. Kluwer Academic Publishers. - Dordrecht-Boston-London. - 2000. - V. 2. - P. 1515–1521.

118. Safarov, D.Kh. The initial boundary value problem for one Nonclassical systems of Equations of second order [Text] / D.Kh. Safarov // Proceedings of the third ISAAC'2001. Kluwer Academic Publishers. - Dordrecht-Boston-London. - 2001. - V. 3. - P. 107–111.

119. Safarov, D.Kh. On a correctness of the boundary value problem for one non-classical system of PDE [Text] / D.Kh. Safarov // Дифференциальные и интегральные уравнения и смежные вопросы анализа. Материалы международной научной конференции. –Душанбе. - 2005. - С. 176–180.

120. Sjostrand, O. Sur une Equation aux derivees Partielles du Composite [Text] / O. Sjostrand //Arciv for Math. –1936. – V.26A, №1. –P.1–10.

121. Soldatov, A. P. The Riemann–Hilbert boundary value problem for the Moisil–Theodoresco system [Text] / A. P. Soldatov // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – Vol. 239, No. 3. – P. 381–411.

122. Vekua I.N. On one of the elliptic systems with singularities [Text] / I.N. Vekua // Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics. Tokyo. 1969. – P. 142 – 147.

123. Vidic, C. Uber zusammengesetzte Systeme partieller linearer Differentialgleichungen erster Ordnung. [Text] / C. Vidic. – Berlin: Technische Universitat. – 1968.

124. Weinstein, A. On a singular differential operator [Text] / A. Weinstein // Ann. Mat. Pura Appl. [IV] 49. – 1960. - P. 359-366.

125. Wolfersdorf, L. Sjostrandsche Probleme beim einen System vom Partieller Differentialgleichungen vom Zusammengesetzten Typ [Text] / L. Wolfersdorf // Math. Nachr. - 1970. B.46.- P. 323–339.

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

- 1-А. Файзиев М.Г. Формулы представления общего решения одной неклассической системы уравнений первого порядка [Текст] / Д.Х. Сафаров, М.Г. Файзиев // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. 2011. 9(73). - С. 3–7.
- 2-А. Файзиев М.Г. О неклассических системах уравнений с частными производными первого порядка с переменными коэффициентами [Текст] / М.Г. Файзиев // Доклады АН РТ. 2014. - Т.57, №8. - С. 644–652.
- 3-А. Файзиев М.Г. О вырождающихся неклассических системах уравнений первого порядка [Текст] / М.Г. Файзиев // Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2014. №3(156). - С. 20–28.
- 4-А. Файзиев М.Г. Граничные задачи для вырождающихся неклассических систем уравнений первого порядка [Текст] / М.Г. Файзиев // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. 2014. 1/3(134). - С. 14–18.
- 5-А. Файзиев М.Г. О системах дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка [Текст] / Д.Х. Сафаров, М.Г. Файзиев // Доклады АН РТ. 2015. - Т.58, №2. - С. 376–382.
- 6-А. Файзиев М.Г. Об одной краевой задаче для некоторых классов систем составного типа [Текст] / С. Байзаев, М.Г. Файзиев // Учёные записки Худжандского госуниверситета им. академика Б. Гафурова (Серия естественные и экономические науки). 2021, № 2(57). - С.8-14.
- 7-А. Файзиев М.Г. О единственности решения краевых задач для некоторых классов вырождающихся уравнений с частными производными [Текст] / С. Байзаев, М.Г. Файзиев // Вестник Таджикского национального университета (Серия естественных наук). 2021. № 4. - С. 129-139.

2. В других изданиях:

- 8-А. Файзиев М.Г. К теории неклассических систем уравнений первого порядка с переменными коэффициентами [Текст] / Д.Х. Сафаров, М.Г. Файзиев //

Материалы международной научной конференции Современные проблемы теории дифференциальных уравнений и математического анализа, посвященной 80-летию академика АН Республики Таджикистан Джураева Абдухамида Джураевича. Душанбе, 7-8 декабря 2012 г., с. 94–96.

9-А. Файзиев М.Г. Краевые задачи для неклассических систем уравнений с частными производными первого порядка [Текст] / Д.Х. Сафаров, М.Г. Файзиев // Материалы XI Школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". Кабардино-Балкарская Республика, п.Терскол, 4 - 8 декабря 2013 г., с. 65–69.

10-А. Файзиев М.Г. Об одной общей вырождающейся неклассической системе первого порядка [Текст] / М.Г. Файзиев // Учёные записки Худжандского госуниверситета им. академика Б.Гафурова (специальный выпуск). 2014. 2(29), часть 1. С. 258–261.

11-А. Файзиев М.Г. Четырёхмерный аналог неклассических систем уравнений первого порядка [Текст] / М.Г. Файзиев // Материалы республиканской научной конференции "Неклассические уравнения математической физики и их приложения" с участием зарубежных ученых. Узбекистан, Ташкент, 23-25 октября 2014 г., с. 102-103.

12-А. Файзиев М.Г. About the systems of partial differential equations of first order [Text] / Д.Х. Сафаров, М.Г. Файзиев // Materials of the VIII international research and practice conference "Science and Education". Munich - Germany, March , 2015, p. 286–292.

13-А. Файзиев М.Г. Об одном обобщении четырёхмерного аналога неклассических систем уравнений [Текст] / М.Г. Файзиев // Материалы республиканской научно-теоретической конференции "Актуальные проблемы современной математики и её преподавания". Душанбе, 20 декабря 2014 г., с. 141–144.

14-А. Файзиев М.Г. Неклассические системы уравнений первого порядка с применением уравнений векторных полей [Текст] / М.Г. Файзиев // Тезисы докладов республиканской научной конференции "Современные методы

математической физики и их приложения" с участием зарубежных ученых. Узбекистан, Ташкент, 15 - 17 апреля 2015 г., с. 208–210.

15-А. Файзиев М.Г. Об одной четырехмерной неклассической системы уравнений с переменными коэффициентами [Текст] / М.Г. Файзиев // Материалы международной научной конференции Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений, посвященной 80-летию член-корреспондент АН Республики Таджикистан Стеценко Владислава Яковлевича. Душанбе, 27-28 апреля 2015 г., с. 142–143.

16-А. Файзиев М.Г. О единственности решения краевых задач для некоторых классов вырождающихся гиперболических уравнений с частными производными [Текст] / С. Байзаев, М.Г. Файзиев // Материалы республиканской научно-теоретической конференции «Современные проблемы прикладной математики и её роль в развитии технического мышления молодёжи», посвящённой 30-летию Государственной независимости Республики Таджикистан, “Двадцатилетие обучение и развития естественных, точных и математических наук в области нуки и образования”. Хучанд, 29-30 ноября 2021г., с. 95-97.

17-А. Файзиев М.Г. О единственности решения краевых задач для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений с частными производными [Текст] / С. Байзаев, М.Г. Файзиев // Материалы международной научно-практической конференции “О применении дифференциальных уравнений в решении практических задач”. Душанбе, 4 ноября 2021г., с. 26-29.

18-А. Fayziev M. G. On boundary value problems in a half-space for some classes of systems of composite type [Text] / S. Bayzaew, M. G. Fayziev // Abstracts of the VII International scientific conference “Modern problems of applied Mathematics and Information Technologies Al-Khwarizmi 2021” dedicated to the 100th anniversary of the academician Vasil Kabulovich Kabulov, 15-17 November, 2021, Fergana, Uzbekistan, p. 115.