

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
ГОУ «ХУДЖАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА Б. ГАФУРОВА»**

УДК 517.927

ББК 22.161.1

О - 92

На правах рукописи



Охунзода Нозимджон Кобил

**ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ И ГРАНИЧНЫЕ
ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА С
ТРЕМЯ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫМИ, СИНГУЛЯРНЫМИ ИЛИ
СВЕРХСИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ**

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Худжанд – 2025

**Работа выполнена на кафедре математического анализа имени профессора
А. Мухсинова ГОУ «Худжандский государственный университет имени
академика Б. Гафурова»**

**Научный
руководитель:**

Олими Абдуманон Гафорзода,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры математического анализа
имени профессора А. Мухсинова ГОУ
«Худжандский государственный университет
имени академика Б. Гафурова»

**Официальные
оппоненты:**

Расулов Абдурауф Бабаджанович,
доктор физико-математических наук, профессор
кафедры высшей математики «Национальный
исследовательский университет «МЭИ»»

Садриддинов Махмади Махмудович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой высшей математики
Таджикского технического университета имени
академика М.С. Осими

**Ведущая
организация:**

ГОУ «Бохтарский государственный университет
имени Носира Хусрава»

Защита состоится 13 сентября 2025 г. в 12-00 часов на заседании
Диссертационного совета 6D.КОА-084 при Таджикском государственном
университете права, бизнеса и политики по адресу: 735700, г. Худжанд, 17 -й
мкр., дом 1, корпус 5, аудитория 208.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке
Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики, а также
на сайте: [http: // www. tsulpb.tj](http://www.tsulpb.tj).

Автореферат разослан « ____ » _____ 2025 г.

**Ученый секретарь диссертационного
совета 6D.КОА-084, кандидат физико-
математических наук, доцент**

 **Ш.Ф. Мухамедова**

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. К изучению вырождающихся дифференциальных уравнений или дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами приводят многие задачи из теоретической физики, техники, различных частей математической физики, таких как теория поля, теория упругости, теория колебаний, теория гравитации, гидродинамики, газовой динамики, теории автоматического управления и другие [1, 16, 17].

В основополагающих работах М.В. Келдыша, А.В. Бицадзе, М.М. Смирнова выявлены существенные свойства вырождающихся дифференциальных уравнений, в частности, установлены влияние порядка вырождения и значения коэффициентов на структуру множества решений этих уравнений и особенности постановки граничных задач для них. Указанные работы способствовали значительному росту интереса к изучению вырождающихся и сингулярных дифференциальных уравнений.

Обширную информацию об исследованиях по теории вырождающихся и сингулярных дифференциальных уравнений и вкладе советских, зарубежных и отечественных учёных в разработке важных проблем по указанному направлению можно получить, например, по монографиям А.В. Бицадзе, М.М. Смирнова, Н.Р. Раджабова, К.Б. Сабитова, В.В. Катрахова и С.М. Ситника, А. Сатторова, R.P. Gilbert, H. Begehr, в которых имеется подробная библиография по данной теме. В разработке теории вырождающихся и сингулярных дифференциальных уравнений в частных производных огромный вклад внесли А.В. Бицадзе, И.Н. Векуа, В.Ф. Волкодавов, А.Д. Джураев, Т.Д. Джураев, В.А. Ильин, Т.Ш. Кальменов, М.В. Келдыш, В.В. Катрахов, И.А. Киприянов, Л.Д. Кудрявцев, П.И. Лизоркин, Л.Г. Михайлов, С.Г. Михлин, Е.И. Моисеев, А.М. Нахушев, С.М. Никольский, С.П. Пулькин, Н.Р. Раджабов, К.Б. Сабитов, М.С. Салахитдинов, М.М. Смирнов, А.П. Солдатов, С.А. Терсенов, З.Д. Усманов, Ф.И. Франкль, А.И. Янушаускас, Л. Берс, А. Вайнштейн, Р. Джилберт, Р. Керрол, Р. Шоултерр и многие другие.

В нашей республике сингулярные дифференциальные уравнения начал исследовать Л.Г. Михайлов, который по праву считается основателем этой математической школы. В дальнейшем эти исследования были расширены и углублены в различных направлениях им и его учениками Н.Р. Раджабовым З.Д. Усмановым, Г. Джангибековым и А. Мухсиновым.

В задачах прикладного характера и теоретических исследованиях важное место занимают линейные и нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения с различным типом вырождения или сингулярности. Достаточно вспомнить важные приложения уравнений Бесселя, Лагерра, Эрмита, Чебышева,

Лежандра, Эйри, гипергеометрического уравнения, уравнение Эмдена для политропного газа и других [16, 17]. В теории сингулярных уравнений в частных производных, интегральных, интегро - дифференциальных уравнений типов Вольтерра и их переопределённых систем, с помощью соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений эффективно решаются многие теоретические вопросы [11, 12].

Следовательно, изучение обыкновенных дифференциальных уравнений, особенно с переменными коэффициентами, имеющих сингулярности различных типов и порядков представляет собой актуальную задачу.

Степень разработанности научной темы. Тема данной диссертационной работы тесно связана с исследованиями по сингулярным обыкновенным дифференциальным уравнениям, проводимыми в нашей республике под руководством академика Н.Р. Раджабова.

В ряде работ, таких как [11, 12, 19] Н.Р. Раджабовым разработаны универсальные методы исследования линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений разных порядков, их линейных систем, имеющих одну и более слабо сингулярных, сингулярных и сверхсингулярных (особых) точек в коэффициентах в зависимости от расположения этих точек. Согласно предложенной методике в случае одной особой точки, сначала исследуется случай, когда точка совпадает с граничной точкой, а случай совпадения особой точки с внутренней точкой интервала сводится к рассмотренному случаю. В случае, когда уравнения имеют много особых точек в коэффициентах, Н.Р. Раджабов свёл их изучение к изучению ряда соответствующих уравнений с одной граничной особой точкой [19].

В работах А.Г. Олими (Олимова) [5, 6] разработан способ нахождения интегрального представления общего решения уравнений, полученных кратным применением обыкновенных дифференциальных операторов.

Изучались линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго, более высоких порядков, их систем и специальных типов с одной сингулярной точкой в работах Г. Кадилова, Н.Р. Раджабова, О.И. Меликова, М.Я. Дадоджановой, А.Г. Олими (Олимова) [2, 4, 7, 10, 15], с двумя сингулярными точками в работах Н.Р. Раджабова, С.К. Зарифзода (Зарипова), А.Г. Олими, Ш.Э. Мирзоевой, М.Я. Дадоджановой, Н.К. Охунзода (Охунова), С.А. Толибова [8, 9, 14] и с тремя сингулярными точками в работах Х.С. Хидирова [18] и Н.Р. Раджабова, Е. Шишкиной [13].

Обыкновенные дифференциальные уравнения высоких порядков, с переменными коэффициентами, специальные их типы, имеющие три и более сингулярные точки одного порядка, исследованы мало, а относительно случая, когда в указанных уравнениях сингулярные точки имеют разные порядки,

публикаций нами не обнаружено.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Данная диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры математического анализа имени профессора А. Мухсинова ГОУ «Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова» по теме «Исследование классов обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями, разрешимость переопределенных систем дифференциальных уравнений в различных функциональных пространствах, применение групп и алгебры Ли в изучении дифференциальных уравнений» на 2021 – 2025 гг.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Объект исследования. В диссертационной работе изучаются уравнения специального типа

$$A_{(\alpha),(b)}^n y = f(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i} \quad (1)$$

получаемые n -кратным повторным применением обыкновенного дифференциального оператора

$$A_{(\alpha),(b)} y \equiv y' + p(x) \left(\prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i} \right) y - q(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i}$$

по правилу $A_{(\alpha),(b)}^0 y \equiv y$, $A_{(\alpha),(b)}^s y = A_{(\alpha),(b)}(A_{(\alpha),(b)}^{s-1} y)$, $s = \overline{1, n}$, которые рассматриваются на множестве $\Gamma_{(b)} = \Gamma \setminus (b)$ вещественной числовой оси, где $\Gamma = (a, b)$, $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$, $a \leq b_1 < b_2 < b_3 \leq b$, $(\alpha) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\alpha_i > 0$ - действительные числа, n - натуральное число, а точки b_i , $i = 1, 2, 3$, являются сингулярными (особыми) точками уравнения (1) и оператора $A_{(\alpha),(b)}$, с порядком сингулярности (особенности) α_i , которые как в работах [2, 19] считаются слабо сингулярными, сингулярными и сверхсингулярными, соответственно, при $0 < \alpha_i < 1$, $\alpha_i = 1$, $\alpha_i > 1$, $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ - известные функции, непрерывные на отрезке $\bar{\Gamma}$ кроме, быть может, точек b_i , в которых могут иметь разрыв первого рода (именуемое в дальнейшем условием А), а также $p(b_i \pm 0) \neq 0$, соответственно.

Понятие решения уравнения (1) вводится как в работах [2, 5, 6] следующим образом:

Определение. Функция $y(x)$ называется решением уравнения (1), если она подчиняется условиям $A_{(\alpha),(b)}^s y \in C^1(\Gamma_{(b)})$, $s = \overline{0, n-1}$ и выражение $A_{(\alpha),(b)}^n y$

обращает уравнение в тождество относительно точек множества $\Gamma_{(b)}$.

Цель исследования. Получение представления общего решения в интегральном виде для некоторых уравнений специального типа (1) с тремя сингулярными точками разного порядка. Выявление характеристических свойств полученных представлений, с их помощью изучение поведения решений в окрестности особых точек, а также выяснение правильной постановки и исследование граничных задач с условиями в особых точках.

Задачи исследования. В соответствии с поставленной целью выделим следующие задачи:

1. Нахождение представления общего решения в интегральном виде для уравнений специального типа (1):

- с двумя граничными и одной внутренней сингулярной точками;
- с двумя граничными и одной внутренней слабо сингулярной точками;
- с тремя внутренними сверхсингулярными точками;
- с одной левой граничной слабо сингулярной и двумя внутренними сингулярными точками.

2. Установление формул обращения для интегральных представлений общего решения, рассматриваемых уравнений типа (1).

3. Применение полученных интегральных представлений общего решения рассматриваемых уравнений типа (1) для изучения поведения решений в окрестности особых точек.

4. Применение полученных представлений общего решения уравнений типа (1) к выяснению постановки, исследования ряда граничных задач Коши-Рикье и типа линейного сопряжения с условиями в особых точках и нахождения их решения в явном виде.

Предмет исследования. Получение интегрального представления общего решения уравнений типа (1), установление формул обращения представлений, изучение поведения решений рассматриваемых уравнений в окрестности особых точек, постановка, исследование и решение в явном виде задач Коши-Рикье и типа линейного сопряжения.

Методы исследования. В работе используются общие методы теории дифференциальных уравнений, метод получения интегральных представлений, а также современные методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений со многими особыми точками.

Научная новизна исследования. В диссертационной работе впервые получены следующие результаты:

1. Для уравнений специального типа (1):

- с двумя граничными и одной внутренней сингулярной точками;
- с двумя граничными и одной внутренней слабо сингулярной точками;

- с тремя внутренними сверхсингулярными точками;
- с одной левой граничной слабо сингулярной и двумя внутренними сингулярными точками,

получены представление общего решения в интегральном виде, зависящее от n произвольных постоянных.

2. Установлено, что полученные интегральные представления общего решения изучаемых уравнений типа (1) можно рассмотреть и использовать в четырёх равносильных формах.

3. Для полученных интегральных представлений общего решения, рассматриваемых уравнений типа (1) установлены характеристические равенства, служащие для них формулами обращения.

4. Получены утверждения о поведении решений рассматриваемых уравнений типа (1) в окрестности особых точек.

5. Для рассматриваемых уравнений специального типа (1) поставлены и исследованы граничные задачи Коши-Рикье и типа линейного сопряжения с условиями в особых точках, решение которых найдены в явном виде.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы для дальнейшей разработки теории дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных с особыми коэффициентами, а также в прикладных вопросах.

Положения, выносимые на защиту.

- Теоремы о представлении общего решения в интегральном виде для дифференциальных уравнений типа (1):
 - с двумя граничными и одной внутренней сингулярной точками;
 - с двумя граничными и одной внутренней слабо сингулярной точками;
 - с тремя внутренними сверхсингулярными точками;
 - с одной левой граничной слабо сингулярной и двумя внутренними сингулярными точками.
- Утверждения о возможности рассмотрения полученных представлений общего решения изучаемых уравнений типа (1) в четырёх равносильных формах, в зависимости от расположения произвольных постоянных.
- Утверждения об обратимости полученных интегральных представлений общего решения и явные формулы обращения.
- Заключение о поведении решений рассматриваемых уравнений типа (1) в окрестности особых точек.
- Теоремы о существовании, единственности и явном представлении решения задач Коши-Рикье для рассматриваемых уравнений специального

типа (1).

- Теоремы о разрешимости, однозначной разрешимости и явном представлении решения задач типа линейного сопряжения для рассматриваемых уравнений специального типа (1).

Степень достоверности полученных результатов. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами теорем, утверждений, заключений, приведенных в работе, и подтверждается результатами других авторов.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, соответствует формуле (разрешимость и свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений) и пунктам области исследования (1. Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 2. Начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 7. Теория дифференциально-операторных уравнений) Паспорта специальности.

Личный вклад соискателя учёной степени. Вклад соискателя состоит в непосредственном его участии в получении научных положений, выносимых на защиту, подготовке основных публикаций по выполненной работе и личном участии в апробации результатов исследования.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- Международная научная конференция: «Уфимская осенняя математическая школа» (6-9 октября 2021 г.), г. Уфа;
- Республиканская научно-практическая конференция «Современные проблемы прикладной математики и её роль развитии технического мышления общества» (29-30 октября 2021 г.), г. Худжанд;
- Международная научная конференция «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш. Шабозова (24-25 июня 2022 г.), г. Душанбе;
- Международная научная конференция: «Уфимская осенняя математическая школа» (28 сентября-1 октября 2022 г.), г. Уфа;
- Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы математики и её приложения», посвящённая 20 - летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы (20-21 октября 2022г.), г. Душанбе;
- Международная научно-практическая конференция «Комплексный

анализ и его приложения», посвященная «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования», 75-летию чл. корр. НАНТ И.К. Курбанова и 70-летию д.ф.-м.н., профессора Д.С. Сафарова (19 ноября 2022 г.), г. Бохтар;

- Международная научно-практическая конференция «Развитие математических, точных и естественных наук в современных условиях: проблемы и перспективы» (28-29 апреля 2023 г.), Дангара;

- Международная конференция «Современные проблемы математики», посвященная 50-летию Института математики им. А. Джураева НАН Таджикистана (26-27 мая 2023 г.), г. Душанбе;

- Международная конференция «Современные проблемы математики и её приложения», посвященная 75-летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук 2020-2040 годы, 85-летию академика НАН Таджикистана Н. Раджабова (5 октября 2023г.), г. Душанбе;

- Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (4-8 декабря 2023 г.), г. Нальчик;

- Международная научно-практическая конференция «Математика в современном мире», посвященная Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических дисциплин в области науки и образования и 70-летию профессора С. Байзоева (20. 04. 2024 г.), г. Худжанд;

- Общегородской семинар кафедры математического анализа и теории функций Таджикского Национального университета «Комплексный анализ и его приложения» (под руководством академика НАНТ Н. Раджабова), 2024 г.;

- Апрельские научно-теоретические конференции молодых учёных и профессорского-преподавательского состава Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова, 2021 – 2024 гг.;

- Научно-теоретический семинар кафедры математического анализа им. профессора А. Мухсинова Худжандского государственного университета, 2021 – 2024 гг.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 16 работах, из них первые 5 статей опубликованы в изданиях из перечня рецензируемых журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Министерства науки и высшего образования РФ, а остальные в материалах научных конференций. В совместных работах постановка задачи и выбор метода доказательств принадлежит научному руководителю. Академик Н. Раджабов оказывал консультативную помощь.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, состоящего из 148 наименований, и занимает

160 страниц компьютерного текста. В диссертации принята двойная нумерация. Первый номер указывает на номер главы, второй выражает номер раздела, теоремы, следствия и замечания в пределах главы. Подобным образом нумеруются формулы, при этом для следствия формулы сохраняется ее номер с добавочной буквой, а, б, в или г.

При изложении содержания диссертации используются обозначения, принятые в работах [2, 19] и некоторые их видоизменения.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Материал и методы исследования. Материал диссертации посвящен получению интегрального представления общего решения ряда уравнений типа (1), изучению характеристических свойств представлений, применению их для изучения поведения решений и исследованию граничных задач с условиями в особых точках. В работе применяются общие методы теории дифференциальных уравнений, методы, разработанные Н. Раджабовым [11, 12, 19], А.Г. Олимовым [5, 6], теория систем линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у) и результаты, полученные в исследованиях [2, 3].

Результаты исследования. Приведем краткое изложение содержания диссертационной работы. Вводим следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 p_i^1(x) &= p(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_i}, & q_i^1(x) &= q(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_i}, \\
 f_i^1(x) &= f(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_i}, & p_i^2(x) &= p(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_i}, \\
 q_i^2(x) &= q(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_i}, & f_i^2(x) &= f(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_i}, \\
 w_{p_i^1, b_i}^{\alpha_i, +}(x) &= \int_{b_i}^x \frac{p_i^1(t) - p_i^1(b_i + 0)}{(t - b_i)^{\alpha_i}} dt, & w_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) &= \int_x^{b_{i+1}} \frac{p_i^2(b_{i+1} - 0) - p_i^2(t)}{(b_{i+1} - t)^{\alpha_{i+1}}} dt, \\
 \omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(x) &= [(\alpha_i - 1)(x - b_i)^{\alpha_i - 1}]^{-1}, & \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) &= [(\alpha_{i+1} - 1)(b_{i+1} - x)^{\alpha_{i+1} - 1}]^{-1}, \\
 u_{p_i^1, b_i}^{\alpha_i, +}(x) &= \int_{b_i}^x \frac{p_i^1(t)}{(t - b_i)^{\alpha_i}} dt, & u_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) &= \int_x^{b_{i+1}} \frac{p_i^2(t)}{(b_{i+1} - t)^{\alpha_{i+1}}} dt, \\
 F_s[x - \xi, \varphi(\xi), \theta(\xi)] &= \sum_{j=0}^{n-s-1} \frac{(x - \xi)^j}{j!} \varphi(\xi) + \frac{(x - \xi)^{n-s-1}}{(n - s - 1)!} \theta(\xi).
 \end{aligned}$$

В главе 1 проводится обзор и анализ работ, близких к теме исследования.

В главе 2 изучаются уравнения типа (1) с двумя граничными и внутренней сингулярными и слабо сингулярными точками.

В разделе 2.1 главы 2 доказан следующий основной результат:

Теорема 1. Пусть сингулярные точки уравнения (1) расположены в виде

$$a = b_1 < b_2 < b_3 = b, \text{ далее } \Gamma_{(b)} = \bigcup_{i=1}^2 \Gamma_i, \quad \Gamma_i = (b_i, b_{i+1}), i = 1, 2, \Gamma_i = \Gamma_i^1 \cup \Gamma_i^2,$$

$\Gamma_i^1 = (b_i, x_i^0], \Gamma_i^2 = [x_i^0, b_{i+1}), x_i^0$ – фиксированная точка интервала Γ_i . Пусть выполняются следующие условия:

1) функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условию A;

2) функции $p_i^1(x)$ и $p_i^2(x)$ удовлетворяют условиям типа Гельдера, соответственно:

$$|p_i^1(x) - p_i^1(b_i + 0)| \leq H_i^1 (x - b_i)^{h_i^1}, H_i^1 - \text{const.} > 0, 0 < h_i^1 \leq 1 \text{ при } x \rightarrow b_i + 0,$$

$$|p_i^2(b_{i+1} - 0) - p_i^2(x)| \leq H_i^2 (b_{i+1} - x)^{h_i^2}, H_i^2 - \text{const.} > 0, 0 < h_i^2 \leq 1, \quad (2)$$

при $x \rightarrow b_{i+1} - 0$;

3) выполняются неравенства $p(b_i + 0) > 0$, $p(b_{i+1} - 0) < 0$, $i = 1, 2$;

4) может иметь место любая другая комбинация знаков чисел $p(b_i + 0)$, $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 1, 2$. При этом, если для одного или обоих значений $i = 1, 2$ вместо неравенства $p(b_i + 0) > 0$ выполняется неравенство $p(b_i + 0) < 0$, то функции $q(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют, соответственно, условию

$$q(x) = o[(x - b_i)^{\beta_i^1}], f(x) = o[(x - b_i)^{\gamma_i^1}], \beta_i^1, \gamma_i^1 > -p_i^1(b_i + 0) \quad (3)$$

при $x \rightarrow b_i + 0$;

Если же для одного или обоих значений $i = 1, 2$ взамен неравенства $p(b_{i+1} - 0) < 0$ выполняется неравенство $p(b_{i+1} - 0) > 0$, то эти функции подчиняются, соответственно, условию

$$q(x) = o[(b_{i+1} - x)^{\beta_i^2}], f(x) = o[(b_{i+1} - x)^{\gamma_i^2}], \beta_i^2, \gamma_i^2 > p_i^2(b_{i+1} - 0) \quad (4)$$

при $x \rightarrow b_{i+1} - 0$.

Тогда общее решение уравнения (1) на множестве $\Gamma_{(b)}$ и степени оператора $A_{(1),(b)}$ от него выражается при помощи формулы

$$\begin{aligned} A_{(1),(b)}^s y &= \begin{cases} K_{b_i, s}^{1,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1] & \text{при } x \in \Gamma_i^1 \\ K_{b_{i+1}, s}^{1,-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2] & \text{при } x \in \Gamma_i^2 \end{cases} \equiv \\ &\equiv Q_{(1),(b),s}^{(n)} [p(x), q(x), f(x), C_{1s}^1, C_{1(s+1)}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1; C_{1s}^2, C_{1(s+1)}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2; \\ &C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1; C_{2s}^2, C_{2(s+1)}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2], \quad s = \overline{0, (n-1)} \quad (Q_{(1),(b),0}^{(n)} [\dots] \equiv Q_{(1),(b)}^{(n)} [\dots]), \quad (5) \end{aligned}$$

где

$$K_{b_i,s}^{1,+}[p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1] \equiv (x - b_i)^{-p_i^1(b_i+0)} \times \\ \times \exp[-w_{p_i^1, b_i}^{1,+}(x)] \left\{ \int_{b_i}^x F_s[x - \xi, q_i^1(\xi), f_i^1(\xi)] \times \right. \\ \left. \times (\xi - b_i)^{p_i^1(b_i+0)-1} \exp[w_{p_i^1, b_i}^{1,+}(\xi)] d\xi + \sum_{j=s}^{n-1} C_{ij}^1 \frac{(x - b_i)^{j-s}}{(j-s)!} \right\}, \quad (6)$$

$$K_{b_{i+1},s}^{1,-}[p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2] \equiv (b_{i+1} - x)^{p_i^2(b_{i+1}-0)} \times \\ \times \exp[-w_{p_i^2, b_i}^{1,+}(x)] \left\{ (-1)^s \sum_{j=s}^{n-1} C_{ij}^2 \frac{(b_{i+1} - x)^{j-s}}{(j-s)!} - \int_x^{b_{i+1}} F_s[x - \xi, q_i^2(\xi), f_i^2(\xi)] \times \right. \\ \left. \times (b_{i+1} - x)^{-p_i^2(b_{i+1}-0)-1} \exp[w_{p_i^2, b_{i+1}}^{1,-}(\xi)] d\xi \right\}, (s = \overline{0, (n-1)} = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (7)$$

а $C_{ij}^1, C_{ij}^2, j = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2$ - произвольные постоянные, группы из которых, относящиеся к промежутку $\Gamma_i, i = 1, 2$, однозначно связаны соответствующей определенной с.л.а.у. вида

$$K_{b_i,s}^{1,+}[p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1]_{x=x_i^0} = \\ = K_{b_{i+1},s}^{1,-}[p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2]_{x=x_i^0}, s = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2. \quad (8)$$

Системы (8) дают возможность формулу (5) записать в четырех равносильных формах.

Для представления (5) выведены следующие характеристические равенства (формулы обращения):

$$[(x - b_1)^{p_1^1(b_1+0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_1+0} = C_{1s}^1, [(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_2-0} = (-1)^s C_{1s}^2, \\ [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_2+0} = C_{2s}^1, [(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_3-0} = (-1)^s C_{2s}^2, \\ s = \overline{0, (n-1)}.$$

Показано, что поведение решений уравнения (1) в окрестности

сингулярных точек характеризуется знаками предельных значений функции $p(x)$ в этих точках следующим образом: при $x \rightarrow b_i + 0$, если $p(b_i + 0) > 0$, то все решения стремятся к бесконечности с поведением $y(x) = O[(x - b_i)^{-p_i^1(b_i+0)}]$, если $p(b_i + 0) < 0$, то они стремятся к нулю с поведением $y(x) = o[(x - b_i)^{-p_i^1(b_i+0)}]$; при $x \rightarrow b_{i+1} - 0$, если $p(b_{i+1} - 0) < 0$, то все решения стремятся к

бесконечности с поведением $y(x) = O[(b_{i+1} - x)p_i^2(b_{i+1}-0)]$, если же $p(b_{i+1} - 0) > 0$, то они стремятся к нулю с поведением $y(x) = o[(b_{i+1} - x)p_i^2(b_{i+1}-0)]$. Общая картина поведения решений уравнения (1) в окрестности сингулярных точек характеризуется сочетанием знаков чисел $p(b_i + 0)$ и $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 1, 2$.

В разделе 2.2 главы 2 для уравнения (1) исследованы граничные задачи. Рассмотрим некоторые из них.

Задача 1 (Коши – Рикье). Найти решение уравнения (1) таким образом, чтобы выполнялись следующие группы условий:

$$[(x - b_1)^{p_1^1(b_1+0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_1+0} = a_{1s}^1, [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_2+0} = a_{2s}^1, \\ s = \overline{0, (n-1)}, \text{ где } a_{is}^1, i = 1, 2 - \text{ заданные вещественные числа.}$$

В общем случае для задачи 1 справедлива

Теорема 2. Пусть для уравнения (1) выполняются условия теоремы 1. Тогда задача 1 имеет единственное решение, которое получается из формулы (5) заменой произвольных постоянных их значениям, соответственно, из формул

$$C_{1s}^1 = a_{1s}^1, C_{2s}^1 = a_{2s}^1, s = \overline{0, (n-1)} \quad (9)$$

и систем

$$K_{b_{i+1},s}^{1,-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2]_{x=x_i^0} = \\ = K_{b_i,s}^{1,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), a_{is}^1, \dots, a_{i(n-1)}^1]_{x=x_i^0}, s = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2.$$

В частном случае $n = 2$ система (8) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} d_i(\mu_i + C_{i0}^1 + k_i C_{i1}^1) = e_i(\lambda_i + C_{i0}^2 + r_i C_{i1}^2), \\ d_i(v_i + C_{i1}^1) = e_i(\eta_i - C_{i1}^2) \end{cases}, i = 1, 2, \quad (10)$$

где $d_i \equiv d_i(x_i^0)$, $e_i \equiv e_i(x_i^0)$, $k_i \equiv k_i(x_i^0)$, $r_i \equiv r_i(x_i^0)$, $d_i, e_i, k_i, r_i > 0$, $\mu_i \equiv \mu_i(x_i^0)$, $\lambda_i \equiv \lambda_i(x_i^0)$, $v_i \equiv v_i(x_i^0)$, $\eta_i \equiv \eta_i(x_i^0)$ – известные вещественные числа. Тогда по известным C_{1s}^1 и C_{2s}^1 , $s = 0, 1$ из равенств (9) в силу систем (10) C_{1s}^2 и C_{2s}^2 , $s = 0, 1$ однозначно находятся так:

$$C_{i0}^2 = \frac{d_i}{e_i} a_{i0}^1 + \frac{d_i}{e_i} (k_i + r_i) a_{i1}^1 + A_i, C_{i1}^2 = -\frac{d_i}{e_i} a_{i1}^1 + \bar{A}_i, i = 1, 2, \quad (11)$$

где $A_i = \frac{d_i}{e_i} (\mu_i + r_i v_i) - r_i \eta_i - \lambda_i$, $\bar{A}_i = \eta_i - \frac{d_i}{e_i} v_i$ и получается следующая точная

Теорема 3. Пусть в уравнении (1) $n = 2$ и выполняются условия теоремы 1.

Тогда задача 1 имеет единственное решение, которое выражается формулой

$$y(x) = Q_{(1),(b)}^{(2)}[p(x), q(x), f(x), C_{10}^1, C_{11}^1; C_{10}^2, C_{11}^2; C_{20}^1, C_{21}^1; C_{20}^2, C_{21}^2],$$

где постоянные $C_{ij}^1, C_{ij}^2, j = 0, 1, i = 1, 2$ определяются формулами (9) и (11).

Задача 2 (типа линейного сопряжения). Найти решение уравнения (1) так, чтобы выполнялась следующая система условий:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} [(x - b_1)^{p_1^1(b_1+0)} A_{(1),(b)}^j y]_{x=b_1+0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} [(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{(1),(b)}^j y]_{x=b_2-0} + \\ + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{(1),(b)}^j y]_{x=b_2+0} + \\ + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} [(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{(1),(b)}^j y]_{x=b_3-0} = \varepsilon_k, \end{aligned} \quad (12)$$

где $k = \overline{1, 2n}, b_{kj}$ и $\varepsilon_k, j = \overline{0, (4n-1)}$ - заданные вещественные числа.

Совершается переход из условий (12) к с. л. а. у. следующего вида:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} C_{1j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} (-1)^j C_{1j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} C_{2j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} (-1)^j C_{2j}^2 = \varepsilon_k, \\ k = \overline{1, 2n}, \end{aligned} \quad (13)$$

к которой автоматически присоединяются системы (8). Используя это, систему (13) четырьмя способами можно преобразовать в систему $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными следующим образом: группы неизвестных $C_{1j}^2, C_{2j}^2; C_{1j}^1, C_{2j}^1; C_{1j}^1, C_{2j}^2; C_{1j}^1, C_{2j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$ выразим, соответственно, через группы $C_{1j}^1, C_{2j}^1; C_{1j}^1, C_{2j}^2; C_{1j}^2, C_{2j}^2, j = \overline{0, (n-1)}$ из систем (8), тогда вместо (13) получим системы относительно последних групп неизвестных, соответственно, которые обозначим как (13а), (13б), (13в) и (13г). Каждая из них в связке с системой (8) эквивалентна системе (13), (8), следовательно, эквивалентны и между собой.

Итак, справедливо следующее заключение о разрешимости задачи 2.

Теорема 4. Пусть относительно уравнения (1) выполняются условия теоремы 1, а в системе (13а), (13б), (13в) или (13г) основная и расширенная матрицы имеют ранг, соответственно, равный r и ρ .

1) Если $r = \rho = 2n$, тогда задача 2 имеет единственное решение, которое получается из формулы (5) заменой в нём произвольных постоянных решением

одной из систем (13а), (13б), (13в) и (13г), рассматриваемой вместе с системой (8);

2) Если $r = \rho < 2n$, тогда задача 2 имеет бесконечно много решений и её общее решение выражается через решения одной из систем (13а), (13б), (13в) и (13г), рассматриваемой вместе с системой (8), формулой (5), зависящей от $2n - r$ произвольных постоянных;

3) Если $r < 2n$, $r \neq \rho$, тогда каждая из систем (13а), (13б), (13в) и (13г) вместе с системой (8) несовместна, и задача 2 не имеет решения.

В случае $n = 2$ система (8) принимает вид (10), а системы (13а), (13б), (13в) и (13г), соответственно, имеют вид:

$$m_{k0}^1 C_{10}^1 + m_{k1}^1 C_{11}^1 + n_{k0}^1 C_{20}^1 + n_{k1}^1 C_{21}^1 = l_k^1, \quad (14)$$

$$m_{k0}^1 C_{10}^1 + m_{k1}^1 C_{11}^1 + n_{k0}^2 C_{20}^2 + n_{k1}^2 C_{21}^2 = l_k^2, \quad (15)$$

$$m_{k0}^2 C_{10}^2 + m_{k1}^2 C_{11}^2 + n_{k0}^1 C_{20}^1 + n_{k1}^1 C_{21}^1 = l_k^3, \quad (16)$$

$$m_{k0}^2 C_{10}^2 + m_{k1}^2 C_{11}^2 + n_{k0}^2 C_{20}^2 + n_{k1}^2 C_{21}^2 = l_k^4, k = \overline{1,4}. \quad (17)$$

Если обозначить детерминанты которых, соответственно, как $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21}, \Delta_{22}$, то имеет место следующий более точный результат:

Теорема 5. Пусть в уравнении (1) $n = 2$ и выполнены условия теоремы 1.

1) Если детерминант $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21}$ или Δ_{22} не равен нулю, то ранг r основной матрицы систем (14), (15), (16) и (17) равен рангу ρ их расширенной матрицы, $r = \rho = 4$ и задача 2 имеет единственное решение, выражающееся формулой

$$y(x) = Q_{(1),(b)}^{(2)}[p(x), q(x), f(x), C_{10}^1, C_{11}^1; C_{10}^2, C_{11}^2; C_{20}^1, C_{21}^1; C_{20}^2, C_{21}^2], \quad (18)$$

где постоянные $C_{ij}^1, C_{ij}^2, j = 0,1, i = 1,2$ определяются решением одной из систем (14), (15), (16) или (17), рассматриваемой вместе с (10), например, системы (14), (10), то есть формулами:

$$C_{i0}^1 = \frac{\Delta_{11}^{i0}}{\Delta_{11}}, C_{i1}^1 = \frac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}}, C_{i0}^2 = \frac{d_i}{e_i} \frac{\Delta_{11}^{i0}}{\Delta_{11}} + (k_i + r_i) \frac{d_i}{e_i} \frac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}} + A_i, C_{i1}^2 = -\frac{d_i}{e_i} \frac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}} + \overline{A}_i, i = 1,2.$$

2) Если детерминант $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21}$ или Δ_{22} равен нулю, то $r < 4$. При этом, когда $r = \rho$ каждая из систем (14), (15), (16), (17) и поэтому система (13), (10) имеет бесконечно много решений, их общее решение зависит от $4 - r$ произвольных постоянных, тогда и задача 2 имеет бесконечно много решений, выражаемых через решения системы (13), (10) формулой (18), зависящей от $4 - r$ произвольных постоянных, а когда $r \neq \rho$ системы (14), (15), (16), (17) несовместны, поэтому система (13), (10) также несовместна, и задача 2 не имеет решения.

Основной результат раздела 2.3 состоит из следующего утверждения:

Теорема 6. Пусть слабо сингулярные точки уравнения (1) расположены в виде $a = b_1 < b_2 < b_3 = b$, имеет место разбиение множества $\Gamma_{(b)}$, аналогичное проведенному в теореме 1 и функции $p(x), q(x)$ и $f(x)$ подчиняются условию A.

Тогда общее решение уравнения (1) и степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от него на множестве $\Gamma_{(b)}$ выражается при помощи формулы:

$$\begin{aligned} A_{(\alpha),(b)}^s y &= \begin{cases} I_{b_i,s}^{\alpha_i,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1] & \text{при } x \in \Gamma_i^1 \\ I_{b_{i+1},s}^{\alpha_{i+1},-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2] & \text{при } x \in \Gamma_i^2 \equiv \\ & i = 1, 2 \end{cases} \\ &\equiv \Omega_{(\alpha),(b),s}^{(n)} [p(x), q(x), f(x), C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1; C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2; C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1; \\ &C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2], \quad s = \overline{0, (n-1)}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} &I_{b_i,s}^{\alpha_i,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1] \equiv \exp \left[-u_{p_i^1, b_i}^{\alpha_i,+}(x) \right] \times \\ &\times \left\{ \int_{b_i}^x F_s[x - \xi, q_i^1(\xi), f_i^1(\xi)] (\xi - b_i)^{-\alpha_i} \exp \left[u_{p_i^1, b_i}^{\alpha_i,+}(\xi) \right] d\xi + \sum_{j=s}^{n-1} C_{ij}^1 \frac{(x - b_i)^{j-s}}{(j-s)!} \right\}, \quad (20) \\ &I_{b_{i+1},s}^{\alpha_{i+1},-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2] \equiv \\ &\equiv \exp \left[u_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(x) \right] \left\{ (-1)^s \sum_{j=s}^{n-1} C_{ij}^2 \frac{(b_{i+1} - x)^{j-s}}{(j-s)!} - \int_x^{b_{i+1}} F_s[x - \xi, q_i^2(\xi), f_i^2(\xi)] \times \right. \\ &\quad \left. \times (b_{i+1} - x)^{-\alpha_{i+1}} \exp \left[-u_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(\xi) \right] d\xi \right\}, \end{aligned}$$

а $C_{ij}^1, C_{ij}^2, j = \overline{0, (n-1)}$ - произвольные постоянные, удовлетворяющие треугольным определенным с.л.а.у. вида:

$$\begin{aligned} &I_{b_i,s}^{\alpha_i,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1]_{x=\bar{x}_i^0} = \\ &= I_{b_{i+1},s}^{\alpha_{i+1},-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2]_{x=\bar{x}_i^0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где $\bar{x}_i^0$ - фиксированная точка промежутка Γ_i .

Для представления (19) доказаны следующие характеристические равенства (формулы обращения):

$$\begin{aligned} &[A_{(\alpha),(b)}^s y]_{x=b_1+0} = C_{1s}^1; \quad [A_{(\alpha),(b)}^s y]_{x=b_2-0} = (-1)^s C_{1s}^2; \\ &[A_{(\alpha),(b)}^s y]_{x=b_2+0} = C_{2s}^1; \quad [A_{(\alpha),(b)}^s y]_{x=b_3-0} = (-1)^s C_{2s}^2; \quad s = \overline{0, (n-1)}. \end{aligned}$$

Показано, что все решения уравнения (1) и степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от них в окрестности слабо сингулярных точек являются ограниченными.

В разделе 2.4 главы 2 для уравнения (1) исследованы граничные задачи. Приводим некоторые из них.

Задача 3 (Коши-Рикье). Требуется найти решение уравнения (1), подчиняющееся следующей паре групп условий:

$$[A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_1+0} = \bar{a}_{1j}^1, \quad [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_2+0} = \bar{a}_{2j}^1, \quad j = \overline{0, (n-1)}.$$

Задача 4 (типа линейного сопряжения). Требуется найти решение уравнения (1), подчиняющееся следующей системе условий:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_1+0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_2-0} + \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_2+0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_3-0} = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, 2n}, \end{aligned}$$

где b_{kj} и $\varepsilon_k, j = \overline{0, (4n-1)}$ – заданные действительные числа.

Для задач 3 и 4 доказаны теоремы, подобные, соответственно, теоремам 2, 3 и 4, 5 (теоремы 2.7, 2.8, 2.9 и 2.10).

В разделе 2.5 рассмотрен конкретный пример к разделам 2.1 и 2.2.

В главе 3 изучено уравнение типа (1) с внутренними сверхсингулярными точками. В разделе 3.1 доказана следующая основная теорема:

Теорема 7. Пусть сверхсингулярные точки уравнения (1) расположены

в виде $a < b_1 < b_2 < b_3 < b$, далее $\Gamma_{(b)} = \bigcup_{i=0}^3 \Gamma_i$, $\Gamma_0 = (a, b_1), \Gamma_i = (b_i, b_{i+1})$,

$i = 1, 2, \Gamma_3 = (b_3, b)$, а x_i^0 – обозначает фиксированную точку интервала Γ_i , которая разделяет этот интервал на промежутки $\Gamma_i^1 = (b_i, x_i^0], \Gamma_i^2 = [x_i^0, b_{i+1})$.

Пусть выполняются следующие условия:

1) функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ подчиняются условию A;

2) функции $p_i^1(x)$, $i = 1, 2, 3$ удовлетворяют, соответственно, условию

$$|p_i^1(x) - p_i^1(b_i + 0)| \leq L_i^1 (x - b_i)^{l_i^1}, \quad L_i^1 > 0, \quad l_i^1 > \alpha_i - 1 \text{ при } x \rightarrow b_i + 0;$$

3) функции $p_i^2(x)$, $i = 0, 1, 2$ удовлетворяют, соответственно, условию

$$|p_i^2(b_{i+1} - 0) - p_i^2(x)| \leq L_i^2 (b_{i+1} - x)^{l_i^2}, \quad L_i^2 > 0, \quad l_i^2 > \alpha_{i+1} - 1 \text{ при } x \rightarrow b_{i+1} - 0;$$

4) выполняются неравенства $p(b_i + 0) > 0, p(b_i - 0) < 0, i = 1, 2, 3$;

5) может иметь место любая другая комбинация знаков чисел $p(b_i + 0)$, $i = 1, 2, 3, p(b_{i+1} - 0), i = 0, 1, 2$. При этом требуется, чтобы функции $q(x)$ и $f(x)$,

в случае $p(b_i + 0) < 0$ при $x \rightarrow b_i + 0$ обращались в нуль и подчинялись, соответственно, условию

$$\begin{aligned} \exp \left[-p_i^1(b_i + 0) \omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(x) \right] q(x) &= o[(x - b_i)^{\beta_i^1}], \\ \exp \left[-p_i^1(b_i + 0) \omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(x) \right] f(x) &= o[(x - b_i)^{\gamma_i^1}], \quad \beta_i^1, \quad \gamma_i^1 > \alpha_i - 1, \end{aligned}$$

а в случае $p(b_{i+1} - 0) > 0$ при $x \rightarrow b_{i+1} - 0$ обращались в нуль и подчинялись, соответственно, условию

$$\begin{aligned} \exp \left[p_i^2(b_{i+1} - 0) \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) \right] q(x) &= o[(b_{i+1} - x)^{\beta_i^2}], \\ \exp \left[p_i^2(b_{i+1} - 0) \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) \right] f(x) &= o[(b_{i+1} - x)^{\gamma_i^2}], \quad \beta_i^2, \gamma_i^2 > \alpha_{i+1} - 1. \end{aligned}$$

Тогда общее решение уравнения (1) и степени оператора $A_{(\alpha), (b)}$ от него на множестве $\Gamma_{(b)}$ выражается при помощи формулы

$$\begin{aligned} A_{(\alpha), (b)}^s y &= \begin{cases} K_{b_1, s}^{\alpha_1, -} [p_0^2(x), q_0^2(x), f_0^2(x), C_{0s}^2, C_{0(s+1)}^2, \dots, C_{0(n-1)}^2] & \text{при } x \in \Gamma_0 \\ K_{b_i, s}^{\alpha_i, +} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1] & \text{при } x \in \Gamma_i^1 \\ K_{b_{i+1}, s}^{\alpha_{i+1}, -} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2] & \text{при } x \in \Gamma_i^2 \equiv \\ & i = 1, 2 \\ K_{b_3, s}^{\alpha_3, +} [p_3^1(x), q_3^1(x), f_3^1(x), C_{3s}^1, C_{3(s+1)}^1, \dots, C_{3(n-1)}^1] & \text{при } x \in \Gamma_3 \end{cases} \\ &\equiv U_{(\alpha), (b), s}^{(n)} [p(x), q(x), f(x), C_{0s}^2, \dots, C_{0(n-1)}^2; C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1; C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2; C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1; \\ &\quad C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2; C_{3s}^1, \dots, C_{3(n-1)}^1], \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (U_{(\alpha), (b), 0}^{(n)} \equiv U_{(\alpha), (b)}^{(n)}), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} &K_{b_i, s}^{\alpha_i, +} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1] \equiv \\ &\equiv \exp \left[p_i^1(b_i + 0) \omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(x) - w_{p_i^1, b_i}^{\alpha_i, +}(x) \right] \left\{ \int_{b_i}^x F_s[x - \xi, q_i^1(\xi), f_i^1(\xi)] (\xi - b_i)^{-\alpha_i} \times \right. \\ &\quad \times \exp \left[w_{p_i^1, b_i}^{\alpha_i, +}(\xi) - p_i^1(b_i + 0) \omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(\xi) \right] d\xi + \sum_{j=s}^{n-1} C_{ij}^1 \frac{(x - b_i)^{j-s}}{(j-s)!} \Bigg\}, \quad i = 1, 2, 3, \\ &K_{b_{i+1}, s}^{\alpha_{i+1}, -} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2] \equiv \\ &\equiv \exp \left[-p_i^2(b_{i+1} - 0) \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) - w_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) \right] \left\{ (-1)^s \sum_{j=s}^{n-1} C_{ij}^2 \frac{(b_{i+1} - x)^{j-s}}{(j-s)!} - \right. \\ &\quad \left. - \int_x^{b_{i+1}} F_s[x - \xi, q_i^2(\xi), f_i^2(\xi)] (b_{i+1} - \xi)^{-\alpha_{i+1}} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \exp \left[p_i^2 (b_{i+1} - 0) \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(\xi) + w_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(\xi) \right] d\xi \left. \vphantom{\exp} \right\}, i = 0, 1, 2, s = \overline{0, (n-1)},$$

а C_{ij}^1 , $i = 1, 2, 3$, C_{ij}^2 , $i = 0, 1, 2$, $j = \overline{0, (n-1)}$ - произвольные постоянные, группы из которых соответствующие промежутку Γ_i , $i = 1, 2$ однозначно связаны, соответственно, следующей треугольной с.л.а.у.:

$$\begin{aligned} & K_{b_{i,s}}^{\alpha_{i+1}, +} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1]_{x=x_i^0} = \\ & = K_{b_{i+1,s}}^{\alpha_{i+1}, -} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2]_{x=x_i^0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (22)$$

Для представления (21) установлены следующие характеристические равенства (формулы обращения):

$$\begin{aligned} & \left\{ \exp[p_0^2(b_1 - 0) \omega_{b_1}^{\alpha_1, -}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y \right\}_{x=b_1-0} = (-1)^s C_{0s}^2, \\ & \left\{ \exp[-p_1^1(b_1 + 0) \omega_{b_1}^{\alpha_1, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y \right\}_{x=b_1+0} = C_{1s}^1, \\ & \left\{ \exp[p_1^2(b_2 - 0) \omega_{b_2}^{\alpha_2, -}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y \right\}_{x=b_2-0} = (-1)^s C_{1s}^2, \\ & \left\{ \exp[-p_2^1(b_2 + 0) \omega_{b_2}^{\alpha_2, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y \right\}_{x=b_2+0} = C_{2s}^1, \\ & \left\{ \exp[p_2^2(b_3 - 0) \omega_{b_3}^{\alpha_3, -}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y \right\}_{x=b_3-0} = (-1)^s C_{2s}^2, \\ & \left\{ \exp[-p_3^1(b_3 + 0) \omega_{b_3}^{\alpha_3, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y \right\}_{x=b_3+0} = C_{3s}^1, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \end{aligned}$$

Показано что, поведение решений данного уравнения в окрестности сверхсингулярных точек зависит от знака чисел $p(b_i + 0)$, $i = 1, 2, 3$, $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 0, 1, 2$ и точно характеризуется так: при $x \rightarrow b_i + 0$, $i = 1, 2, 3$, если $p(b_i + 0) > 0$, то все решения уравнения стремятся к бесконечности и удовлетворяют асимптотическому равенству $y(x) = O \left\{ \exp[p_i^1(b_i + 0) \omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(x)] \right\}$, если же $p(b_i + 0) < 0$, то все решения стремятся к нулю с поведением $y(x) = o \left\{ \exp[p_i^1(b_i + 0) \omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(x)] \right\}$; при $x \rightarrow b_{i+1} - 0$, $i = 0, 1, 2$, если $p(b_{i+1} - 0) < 0$, то все решения уравнения стремятся к бесконечности с асимптотическим поведением $y(x) = O \left\{ \exp[-p_i^2(b_{i+1} - 0) \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x)] \right\}$, если же $p(b_{i+1} - 0) > 0$, то все они стремятся к нулю с поведением $y(x) = o \left\{ \exp[-p_i^2(b_{i+1} - 0) \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x)] \right\}$. Следовательно, общая картина поведения решений уравнения (1) в окрестности сверхсингулярных точек характеризуется комбинацией знаков шести чисел $p(b_i + 0)$, $i = 1, 2, 3$, $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 0, 1, 2$.

В разделе 3.2 для уравнения (1) исследованы граничные задачи. Рассмотрим некоторые из них.

Задача 5 (Коши-Рикье). Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее четырём группам условий вида:

$$\begin{aligned} \{\exp[p_0^2(b_1 - 0)\omega_{b_1}^{\alpha_1, -}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y\}_{x=b_1-0} &= a_{0s}^2, \\ \{\exp[-p_3^1(b_3 + 0)\omega_{b_3}^{\alpha_3, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y\}_{x=b_3+0} &= d_{3s}^1; \\ \{\exp[-p_1^1(b_1 + 0)\omega_{b_1}^{\alpha_1, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y\}_{x=b_1+0} &= a_{1s}^1, \\ \{\exp[-p_2^1(b_2 + 0)\omega_{b_2}^{\alpha_2, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y\}_{x=b_2+0} &= a_{2s}^1; \end{aligned}$$

где $s = \overline{0, (n-1)}$, а a_{0s}^2 , a_{is}^1 , $i = 1, 2$, d_{3s}^1 - заданные вещественные числа.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 8. Пусть для уравнения (1) выполняются условия теоремы 7. Тогда задача 5 имеет единственное решение, которое получается из формулы (21) заменой произвольных постоянных их значением, соответственно, из формул

$$C_{0s}^2 = a_{0s}^2, C_{3s}^1 = d_{3s}^1, C_{1s}^1 = a_{1s}^1, C_{2s}^1 = a_{2s}^1, \quad s = \overline{0, (n-1)}$$

и систем

$$\begin{aligned} &K_{b_{i+1}, s}^{\alpha_{i+1}, -}[p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2]_{x=x_i^0} = \\ &= K_{b_{i,s}}^{\alpha_i, +}[p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), a_{is}^1, \dots, a_{i(n-1)}^1]_{x=x_i^0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Задача 6 (типа линейного сопряжения). Найти решение уравнения (1) таким образом, чтобы выполнялась следующая система условий:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} \{\exp[p_0^2(b_1 - 0)\omega_{b_1}^{\alpha_1, -}(x)] A_{(\alpha), (b)}^j y\}_{x=b_1-0} + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} \{\exp[-p_1^1(b_1 + 0)\omega_{b_1}^{\alpha_1, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^j y\}_{x=b_1+0} + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} \{\exp[p_1^2(b_2 - 0)\omega_{b_2}^{\alpha_2, -}(x)] A_{(\alpha), (b)}^j y\}_{x=b_2-0} + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} \{\exp[-p_2^1(b_2 + 0)\omega_{b_2}^{\alpha_2, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^j y\}_{x=b_2+0} + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(4n+j)} \{\exp[p_2^2(b_3 - 0)\omega_{b_3}^{\alpha_3, -}(x)] A_{(\alpha), (b)}^j y\}_{x=b_3-0} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(5n+j)} \{ \exp[-p_3^1(b_3 + 0) \omega_{b_3}^{\alpha_3, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y \}_{x=b_3+0} = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, 4n},$$

где b_{kj} и ε_k , $j = \overline{0, (6n-1)}$ - заданные вещественные числа.

Эта задача исследуется приведением к с. л. а. у. $4n$ уравнений с $6n$ неизвестными вида:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} (-1)^j C_{0j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} C_{1j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} (-1)^j C_{1j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} C_{2j}^1 + \\ + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(4n+j)} (-1)^j C_{2j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(5n+j)} C_{3j}^1 = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, 4n}, \end{aligned} \quad (23)$$

к которой добавляются системы (22). К системе (23) применяются преобразования, использованные в случае системы (13). Тогда в место неё получим системы $4n$ уравнений с $4n$ неизвестными относительно одной групп неизвестных $C_{1j}^1, C_{2j}^1; C_{1j}^2, C_{2j}^2; C_{1j}^3, C_{2j}^3$, а также неизвестных C_{0j}^2, C_{3j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$, соответственно, которые обозначим как (23а), (23б), (23в) и (23г). Каждая из этих систем в связке с системой (22) является эквивалентной системе (23), (22), следовательно, они эквивалентны и между собой.

Справедлива

Теорема 9. Пусть относительно уравнения (1) выполняются условия теоремы 7, а в системе (23а), (23б), (23в) или (23г) основная и расширенная матрицы имеют ранг, соответственно, равный r и ρ .

1) Если $r = \rho = 4n$, тогда задача б имеет единственное решение, которое получается из формулы (21) заменой в нём произвольных постоянных решением одной из систем (23а), (23б), (23в) и (23г), рассматриваемой вместе с системой (22);

2) Если $r = \rho < 4n$, тогда задача б имеет бесконечно много решений и её общее решение выражается через решения одной из систем (23а), (23б), (23в), и (23г), рассматриваемой вместе с системой (22), формулой (21), зависящей от $4n - r$ произвольных постоянных;

3) Если $r < 4n$, $r \neq \rho$, тогда каждая из систем (23а), (23б), (23в), (23г) вместе с системой (22) несовместна, и задача б не имеет решения.

В частном случае $n = 2$ для задач 5 и 6 получены более точные теоремы, подобные, соответственно, теоремам 3 и 5 (теоремы 3.3 и 3.5).

Основным результатом раздела 4.1 главы 4 является

Теорема 10. Пусть, в уравнении (1) слабо сингулярная точка b_1 и сингулярные точки b_2 и b_3 расположены в виде $a = b_1 < b_2 < b_3 < b$. Далее

$$\Gamma_{(b)} = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i, \Gamma_i = (b_i, b_{i+1}), \Gamma_i = \Gamma_i^1 \cup \Gamma_i^2, \Gamma_i^1 = (b_i, x_i^0], \Gamma_i^2 = [x_i^0, b_{i+1}), i = 1, 2,$$

$\Gamma_3 = (b_3, b)$, а x_i^0 – фиксированная точка интервала Γ_i . Пусть выполняются следующие условия:

1) функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ подчиняются условию A ;

2) функции $p_i^1(x)$, $i = 2, 3$, $p_i^2(x)$, $i = 1, 2$ в сингулярных точках удовлетворяют, соответственно, условию Гельдера (2);

3) имеет место следующее сочетание знаков чисел $p(b_i \pm 0)$: $p(b_i + 0) > 0$, $p(b_i - 0) < 0$, $i = 2, 3$;

4) может выполняться любая другая комбинация знаков чисел $p(b_i \pm 0)$, $i = 2, 3$. При этом, если для одного или обоих значений $i = 2, 3$ взамен условия $p(b_i + 0) > 0$ ($p(b_i - 0) < 0$) выполняется условие $p(b_i + 0) < 0$ ($p(b_i - 0) > 0$), тогда требуется, чтобы функции $q(x)$ и $f(x)$ при $x \rightarrow b_i + 0$ ($x \rightarrow b_{i+1} - 0$, $i = 1, 2$) стремились к нулю и удовлетворяли, соответственно, условиям (3) ((4)).

Тогда общее решение уравнения (1) и степени оператора $A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}$ на множестве $\Gamma_{(b)}$ выражается при помощи формулы

$$A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y = \begin{cases} I_{b_1, s}^{\alpha_1, +} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, C_{1(s+1)}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1] & \text{при } x \in \Gamma_1^1 \\ K_{b_2, s}^{1, -} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, C_{1(s+1)}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2] & \text{при } x \in \Gamma_1^2 \\ K_{b_2, s}^{1, +} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, C_{2(s+1)}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1] & \text{при } x \in \Gamma_2^1 \equiv \\ K_{b_3, s}^{1, -} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, C_{2(s+1)}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2] & \text{при } x \in \Gamma_2^2 \\ K_{b_3, s}^{1, +} [p_3^1(x), q_3^1(x), f_3^1(x), C_{3s}^1, C_{3(s+1)}^1, \dots, C_{3(n-1)}^1] & \text{при } x \in \Gamma_3 \end{cases} \\ \equiv V_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b), s}^{(n)} [p(x), q(x), f(x), C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1; C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2; C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1; C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2; \\ C_{3s}^1, C_{3(s+1)}^1, \dots, C_{3(n-1)}^1], \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (V_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b), 0}^{(n)} [\dots] \equiv V_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^{(n)} [\dots]) \quad (24)$$

где первая строка определяется формулой (20), остальные, соответственно, формулами (6) и (7), а C_{ij}^1 , C_{ij}^2 , $i = 1, 2$, C_{3j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$ – произвольные постоянные, группы из которых относящиеся к промежутку Γ_i , $i = 1, 2$, однозначно связаны, соответственно, следующими определёнными с. л. а. у.:

$$\begin{aligned} & I_{b_1, s}^{\alpha_1, +} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, C_{1(s+1)}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0-0} = \\ & = K_{b_2, s}^{1, -} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, C_{1(s+1)}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0+0}, \\ & K_{b_2, s}^{1, +} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, C_{2(s+1)}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0-0} = \\ & = K_{b_3, s}^{1, -} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, C_{2(s+1)}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0+0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}. \quad (25) \end{aligned}$$

Для представления (24) установлены следующие характеристические

равенства (формулы обращения):

$$\begin{aligned}
& [A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_1+0} = C_{1s}^1, \\
& [(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_2-0} = (-1)^s C_{1s}^2, \\
& [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_2+0} = C_{2s}^1, \\
& [(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_3-0} = (-1)^s C_{2s}^2, \\
& [(x - b_3)^{p_3^1(b_3+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_3+0} = C_{3s}^1, s = \overline{0, (n-1)}.
\end{aligned}$$

Доказано, что все решения уравнения (1) и степени оператора $A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}$ от них в окрестности слабо сингулярной точки являются ограниченными, а в окрестности сингулярных точек их поведение определяется знаками чисел $p(b_i \pm 0)$, $i = 2, 3$ подобно случаю уравнения, рассмотренного в разделе 2.1.

В разделе 4.2 главы 4 для уравнения (1) исследованы ряд граничных задач. Рассмотрим некоторые из них.

Задача 7. Требуется найти решение уравнения (1), подчиняющееся следующим группам условий:

$$\begin{aligned}
& [A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_1+0} = a_{1s}^1, \quad [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_2+0} = a_{2s}^1, \\
& [(x - b_3)^{p_3^1(b_3+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_3+0} = d_{3s}^1, \quad s = \overline{0, (n-1)},
\end{aligned}$$

где a_{is}^1 , $i = 1, 2$, d_{3s}^1 - заданные вещественные числа.

Справедлива

Теорема 11. Пусть для уравнения (1) выполняются условия теоремы 10.

Тогда задача 7 имеет единственное решение, которое получается из формулы (24) заменой произвольных постоянных их значением, соответственно, из равенств

$$C_{1s}^1 = a_{1s}^1, C_{2s}^1 = a_{2s}^1, C_{3s}^1 = d_{3s}^1, s = \overline{0, (n-1)}$$

и систем

$$\begin{aligned}
& K_{b_2, s}^{1, -} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0} = \\
& = I_{b_1, s}^{\alpha_1, +} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), a_{1s}^1, \dots, a_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0}, \\
& K_{b_3, s}^{1, -} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0} = \\
& = K_{b_2, s}^{1, +} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), a_{2s}^1, a_{2(s+1)}^1, \dots, a_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0}, s = \overline{0, (n-1)}.
\end{aligned}$$

Задача 8. Найти решение уравнения (1) таким образом, чтобы

выполнялась следующая система условий:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} [A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^j y]_{x=b_1+0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} [(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^j y]_{x=b_2-0} + \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^j y]_{x=b_2+0} + \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} [(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^j y]_{x=b_3-0} + \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(4n+j)} [(x - b_3)^{p_3^1(b_3+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^j y]_{x=b_3+0} = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, 3n},
\end{aligned}$$

где b_{kj} и ε_k , $j = \overline{0, (5n-1)}$ - заданные вещественные числа.

Исследование задачи 8 проводится переходом к следующему с. л. а. у.:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} C_{1j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} (-1)^j C_{1j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} C_{2j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} (-1)^j C_{2j}^2 + \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(4n+j)} C_{3j}^1 = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, 3n},
\end{aligned} \tag{26}$$

к которой присоединяется определенные с.л.а.у. (25). Применяя преобразования, использованные в случае системы (13), вместо системы (26) получаются с.л.а.у. с $3n$ уравнениями и следующими неизвестными: группу из $C_{1j}^1, C_{2j}^1; C_{1j}^2, C_{2j}^2; C_{3j}^1, C_{3j}^2; C_{1j}^2, C_{2j}^2$ и C_{3j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$, которые обозначим как (26а), (26б), (26в) и (26г). Последние системы вместе с системами (25) эквивалентны системе (26), (25) и между собой, исследование которых даёт следующее заключение:

Теорема 12. Пусть для уравнения (1) выполняются все условия теоремы 10, а в системе (26а), (26б), (26в) или (26г) основная и расширенная матрицы имеют ранг, соответственно, равный r и ρ .

1) Если $r = \rho = 3n$, тогда задача 8 имеет единственное решение, которое получается из формулы (24) заменой в нём произвольных постоянных решением одной из систем (26а), (26б), (26в) и (26г), рассматриваемой вместе с системой (25);

2) Если $r = \rho < 3n$, тогда задача 8 имеет бесконечно много решений и её общее решение выражается через решения одной из систем (26а), (26б), (26в), (26г), рассматриваемой вместе с системой (25), формулой (24), зависящей от $3n - r$ произвольных постоянных;

3) Если $r < 3n$, $r \neq p$, тогда каждая из систем (26a), (26б), (26в), (26г) вместе с системой (25) несовместна, и задача 8 не имеет решения.

В случае $n = 2$ для задач 7 и 8 получены более точные теоремы, подобные, соответственно, теоремам 3 и 5 (теоремы 4.3 и 4.5).

В разделе 4.3 рассмотрен конкретный пример к материалам главы 4.

Глава 5 диссертации посвящена обсуждению полученных результатов.

ВЫВОДЫ

Основные научные результаты диссертации заключаются в следующем:

- получены теоремы о представлении общего решения в интегральном виде для дифференциальных уравнений типа (1):
 - с двумя граничными и одной внутренней сингулярной точками [2-A], [3-A];
 - с двумя граничными и одной внутренней слабо сингулярной точками [1-A], [6-A], [8-A];
 - с тремя внутренними сверхсингулярными точками [4-A], [12-A], [13-A];
 - с одной левой граничной слабо сингулярной и двумя внутренними сингулярными точками [5-A], [14-A].
- получены утверждения о возможности рассмотрения полученных представлений общего решения изучаемых уравнений типа (1) в четырёх равносильных формах [1-A] – [5-A].
- получены утверждения об обратимости полученных интегральных представлений общего решения и явные формулы обращения [1-A] – [5-A].
- получены заключения о поведении решений рассматриваемых уравнений типа (1) в окрестности особых точек [1-A] – [5-A].
- получены теоремы о существовании, единственности и явном представлении решения задач Коши-Рикье для рассматриваемых уравнений специального типа (1) [1-A], [3-A], [4-A], [9-A], [12-A].
- получены теоремы о разрешимости, однозначной разрешимости и явном представлении решения задач типа линейного сопряжения для рассматриваемых уравнений специального типа (1) [1-A], [2-A], [5-A], [13-A], [16-A].

Рекомендации к практическому использованию результатов

Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы для дальнейшей разработки теории дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных с особыми коэффициентами, также в прикладных вопросах.

Материал диссертации может быть использован при чтении специальных

курсов для магистрантов и аспирантов.

Выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю доценту Олими Абдуманон Гафорзода за постановку задач, неоценимую помощь и поддержку при работе над диссертацией и академику Раджабову Нусрату Раджабовичу за обсуждение полученных результатов и советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

А) Список использованных источников

[1]. Александров, А.Я. Пространственные задачи теории упругости [Текст] / А.Я. Александров, Ю.И. Соловьев. – М.: Наука, 1978. – 464 с.

[2]. Дадоджонова, М.Я. Интегральные представления решений и задачи типа Коши-Рикье для одного уравнения, полученного итерированием обыкновенного дифференциального оператора первого порядка со сверхсингулярной точкой [Текст] / М.Я. Дадоджонова, А.Г. Олимов, Н.Р. Раджабов // Докл. АН Республики Таджикистан. – 2014. – Т. 57, № 9-10. – С. 713–719.

[3]. Дадоджанова, М.Я. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений специального типа со слабо сингулярной, сингулярной или сверхсингулярной точкой и их приложения [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Мукаддас Якубджановна Дадоджанова – Худжанд, 2018. – 113 с.

[4]. Кадиров, Г.М. Интегральные представления многообразия решений для одного класса линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с граничными сверхсингулярными точками [Текст] / Г.М. Кадиров, Н. Раджабов // Вестник Таджикского Национального Университета. наук Серия естественных – 2012. – 1-1. – С. 40–49.

[5]. Олимов, А.Г. Об одном обобщении линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка [Текст] / А.Г. Олимов // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. – 2010. – №2(17). – С. 17–19.

[6]. Олимов, А.Г. Интегральное представление решений и задача типа Рикье для одного обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с левой сверхсингулярной точкой [Текст] / А.Г. Олимов // Ученые записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. – 2011. – №3(18). – С. 3–7.

[7]. Олимов, А.Г. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида с сингулярной точкой [Текст] / А.Г. Олимов, М.Я. Дадоджанова // Учёные записки Худжандского государственного

университета имени академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. – 2016. – №3 (38). – С. 24–31.

[8]. Олимов, А.Г. Свойства решений и задачи типа Коши - Рикье для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / А.Г. Олимов, Ш.Э. Мирзоева // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. – 2019. – №1(48). – С. 11–18.

[9]. Олими, А.Г. Формула представления общего решения и задачи типа Коши - Рикье для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с граничной и внутренней слабо сингулярной точкой [Текст] / А.Г. Олими, М.Я. Дадоджанова, Н.К. Охунов, С.А. Толибов // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. – 2021. – №1(56). – С. 22–33.

[10]. Олими, А.Г. Представление общего решения в интегральном виде и задачи типов Коши и линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка со сверхсингулярной точкой [Текст] / А.Г. Олими // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – 2021. – №1. – С. 60–77.

[11]. Раджабов, Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями [Текст] / Н. Раджабов. – часть 4. – Душанбе: изд. ТГУ, 1985. – 157 с.

[12]. Раджабов, Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами [Текст] / Н. Раджабов. – Душанбе: изд-во ТГУ, 1992. – 236с.

[13]. Раджабов, Н. Задачи типов линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с тремя внутренними сингулярными точками [Текст] / Н. Раджабов, Е. Шишкина // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и её приложения». – Худжанд, 2003. – С. 119–122.

[14]. Раджабов, Н. Решение немодельного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н. Раджабов, С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2009. – №1 (49). – С. 3–14.

[15]. Раджабов, Н. Линейная модельная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной левой граничной сингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов, О.И. Меликов // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2015. – Т. 58, № 6. – С.451–457.

[16]. Сансоне, Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст]: том 2 / Дж. Сансоне. – М.: ИЛ, 1954. – 415 с.

[17]. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.

[18]. Хидиров, Х.С. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с тремя сингулярными точками [Текст] / Х.С. Хидиров // Докл. АН Республики Таджикистан. – 2010. – Т. 53, №1. – С. 20–24.

[19]. Rajabov, N.R. Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients / N. R. Rajabov. – Dushanbe: TSNU, 1998. – 158 p.

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В изданиях из перечня ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Министерства науки и высшего образования РФ:

[1-А]. Охунов, Н.К. Представление общего решения в интегральном виде и граничные задачи для одного обыкновенного операторно - дифференциального уравнения с тремя слабо сингулярными точками [Текст] / А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – 2022. – №3. – С. 141–159.

[2-А]. Охунов, Н.К. Задача типа линейного сопряжения для операторно - дифференциального уравнения с двумя граничными и одной внутренней сингулярными точками [Текст] / А.Г. Олими, Н.К. Охунов// Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия естественные и экономические науки. – 2022. – №4 (63). – С.12–20.

[3-А]. Охунов, Н.К. Представление общего решения в интегральном виде и задачи Коши-Рикье для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с тремя сингулярными точками [Текст] / Н.Р. Раджабов, А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – 2023. – №1. – С. 69–82.

[4-А]. Охунов, Н.К. Интегральное представление общего решения и задачи Коши - Рикье для обыкновенного операторно-дифференциального уравнения с тремя внутренними сверхсингулярными точками [Текст] / Н.К. Охунов // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия естественные и экономические науки. – 2023. – №2 (65). – С.9–22.

[5-А]. Охунов, Н.К. Интегральное представление общего решения и задача типа линейного сопряжения для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с левой граничной слабосингулярной и двумя внутренними

сингулярными точками [Текст] / А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – 2023. – №3. – С. 63–81.

2. В сборниках материалов конференций:

[6-А]. Охунов, Н.К. Интегральное представление общего решения и граничные задачи для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с тремя слабо сингулярными точками [Текст] / А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Уфимская осенняя математическая школа: Материалы международной научной конференции. – Уфа: Аэтерна, 2021. – В 2 томах, том 1. – С. 205–207.

[7-А]. Охунов, Н.Қ. Тасвири интегралӣи ҳалли умумӣ ва масъалаҳои Кошӣ - Рикӣе барои як муодилаи операторӣ - дифференсиалии одӣ бо се нуқтаи сингулярнокиаш паст [Матн] / А.Ғ. Олимӣ, Н.Қ. Охунов // Маводи конференсияи илмӣ – амалии ҷумҳуриявӣ «Муаммоҳои муосири математикаи татбиқӣ ва нақши он дар тавсеаи тафаккури техникаи ҷомеа». – Хучанд: Нури маърифат, 2021. – С. 130–133.

[8-А]. Охунов, Н.К. Задача типа линейного сопряжения для обыкновенного операторно - дифференциального уравнения с тремя слабо сингулярными точками [Текст] / Н.К. Охунов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш. Шабозова. – Душанбе: ООО Эр-граф, 2022. – С. 291–295.

[9-А]. Охунов, Н.К. Общее представление решений и задачи Коши-Рикье для одного операторно-дифференциального уравнения с тремя сингулярными точками [Текст] / А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». Том 2 /отв. ред. З.Ю. Фазуллин. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2022. – С. 216–218.

[10-А]. Охунов, Н.К. Пример задачи типа линейного сопряжения для одного операторно - дифференциального уравнения с тремя слабо особыми точками [Текст] / Н.К. Охунов // Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвящённой 20 - летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы. – Душанбе, 2022. – С. 144–149.

[11-А]. Охунов, Н.К. Пример краевой задачи для одного обыкновенного дифференциального уравнения [Текст] / Н.К. Охунов, А.Г. Олими // Материалы международной научно-практической конференции «Комплексный анализ и его приложения», посвященной «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования», 75-летию чл. корр.

НАН Таджикистана И.К. Курбанова и 70-летию профессора Д.С. Сафарова – Бохтар, 2022. – С.147–151.

[12-А]. Охунов, Н.К. Формула представления общего решения и задачи с начальными условиями для одного обыкновенного операторно - дифференциального уравнения с тремя внутренними сверхсингулярными точками [Текст] / Н.К. Охунов // Материалы международной научно-практической конференции «Развитие математических, точных и естественных наук в современных условиях: проблемы и перспективы». – Дангара, 2023 г. – С. 165–170.

[13-А]. Охунов, Н.К. Задача сопряжения решений для одного обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с тремя внутренними сверхсингулярными точками [Текст] / Н.К. Охунов, А.Г. Олими // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики», посвященной 50-летию Института математики им. А. Джураева НАН Таджикистана. – Душанбе, 2023. – С. 155 – 158.

[14-А]. Охунов, Н.К. Исследование по теории одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений специального типа с тремя сингулярными точками разного порядка / Н.К. Охунов // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвященной 75-летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук 2020-2040 годы, 85-летию академика НАН Таджикистана Н. Раджабова. – Душанбе, 2023. – С. 138-143.

[15-А]. Охунов, Н.К. К теории класса обыкновенных дифференциальных уравнений с тремя сингулярными точками разного порядка [Текст] / А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики. Материалы международной научной конференции. - Нальчик, 2023. – С. 214 – 216.

[16-А]. Охунов, Н.К. Задача сопряжения для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с граничными и внутренней сингулярными точками [Текст] / Н.К. Охунов // Материалы международной научно-практической конференции «Математика в современном мире», посвященной Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических дисциплин в области науки и образования и 70-летию профессора С. Байзоева (Худжанд, 20 апреля 2024 г.). – Худжанд, 2024. – С. 50-55.

**ВАЗОРАТИ МАОРИФ ВА ИЛМИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
МДТ «ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ ХУЧАНД БА НОМИ
АКАДЕМИК Б. ҒАФУРОВ»**

ВБД 517.927

Бо ҳуқуқи дастнавис

ТКБ 22.161.1

О - 92



Охунзода Нозимҷон Қобил

**ТАСВИРИ ИНТЕГРАЛИИ ҲАЛҲО ВА МАСЪАЛАҲОИ КАНОРӢ БАРОИ
БАЪЗЕ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ОДИИ НАМУДИ
МАХСУСИ ДОРОИ СЕ НУҚТАҲОИ СИНГУЛЯРНОКИИ ПАСТ,
СИНГУЛЯРӢ Ё СИНГУЛЯРНОКИИ БАЛАНД**

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмӣ
номзади илмҳои физика ва математика
аз рӯйи ихтисоси 01.01.02 - Муодилаҳои дифференсиалӣ,
системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ

Хучанд - 2025

**Кори диссертатсионӣ дар кафедраи анализи математикии ба номи
профессор А. Мухсинови МДТ «Донишгоҳи давлатии Хучанд ба номи
академик Б. Ғафуров» иҷро гардидааст**

Роҳбари илмӣ:

Олимӣ Абдуманон Ғафурзода,

номзади илмҳои физикаю математика, дотсент,
дотсенти кафедраи анализи математикии ба
номи профессор А. Мухсинови МДТ
«Донишгоҳи давлатии Хучанд ба номи
академик Б. Ғафуров»

**Муқарризони
расмӣ:**

Расулов Абдурауф Бобочонович,

доктори илмҳои физикаю математика,
профессори кафедраи математикаи олии
«Донишгоҳи миллии тадқиқоти «ДЭМ»»

Садриддинов Маҳмадӣ Маҳмудович,

номзади илмҳои физикаю математика, дотсент,
мудир кафедраи математикаи олии Донишгоҳи
техникии Тоҷикистон ба номи академик
М.С. Осимӣ.

**Муассисаи
пешбар:**

МДТ «Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи
Носири Хусрав»

Ҳимоя диссертатсия санаи 13-уми сентябри соли 2025 соати 12-00 дар
ҷаласаи Шурои диссертатсионии 6D.KOA-084 назди Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ,
бизнес ва сиёсати Тоҷикистон аз рӯи нишони 735700, ш. Хучанд, маҳаллаи 17-
ум, бинои 1, корпуси 5, аудиторияи 208, баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи илмӣ Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес
ва сиёсати Тоҷикистон ва тавассути сомонаи [http: // www. tsulpb.tj](http://www.tsulpb.tj) шинос шудан
мумкин аст.

Автореферат санаи « ____ » _____ соли 2025 фиристода шудааст.

**Котиби илмӣ Шурои диссертатсионии
6D.KOA-084, номзади илмҳои физикаю
математика, дотсент**

Ш.Ф. Мухамедова

МУҚАДДИМА

Муҳиммияти мавзӯи тадқиқот. Ба омӯзиши муодилаҳои дифференсиалии таназзулбанда ё муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффитсиентҳои сингулярӣ масъалаҳои зиёд аз физикаи назариявӣ, техника, бахшҳои гуногуни физикаи математикӣ, ба монанди назарияи майдон, назарияи чандирӣ, назарияи лаппишҳо, назарияи ҷозибҳо, гидродинамика, динамикаи газӣ, назарияи идоракунии автоматӣ ва ғайра меоранд [1, 16, 17].

Дар қорҳои бунёдии М.В. Келдиш, А.В. Битсадзе, М.М. Смирнов ҳосиятҳои моҳиятноки муодилаҳои дифференсиалии табдилбанда бо ҳосилаҳои хусусӣ ошкор карда шуданд, аз ҷумла таъсири дараҷаи таназзул ва қимати коэффитсиентҳо ба сохтори маҷмӯи ҳалли ин муодилаҳо ва махсусиятҳои гузориши масъалаҳои канорӣ барои онҳо муайян карда шудаанд. Қорҳои зикршуда ба афзоиши назарраси тавачҷӯҳ ба омӯзиши муодилаҳои дифференсиалии таназзулбанда ва сингулярӣ мусоидат карданд.

Маълумоти фарохро дар бораи тадқиқот оид ба назарияи муодилаҳои дифференсиалии таназзулбанда ва сингулярӣ ва саҳми олимони шӯравӣ, хориҷӣ ва ватанӣ дар қоркарди муаммоҳои муҳими самти мазкур, масалан, аз монографияҳои А.В. Битсадзе, М.М. Смирнов, Н.Р. Раҷабов, К.Б. Сабитов, В.В. Катрахов ва С.М. Ситник, А. Сатторов, R.P. Gilbert, H. Begehr гирифтани мумкин аст, ки дар онҳо библиографияи муфассал доир ба ин мавзӯ мавҷуд аст. Дар таҳияи назарияи муодилаҳои дифференсиалии таназзулбанда ва сингулярӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ А.В. Битсадзе, И.Н. Векуа, В.Ф. Волкодавлов, А.Д. Ҷӯраев, Т.Д. Ҷӯраев, В.А. Илин, Т.Ш. Калменов, М.В. Келдиш, В.В. Катрахов, И.А. Киприянов, Л.Д. Кудрявцев, П.И. Лизоркин, Л.Г. Михайлов, С.Г. Михлин, Е.И. Моисеев, А.М. Нахушев, С.М. Николский, С.П. Пулкин, Н.Р. Раҷабов, К.Б. Сабитов, М.С. Салоҳитдинов, М.М. Смирнов, А.П. Солдатов, С.А. Терсенов, З.Д. Усмонов, Ф.И. Франкл, А.И. Янушаускас, Л. Берс, А. Вайнштейн, Р. Ҷилберт, Р. Керролл, Р. Шоултерр ва бисёр дигарон саҳми бузург гузоштаанд.

Дар ҷумҳурии мо тадқиқи муодилаҳои дифференсиалии сингуляро Л.Г. Михайлов сар кардааст, ки барҳақ асосгузори ин мактаби математикӣ ҳисоб меёбад. Минбаъд ин тадқиқотҳо аз ҷониби ӯ ва шогирдонаш Н.Р. Раҷабов, З.Д. Усмонов, Г. Ҷангибеков ва А. Мухсинов дар самтҳои гуногун васеъ ва густариш дода шуданд.

Дар масъалаҳои хусусияти амалӣ ва тадқиқоти назариявӣ муодилаҳои дифференсиалии одии хаттӣ ва ғайрихаттӣ бо намуди гуногуни таназзул ё сингулярноқӣ мавқеи муҳимро ишғол мекунанд. Татбиқоти муҳими муодилаҳои Бессел, Лагерр, Эрмит, Чебишёв, Лежандр, Эйри муодилаи гипергеометрӣ,

муодилаи Эмден барои гази политропӣ ва ғайраҳоро ба хотир овардан кифоя аст [16, 17]. Дар назарияи муодилаҳои ҳосилаҳои хусусидори сингулярӣ, муодилаҳои интегралӣ, интегро-дифференсиалии намудҳои Волтерр ва системаҳои барзиёдмуайяншудаи онҳо, бо ёрии муодилаҳои дифференсиалии одии мувофиқ бисёр масъалаҳои назариявӣ самаранок ҳал карда мешаванд [11, 12].

Аз ин рӯ, омӯзиши муодилаҳои дифференсиалии одӣ, алалхусус бо коэффитсиентҳои тағйирёбанда, ки сингулярнокии тартиботи гуногун доранд, масъалаи муҳим аст.

Дарачаи коркарди мавзӯи илмӣ. Мавзӯи ин диссертатсия бо тадқиқоти дар ҷумҳурии мо оид ба муодилаҳои дифференсиалии одии сингулярӣ таҳти роҳбарии Н.Р. Раҷабов гузаронидашаванда зич алоқаманд аст.

Дар як қатор асарҳо, ба монанди [11, 12, 19] Н.Р. Раҷабов усулҳои универсалии тадқиқи муодилаҳои дифференсиалии одии хаттӣ ва ғайрихаттии тартиби гуногун, системаҳои хаттии онҳоро, ки коэффитсиентҳояшон як ё якчанд нуқтаҳои сингулярнокии паст, сингулярӣ ва сингулярнокии баланд (махсус) доранд, вобаста ба ҷойгиршавии ин нуқтаҳо, коркард кардааст. Мувофиқи усули пешниҳодшуда дар ҳолати як нуқтаи махсус, аввал мавриде тадқиқ карда мешавад, ки нуқта бо нуқтаи сарҳадӣ баробар мебошад ва ҳолати мувофиқ омадани нуқтаи махсус бо нуқтаи дохилии фосола ба ҳолати баррасишуда оварда мешавад. Дар ҳолате, ки коэффитсиентҳои муодилаҳо нуқтаҳои махсуси зиёд доранд, Н.Р. Раҷабов омӯзиши онҳоро ба омӯзиши як қатор муодилаҳои мувофиқ бо як нуқтаи махсуси сарҳадӣ овардааст (ниг., масалан ба [19]).

Дар корҳои А.Ғ. Олимӣ (Олимов) [5, 6] усули ёфтани тасвири интегралӣ ҳалли умумии муодилаҳое коркард шудааст, ки бо татбиқи бисёркаратаи операторҳои дифференсиалии одӣ ҳосил шудаанд.

Муодилаҳои дифференсиалии одии хаттии тартиби дуюм ва боло, системаҳо ва намудҳои махсуси онҳо бо як нуқтаи сингулярӣ дар асарҳои Ғ. Қодиров, Н.Р. Раҷабов, О.И. Меликов, М.Ё. Дадочонова, А.Ғ. Олимӣ [2, 4, 7, 10, 15], бо ду нуқтаҳои сингулярӣ дар асарҳои Н.Р. Раҷабов, С.Қ. Зарифзода (Зарипов), А.Ғ. Олимӣ, Ш.Э. Мирзоева, М.Ё. Дадочонова, Н.Қ. Охунзода (Охунов), С.А. Толибов [8, 9, 14], бо се нуқтаҳои сингулярӣ дар асарҳои Х.С. Хидиров [18] ва Н.Р. Раҷабов, Е. Шишкина [13] мавриди омӯзиш қарор гирифтаанд.

Муодилаҳои дифференсиалии одии тартибҳои баланд бо коэффитсиентҳои тағйирёбанда, намудҳои махсуси онҳо, ки се ва зиёда нуқтаи сингулярии тартиби якхела доранд, кам омӯхта шудаанд ва мо дар бораи ҳолатҳое, ки тартиби нуқтаҳои сингулярии ин муодилаҳо гуногунанд, ҳеҷ интишороте ошкор

нанамудем.

Алоқамандии кор бо барномаҳои илмӣ (лоиҳаҳо), мавзӯҳо. Ин кори диссертатсионӣ дар доираи татбиқи нақшаи дурнамои корҳои илмӣ-тадқиқотии кафедраи анализи математикӣ ба номи профессор А. Муҳсинов дар МДТ «Донишгоҳи Давлатии Хучанд ба номи академик Б. Гафуров» аз рӯи мавзӯи «Тадқиқоти синфҳои муодилаҳои дифференсиалии одӣ бо махсусиятҳо, ҳалшавандагии системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалӣ дар фазоҳои гуногуни функционалӣ, татбиқи гурӯҳҳо ва алгебраи Ли дар омӯзиши муодилаҳои дифференсиалӣ» барои солҳои 2021 – 2025 иҷро карда шудааст.

ТАВСИФОТИ УМУМИИ ТАДҚИҚОТ

Объекти тадқиқот. Дар кори диссертатсионӣ муодилаҳои намуди махсуси

$$A_{(\alpha),(b)}^n y = f(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i}, \quad (1)$$

ки дар натиҷаи таъсири n – каратаи такрории оператори дифференсиалии одии

$$A_{(\alpha),(b)} y \equiv y' + p(x) \left(\prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i} \right) y - q(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i},$$

аз рӯи қоидаи $A_{(\alpha),(b)}^0 y \equiv y$, $A_{(\alpha),(b)}^s y = A_{(\alpha),(b)} (A_{(\alpha),(b)}^{s-1} y)$, $s = \overline{1, n}$ ҳосил шудаанд, дар маҷмӯи $\Gamma_{(b)} = \Gamma \setminus (b)$ – и тири ададии ҳақиқӣ муоина ва омӯхта мешаванд, ки дар ин ҷо

$\Gamma = (a, b)$, $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$, $a \leq b_1 < b_2 < b_3 \leq b$, $(\alpha) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\alpha_i > 0$ - ададҳои ҳақиқӣ, n - адади натуралӣ ва b_i , $i = 1, 2, 3$ нуқтаҳои сингулярии (махсус) - и муодилаи (1) ва оператори $A_{(\alpha),(b)}$ бо тартиби сингулярнокии (махсусияти) α_i мебошанд, ки онҳо, чун дар корҳои [2, 19], ҳангоми $0 < \alpha_i < 1$, $\alpha_i = 1$, $\alpha_i > 1$ мувофиқан нуқтаи сингулярнокии паст, сингулярӣ ва сингулярнокии баланд ҳисобида мешаванд, $p(x)$, $q(x)$ ва $f(x)$ - функцияҳои маълуми дар порчаи $\bar{\Gamma}$, шояд ба ғайр аз нуқтаҳои b_i , бефосила ҳастанд, ки дар онҳо метавонанд каниши навъи яқум дошта бошанд (дар оянда инро шарти А меномем), инчунин, мувофиқан $p(b_i \pm 0) \neq 0$ аст.

Мафҳуми ҳалли муодилаи (1) чун дар корҳои [2, 5, 6] бо тарзи зерин дохил карда мешавад:

Таъриф. Функцияи $y(x)$ ҳалли муодилаи (1) номида мешавад, агар он ба шартҳои $A_{(\alpha),(b)}^s y \in C^1(\Gamma_{(b)})$, $s = \overline{0, n-1}$ тобеъ бошад ва ифодаи $A_{(\alpha),(b)}^n y$ муодиларо нисбат ба нуқтаҳои маҷмӯи $\Gamma_{(b)}$ ба айният табдил диҳад.

Мақсади тадқиқот. Ҳосил кардани ҳалли умумӣ дар шакли интегралӣ барои баъзе муодилаҳои намуди махсуси (1) бо се нуқтаи сингулярии дорои тартибҳои гуногун, муайян кардани хосиятҳои характеристикӣ тасвирҳои ёфташуда, бо ёрии онҳо омӯзиши рафтори ҳалҳо дар атрофи нуқтаҳои махсус, инчунин муайян кардани гузориши дуруст ва тадқиқи масъалаҳои канорӣ бо шартҳои дар нуқтаҳои махсус додашуда мебошад.

Вазифаҳои тадқиқот. Мувофиқи мақсади гузошташуда вазифаҳои зеринро муайян менамоем:

1. Ёфтани тасвири ҳалли умумӣ дар шакли интегралӣ барои муодилаҳои намуди махсуси (1):

- бо ду нуқтаҳои сарҳадӣ ва як нуқтаи дохилии сингулярӣ;
- бо ду нуқтаҳои сарҳадӣ ва як нуқтаи дохилии сингулярнокии паст;
- бо се нуқтаҳои дохилии сингулярнокии баланд;
- бо як нуқтаи сарҳадии чапи сингулярнокии паст ва ду нуқтаҳои сингулярии дохилӣ.

2. Муқаррар кардани формулаҳои баргардони тасвирҳои интегралӣ ҳалли умумии муодилаҳои баррасишавандаи намуди (1).

3. Татбиқи тасвирҳои интегралӣ ҳосилшудаи ҳалли умумии муодилаҳои муоинашавандаи намуди (1) барои омӯзиши рафтори ҳалҳо дар атрофи нуқтаҳои махсус.

4. Татбиқи тасвирҳои интегралӣ бадастомадаи ҳалли умумии муодилаҳои намуди (1) барои гузориш ва тадқиқи як қатор масъалаи канорӣ Коши-Риккё ва намуди хаттӣ-ҳамроҳшавӣ бо шартҳо дар нуқтаҳои махсус ва ёфтани ҳалли онҳо дар намуди ошкоро.

Предмети тадқиқот. Ҳосил кардани тасвири интегралӣ ҳалли умумии муодилаҳои намуди (1), муқаррар кардани формулаҳои баргардони тасвирҳо, омӯзиши рафтори ҳалҳои муодилаҳои баррасишаванда дар атрофи нуқтаҳои махсус, гузориш, тадқиқ ва ҳалли масъалаҳои Коши-Риккё ва намуди хаттӣ-ҳамроҳшавӣ дар шакли ошкоро.

Методҳои тадқиқот. Дар қор методҳои умумии назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ, методи ҳосил кардани тасвирҳои интегралӣ, инчунин методҳои муосири тадқиқи муодилаҳои дифференсиалии одӣ бо бисёр нуқтаҳои махсус истифода мешаванд.

Навгони илмӣ тадқиқот. Дар қори диссертатсионӣ бори аввал натиҷаҳои зерин ба даст оварда шуданд:

1. Барои муодилаҳои намуди махсуси (1):

- бо ду нуқтаҳои сарҳадӣ ва як нуқтаи дохилии сингулярӣ;
- бо ду нуқтаҳои сарҳадӣ ва як нуқтаи дохилии сингулярнокии паст;
- бо се нуқтаҳои дохилии сингулярнокии баланд;

- бо як нуқтаи сарҳадии чапи сингулярнокии паст ва ду нуқтаҳои сингулярии дохилӣ,

тасвири ҳалли умумӣ дар шакли интегралӣ ҳосил карда шудааст, ки аз n - доимиҳои ихтиёрӣ вобаста мебошад.

2. Муқаррар карда шудааст, ки тасвирҳои интегралӣ ҳалли умумии муодилаҳои омӯхташавандаи намуди (1) - ро метавон дар чор шакли баробарқувва баррасӣ ва истифода бурд.

3. Барои тасвирҳои интегралӣ ҳосилшудаи ҳалли умумии муодилаҳои баррасишавандаи намуди (1) баробариҳои характеристикӣ ёфта шудаанд, ки барои онҳо формулаи баргардонӣ мебошанд.

4. Дар бораи рафтори ҳалҳои муодилаҳои баррасишавандаи намуди махсуси (1) дар атрофи нуқтаҳои махсус тасдиқот ба даст оварда шудааст.

5. Барои муодилаҳои баррасишавандаи намуди махсуси (1) масъалаҳои канории Коши-Рикйе ва намуди хаттӣ-ҳамрошавӣ бо шартҳо дар нуқтаҳои махсус гузошта, тадқиқ карда ва ҳалли онҳо дар шакли ошкоро ёфта шудааст.

Аҳамияти назариявӣ ва илмӣ-амалии кор. Натиҷаҳои дар рисола ба даст овардашуда хусусияти назариявӣ доранд. Онҳо барои коркарди минбаъдаи назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ, ҳам одӣ ва ҳам бо ҳосилаҳои хусусӣ бо коэффитсиентҳои махсус, инчунин дар ҳалли масъалаҳои амалӣ истифода шуда метавонанд.

Нуқтаҳои, ки ба ҳимоя бароварда мешаванд.

- Теоремаҳо дар бораи тасвири ҳалли умумӣ дар шакли интегралӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ намуди (1):

- бо ду нуқтаҳои сарҳадӣ ва як нуқтаи дохилии сингулярӣ;
- бо ду нуқтаҳои сарҳадӣ ва як нуқтаи дохилии сингулярнокии паст;
- бо се нуқтаҳои дохилии сингулярнокии баланд;
- бо як нуқтаи сарҳадии чапи сингулярнокии паст ва ду нуқтаҳои сингулярии дохилӣ.

- Тасдиқот дар бораи имконоти баррасии тасвирҳои гирифташудаи ҳалли умумии муодилаҳои омӯхташудаи намуди (1) дар чор шаклҳои баробарқувва, вобаста ба ҷойгиршавии доимиҳои ихтиёрӣ.

- Тасдиқот дар бораи баргардандагии тасвирҳои интегралӣ ёфташудаи ҳалли умумӣ ва формулаҳои ошкорои баргардонӣ.

- Хулоса дар бораи рафтори ҳалҳои муодилаҳои баррасишавандаи намуди (1) дар атрофи нуқтаҳои махсус.

- Теоремаҳо дар бораи мавҷудият, ягонагӣ ва тасвири ошкорои ҳалли масъалаҳои Коши-Рикйе барои муодилаҳои баррасишавандаи намуди махсуси (1).

- Теоремаҳо дар бораи ҳалшавандагӣ, ягона ҳалшавандагӣ ва тасвири ошкорои ҳалли масъалаҳои намуди хаттӣ-ҳамроҳшавӣ барои муодилаҳои муоинашавандаи намуди махсуси (1).

Дарачаи эътимоднокии натиҷаҳо. Эътимоднокии натиҷаҳои диссертатсия бо исботҳои қатъии математикии теоремаҳо, тасдиқот ва хулосаҳои дар кор овардашуда ва мутобиқати онҳо ба натиҷаҳои муаллифони дигар таъмин карда мешавад.

Мутобиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ (формула ва соҳаҳои тадқиқот). Кори диссертатсионӣ аз рӯи ихтисоси 01.01.02 – муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ, мувофиқи Шиносномаи ихтисос иҷро карда шудааст ва ба формула (ҳалшавандагӣ ва хосиятҳои ҳалҳои муодилаҳои дифференсиалии одӣ) ва бандҳои соҳаи тадқиқоти он (1. Назарияи умумии муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаҳои муодилаҳои дифференсиалӣ; 2. Масъалаҳои ибтидоӣ-канорӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаҳои муодилаҳои дифференсиалӣ; 7. Назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ-операторӣ) мутобиқат дорад.

Саҳми шахсии довталаби дарачаи илмӣ. Саҳми довталаб аз иштироки бевоситаи ӯ дар гирифтани натиҷаҳои илмии ба ҳимоя баровардашаванда, омода кардани интишороти асосӣ оид ба кори иҷрошуда ва иштироки шахсӣ дар озмоиши натиҷаҳои тадқиқот иборат аст.

Озмоиши натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар конферонсҳо ва семинарҳои зерин маъруза ва муҳокима карда шудаанд:

- Конференсияи байналмилалӣ илмӣ «Мақтаби математикии тирамоҳии Уфа» (6-9 октябри соли 2021), ш. Уфа;

- Конференсияи ҷумҳуриявӣ илмӣ-амалии «Муаммоҳои муосири математикаи амалӣ ва нақши он дар рушди тафаккури техникийи ҷомеа» (29-30 октябри соли 2021), ш. Хучанд;

- Конференсияи байналмилалӣ илмӣ «Муаммоҳои муосири таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳо», бахшида ба 70-солагии академики АМИТ М.Ш. Шабозов (24-25 июни соли 2022), ш. Душанбе;

- Конференсияи байналмилалӣ илмӣ «Мақтаби математикии тирамоҳии Уфа» (28 сентябр - 1 октябри соли 2022), ш. Уфа;

- Конференсияи байналмилалӣ илмӣ-амалии «Муаммоҳои муосири математика ва татбиқоти он», бахшида ба 20-солаи рушди илмҳои табиӣ, дақиқ ва риёзӣ барои солҳои 2020-2040 (20-21 октябри соли 2022), ш. Душанбе;

- Конференсияи байналмилалӣ илмӣ-амалии «Таҳлили комплексӣ ва татбиқоти он», бахшида ба «Бистсолаи омӯзиш ва рушди илмҳои табиӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илм ва маориф», 75-солагии узви вобастаи АМИТ И.Қ. Қурбонов

ва 70-солагии д.и.ф.-м., профессор Ҷ.С. Сафаров (19 ноябри соли 2022), ш. Бохтар;

- Конференсияи байналмилалӣ илмӣ-амалӣ «Рушди илмҳои математикӣ, дақиқ ва табиӣ дар шароити муосир: мушкилот ва дурнамо» (28-29 апрели соли 2023), Данғара;

- Конференсияи байналмилалӣ «Муаммоҳои муосири математика», бахшида ба 50-солагии Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви АМИ Тоҷикистон (26-27 майи соли 2023), ш. Душанбе;

- Конференсияи байналмилалӣ «Муаммоҳои муосири математика ва татбиқоти он», бахшида ба 75-солагии ДМТ, 20-солаи рушди илмҳои дақиқ, табиӣ ва риёзӣ барои солҳои 2020-2040, 85-солагии академики АМИТ Н. Раҷабов (5 октябри соли 2023), ш. Душанбе;

- Конференсияи байналмилалӣ илмӣ «Масъалаҳои ғайрилокалии канорӣ ва муаммоҳои ҳамшафати биологияи математикӣ, информатика ва физика» (4-8 декабри соли 2023), ш. Нальчик;

- Конференсияи байналмилалӣ илмӣ-амалӣ «Математика дар ҷаҳони муосир», бахшида ба Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илм ва маориф ва 70-солагии профессор С. Байзоев (20 апрели соли 2024), ш. Хучанд;

- Семинари умумишахрии кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои Донишгоҳи миллии Тоҷикистон «Таҳлили комплексӣ ва татбиқоти он» (зери роҳбарии академики АМИТ Н. Раҷабов), соли 2024;

- Конференсияҳои илмӣ назариявии апрелии олимони ҷавон ва ҳаёати профессорон-омӯзгорони Донишгоҳи давлатии Хучанд ба номи академик Б. Ғафуров, солҳои 2021-2024;

- Семинари илмӣ-назариявии кафедраи анализи математикии ба номи профессор А. Мухсинови Донишгоҳи давлатии Хучанд, солҳои 2021-2024.

Интишорот аз рӯи мавзӯи диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар 16 мақолаҳо нашр шудаанд, аз ин шумора 5 мақолаи аввал дар нашрияҳои рӯйхати маҷаллаҳо ва нашрияҳои тақризшавандаи аз ҷониби КОА назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КОА Вазорати илм ва таҳсилоти олии ФР тавсия додашуда ва боқимонда дар маводи конференсияҳои илмӣ ҷоп шудаанд. Дар қорҳои муштарак гузоштани вазифа ва интихоби усули исботҳо ба роҳбари илмӣ тааллуқ дорад. Академик Н. Раҷабов кӯмаки машваратӣ расонидааст.

Соҳтор ва ҳаҷми қор. Диссертатсия аз муқаддима, панҷ боб, хулоса, рӯйхати адабиёт, ки фарогири 148 номгӯй сарчашмаҳои илмиву тадқиқотӣ аст, иборат буда 160 саҳифаи матни компютериро дарбар мегирад. Дар рисола рақамгузори дукарата қабул шудааст. Рақами аввал рақами бобро нишон медиҳад, рақами дуюм рақами бахш, теорема, натиҷа ва қайдро дар дохили боб

ифода мекунад. Ба ҳамин тариқ формулаҳо рақамгузорӣ карда мешаванд, дар ин ҳол барои натиҷа аз формула рақами он бо ҳарфи иловагии а, б, в ё г нигоҳ дошта мешавад.

Ҳангоми баён кардани мазмуни диссертатсия ишоратҳои дар қорҳои [2, 19] қабулшуда ва баъзе шакли тағйирёфтаи онҳо истифода шудаанд.

ҚИСМИ АСОСӢ

Мавод ва усулҳои тадқиқот. Маводи диссертатсия ба ҳосил кардани тасвири интегралӣ ҳалли умумии як қатор муодилаи намуди (1), омӯзиши хосиятҳои хarakterистикӣ тасвирҳо, татбиқи онҳо барои омӯзиши рафтори ҳалҳо ва тадқиқи масъалаҳои канорӣ бо шартҳо дар нуқтаҳои махсус, бахшида шудааст. Дар қор усулҳои умумии назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ, усулҳои қорқардқардаи Н. Раҷабов [11, 12, 19], А.Ғ. Олимӣ (Олимов) [5, 6], назарияи системаҳои муодилаҳои алгебравии хаттӣ (с. м. а. х.) ва натиҷаҳои дар тадқиқоти [2, 3] гирифташуда, истифода шудаанд.

Натиҷаҳои тадқиқот. Мухтасар мазмуни қори диссертатсиониро баён менамоем. Ишораҳои зеринро дохил мекунем:

$$\begin{aligned}
 p_i^1(x) &= p(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i}, & q_i^1(x) &= q(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i}, \\
 f_i^1(x) &= f(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i}, & p_i^2(x) &= p(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i}, \\
 q_i^2(x) &= q(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i}, & f_i^2(x) &= f(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i}, \\
 w_{p_i^1, b_i}^{\alpha_i, +}(x) &= \int_{b_i}^x \frac{p_i^1(t) - p_i^1(b_i + 0)}{(t - b_i)^{\alpha_i}} dt, & w_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) &= \int_x^{b_{i+1}} \frac{p_i^2(b_{i+1} - 0) - p_i^2(t)}{(b_{i+1} - t)^{\alpha_{i+1}}} dt, \\
 \omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(x) &= [(\alpha_i - 1)(x - b_i)^{\alpha_i - 1}]^{-1}, & \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) &= [(\alpha_{i+1} - 1)(b_{i+1} - x)^{\alpha_{i+1} - 1}]^{-1}, \\
 u_{p_i^1, b_i}^{\alpha_i, +}(x) &= \int_{b_i}^x \frac{p_i^1(t)}{(t - b_i)^{\alpha_i}} dt, & u_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) &= \int_x^{b_{i+1}} \frac{p_i^2(t)}{(b_{i+1} - t)^{\alpha_{i+1}}} dt, \\
 F_s[x - \xi, \varphi(\xi), \theta(\xi)] &= \sum_{j=0}^{n-s-1} \frac{(x - \xi)^j}{j!} \varphi(\xi) + \frac{(x - \xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} \theta(\xi).
 \end{aligned}$$

Дар боби 1 баррасӣ ва таҳлили корҳои ба мавзӯи таҳқиқот наздик гузаронида шудааст.

Дар боби 2 муодилаҳои намуди (1) бо ду нуктаҳои сарҳадӣ ва нуктаи дохилии сингулярӣ ва сингулярнокии паст омӯхта шудаанд.

Дар банди 2.1-и боби 2 натиҷаи асосии зерин исбот карда шудааст:

Теоремаи 1. *Бигзор, нуқтаҳои сингулярии муодилаи (1) дар намуди $a = b_1 < b_2 < b_3 = b$ ҷойгир ва баъдан*

$$\bigcup_{i=1}^2 \Gamma_i, \quad \Gamma_i = (b_i, b_{i+1}), \quad i = 1, 2, \quad \Gamma_i = \Gamma_i^1 \cup \Gamma_i^2, \quad \Gamma_i^1 = (b_i, x_i^0], \quad \Gamma_i^2 = [x_i^0, b_{i+1}),$$

x_i^0 - нуқтаи қайдишудаи интервали Γ_i бошад. Бигзор шартҳои зерин иҷро гарданд:

1) *функсияҳои $p(x)$, $q(x)$ ва $f(x)$ шарти А-ро қонеъ гардонанд;*

2) *функсияҳои $p_i^1(x)$ ва $p_i^2(x)$ мувофиқан шартҳои намуди Гёлдерро қонеъ гардонанд:*

$$|p_i^1(x) - p_i^1(b_i + 0)| \leq H_i^1(x - b_i)^{h_i^1}, \quad H_i^1 - \text{const.} > 0, \quad 0 < h_i^1 \leq 1 \quad \text{ҳангоми } x \rightarrow b_i + 0,$$

$$|p_i^2(b_{i+1} - 0) - p_i^2(x)| \leq H_i^2(b_{i+1} - x)^{h_i^2}, \quad H_i^2 - \text{const.} > 0, \quad 0 < h_i^2 \leq 1, \quad (2)$$

ҳангоми $x \rightarrow b_{i+1} - 0$;

3) *нобаробариҳои $p(b_i + 0) > 0$, $p(b_{i+1} - 0) < 0$, $i = 1, 2$ иҷро гарданд;*

4) *Комбинатсияи дилхоҳи дигари аломатҳои ададҳои $p(b_i + 0)$, $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 1, 2$ ҷой дошта ҳам метавонад. Дар ин ҳол, агар барои як ё ҳарду қиматҳои $i = 1, 2$ ба ҷои нобаробарии $p(b_i + 0) > 0$ нобаробарии $p(b_i + 0) < 0$ иҷро шавад, пас функсияҳои $q(x)$ ва $f(x)$, ҳангоми $x \rightarrow b_i + 0$, мувофиқан шарти*

$$q(x) = o[(x - b_i)^{\beta_i^1}], \quad f(x) = o[(x - b_i)^{\gamma_i^1}], \quad \beta_i^1, \gamma_i^1 > -p_i^1(b_i + 0) \quad (3)$$

-ро қонеъ мекунонанд;

Агар барои як ё ҳарду қиматҳои $i = 1, 2$ ба ҷои нобаробарии $p(b_{i+1} - 0) < 0$ нобаробарии $p(b_{i+1} - 0) > 0$ иҷро шавад, пас ин функсияҳо, ҳангоми $x \rightarrow b_{i+1} - 0$, мувофиқан шарти

$$q(x) = o[(b_{i+1} - x)^{\beta_i^2}], \quad f(x) = o[(b_{i+1} - x)^{\gamma_i^2}], \quad \beta_i^2, \gamma_i^2 > p_i^2(b_{i+1} - 0) \quad (4)$$

-ро қонеъ мекунонанд.

Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи (1) дар маҷмӯи $\Gamma_{(b)}$ ва дараҷаҳои оператори $A_{(1),(b)}$ аз он бо ёрии формулаи

$$A_{(1),(b)}^s y = \begin{cases} K_{b_i, s}^{1,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1] & \text{ҳангоми } x \in \Gamma_i^1 \\ K_{b_{i+1}, s}^{1,-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2] & \text{ҳангоми } x \in \Gamma_i^2 \end{cases} \equiv$$

$i = 1, 2$

$$\equiv Q_{(1),(b),s}^{(n)}[p(x), q(x), f(x), C_{1s}^1, C_{1(s+1)}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1; C_{1s}^2, C_{1(s+1)}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2; C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1; C_{2s}^2, C_{2(s+1)}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2], \quad s = \overline{0, (n-1)} \quad (Q_{(1),(b),0}^{(n)}[\dots] \equiv Q_{(1),(b)}^{(n)}[\dots]), \quad (5)$$

дар ин ҷо

$$K_{b_i,s}^{1,+}[p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1] \equiv (x - b_i)^{-p_i^1(b_i+0)} \times \\ \times \exp[-w_{p_i^1, b_i}^{1,+}(x)] \left\{ \int_{b_i}^x F_s[x - \xi, q_i^1(\xi), f_i^1(\xi)] \times \right. \\ \left. \times (\xi - b_i)^{p_i^1(b_i+0)-1} \exp[w_{p_i^1, b_i}^{1,+}(\xi)] d\xi + \sum_{j=s}^{n-1} C_{ij}^1 \frac{(x - b_i)^{j-s}}{(j-s)!} \right\}, \quad (6)$$

$$K_{b_{i+1},s}^{1,-}[p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2] \equiv (b_{i+1} - x)^{p_i^2(b_{i+1}-0)} \times \\ \times \exp[-w_{p_i^2, b_i}^{1,+}(x)] \left\{ (-1)^s \sum_{j=s}^{n-1} C_{ij}^2 \frac{(b_{i+1} - x)^{j-s}}{(j-s)!} - \int_x^{b_{i+1}} F_s[x - \xi, q_i^2(\xi), f_i^2(\xi)] \times \right. \\ \left. \times (b_{i+1} - x)^{-p_i^2(b_{i+1}-0)-1} \exp[w_{p_i^2, b_{i+1}}^{1,-}(\xi)] d\xi \right\}, \quad (s = \overline{0, (n-1)} = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (7)$$

$C_{ij}^1, C_{ij}^2, j = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2$ – бошанд, доимиҳои ихтиёрианд, ки гурӯҳҳои ба порчаи $\Gamma_i, i = 1, 2$ тааллуқдоштаи онҳо мувофиқан бо ёрии с. м. а. х. муайяни намуди

$$K_{b_i,s}^{1,+}[p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1]_{x=x_i^0} = \\ = K_{b_{i+1},s}^{1,-}[p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2]_{x=x_i^0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2. \quad (8)$$

яққимата алоқаманд мебошанд.

Системаҳои (8) имкон медиҳанд, ки формулаи (5) дар чор шакли баробарқувва навишта шавад.

Барои тасвири (5) баробариҳои характеристикӣ зерин (формулаҳои баргардонӣ) собит карда шудаанд:

$$[(x - b_1)^{p_1^1(b_1+0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_1+0} = C_{1s}^1, \quad [(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_2-0} = (-1)^s C_{1s}^2, \\ [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_2+0} = C_{2s}^1, \quad [(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_3-0} = (-1)^s C_{2s}^2, \\ s = \overline{0, (n-1)}.$$

Нишон дода шудааст, ки рафтори ҳалҳои муодилаи (1) дар атрофи нуқтаҳои сингулярӣ бо аломатҳои қиматҳои ҳудудии функсияи $p(x)$ дар ин нуқтаҳо чунин тавсиф карда мешавад: ҳангоми $x \rightarrow b_i + 0$, агар $p(b_i + 0) > 0$, бошад, пас ҳамаи ҳалҳо ба беохирӣ бо рафтори $y(x) = O[(x - b_i)^{p_i^1(b_i+0)}]$ майл

мекунанд, агар $p(b_i + 0) < 0$ бошад, пас онҳо ба сифр бо рафтори $y(x) = o[(x - b_i)^{p_i^1(b_i+0)}]$ майл мекунанд; ҳангоми $x \rightarrow b_{i+1} - 0$, агар $p(b_{i+1} - 0) < 0$ бошад, пас ҳамаи ҳалҳо ба беохирӣ бо рафтори $y(x) = O[(b_{i+1} - x)^{p_i^2(b_{i+1}-0)}]$, майл мекунанд, агар $p(b_{i+1} - 0) > 0$ бошад, пас онҳо ба сифр бо рафтори $y(x) = o[(b_{i+1} - x)^{p_i^2(b_{i+1}-0)}]$ майл мекунанд. Умуман, рафтори ҳалҳои муодилаи (1) дар атрофи нуқтаҳои сингулярӣ бо ҳамчоягии аломатҳои ададҳои $p(b_i + 0)$ ва $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 1, 2$ тавсиф карда мешавад.

Дар банди 2.2-и боби 2 барои муодилаи (1) масъалаҳои канорӣ тадқиқ карда шудаанд. Баъзе аз онҳоро дида мебароем.

Масъалаи 1 (Коши – Рикйе). *Ҳалли муодилаи (1) тавре ёфта шавад, ки гурӯҳҳои зерини шартҳо иҷро шаванд:*

$$[(x - b_1)^{p_1^1(b_1+0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_1+0} = a_{1s}^1, \quad [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_2+0} = a_{2s}^1, \\ s = \overline{0, (n-1)}, \text{ ки дар ин ҷо } a_{is}^1, i = 1, 2 - \text{ададҳои ҳақиқии додашуда мебошанд.}$$

Дар ҳолати умумӣ барои масъалаи 1 тасдиқоти зерин дуруст аст:

Теоремаи 2. *Бигзор, барои муодилаи (1) шартҳои теоремаи 1 иҷро гардад. Пас масъалаи 1 ҳалли ягона дорад, ки аз формулаи (5) бо иваз кардани доимиҳои ихтиёрӣ бо қимати онҳо, мувофиқан, аз формулаҳои*

$$C_{1s}^1 = a_{1s}^1, \quad C_{2s}^1 = a_{2s}^1, \quad s = \overline{0, (n-1)} \quad (9)$$

ва системаҳои

$$K_{b_{i+1},s}^{1,-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2]_{x=x_i^0} = \\ = K_{b_{i+1},s}^{1,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), a_{is}^1, \dots, a_{i(n-1)}^1]_{x=x_i^0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2$$

ёфта мешаванд.

Дар ҳолати хусусии $n = 2$ системаи (8) намуди зеринро мегирад:

$$\begin{cases} d_i(\mu_i + C_{i0}^1 + k_i C_{i1}^1) = e_i(\lambda_i + C_{i0}^2 + r_i C_{i1}^2), \\ d_i(v_i + C_{i1}^1) = e_i(\eta_i - C_{i1}^2) \end{cases}, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

ки дар он $d_i \equiv d_i(x_i^0)$, $e_i \equiv e_i(x_i^0)$, $k_i \equiv k_i(x_i^0)$, $r_i \equiv r_i(x_i^0)$, $d_i, e_i, k_i, r_i > 0$, $\mu_i \equiv \mu_i(x_i^0)$, $\lambda_i \equiv \lambda_i(x_i^0)$, $v_i \equiv v_i(x_i^0)$, $\eta_i \equiv \eta_i(x_i^0)$ – ададҳои ҳақиқии маълуманд. Пас аз рӯи қимати маълуми C_{1s}^1 ва C_{2s}^1 , $s = 0, 1$ аз баробарихи (9), бо ёрии системаҳои (10) номаълумҳои C_{1s}^2 ва C_{2s}^2 , $s = 0, 1$ якқимата чунин ёфта мешаванд:

$$C_{i0}^2 = \frac{d_i}{e_i} a_{i0}^1 + \frac{d_i}{e_i} (k_i + r_i) a_{i1}^1 + A_i, \quad C_{i1}^2 = -\frac{d_i}{e_i} a_{i1}^1 + \bar{A}_i, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

ки дар он

$$A_i = \frac{d_i}{e_i} (\mu_i + r_i v_i) - r_i \eta_i - \lambda_i, \quad \bar{A}_i = \eta_i - \frac{d_i}{e_i} v_i$$

аст ва чуни тасдиқоти дақиқ ба даст меояд.

Теоремаи 3. Бигзор, дар муодилаи (1) $n = 2$ буда ва шартҳои теоремаи 1 иҷро гарданд. Он гоҳ масъалаи 1 ҳалли ягона дорад, ки бо формулаи

$$y(x) = Q_{(1),(b)}^{(2)}[p(x), q(x), f(x), C_{10}^1, C_{11}^1; C_{10}^2, C_{11}^2; C_{20}^1, C_{21}^1; C_{20}^2, C_{21}^2]$$

ифода мегардад, ки дар он доимиҳои ихтиёрии $C_{ij}^1, C_{ij}^2, j = 0, 1, i = 1, 2$ бо ёрии формулаҳои (9) ва (11) муайян карда мешаванд.

Масъалаи 2 (намуди хатгӣ-ҳамроҳшавӣ). Ҳалли муодилаи (1) тавре ёфта шавад, ки системаи шартҳои зерин иҷро гардад:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} [(x - b_1)^{p_1^1(b_1+0)} A_{(1),(b)}^j y]_{x=b_1+0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} [(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{(1),(b)}^j y]_{x=b_2-0} + \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{(1),(b)}^j y]_{x=b_2+0} + \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} [(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{(1),(b)}^j y]_{x=b_3-0} = \varepsilon_k, \end{aligned} \quad (12)$$

ки дар он $k = \overline{1, 2n}$, b_{kj} ва $\varepsilon_k, j = \overline{0, (4n-1)}$ ададҳои ҳақиқии додашудаанд.

Аз шартҳои (12) ба с. м. а. х. – и намуди зерин гузашта мешавад:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} C_{1j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} (-1)^j C_{1j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} C_{2j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} (-1)^j C_{2j}^2 = \varepsilon_k, \\ & k = \overline{1, 2n}, \end{aligned} \quad (13)$$

ки ба он системаҳои (8) ба таври автоматӣ пайваست мешаванд. Бо истифода аз ин, системаи (13) - ро бо чор роҳ метавон ба системаи $2n$ муодилаҳо бо $2n$ номаълумҳо чуни табдил дод: гурӯҳҳои номаълумҳои $C_{1j}^2, C_{2j}^2; C_{1j}^2, C_{2j}^1; C_{1j}^1, C_{2j}^2; C_{1j}^1, C_{2j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$ – ро мувофиқан тавассути гурӯҳҳои $C_{1j}^1, C_{2j}^1; C_{1j}^1, C_{2j}^2; C_{1j}^2, C_{2j}^1; C_{1j}^2, C_{2j}^2, j = \overline{0, (n-1)}$ аз системаҳои (8) ифода мекунем, он гоҳ ба ҷои (13) системаҳоро нисбат ба гурӯҳҳои охири номаълумҳо ба даст меорем, ки онҳоро мувофиқан, ҳамчун (13а), (13б), (13в) ва (13г) ишора мекунем. Ҳар яке аз онҳо дар якҷоягӣ бо системаи (8) ба системаи (13), (8) баробарқувва аст, аз ин рӯ, ба ҳамдигар низ баробарқувва мебошанд.

Пас, дар бораи ҳалшавандагии масъалаи 2 хулосаи зерин дуруст аст:

Теоремаи 4. Бигзор, нисбат ба муодилаи (1) шартҳои теоремаи 1 иҷро гарданд ва дар системаи (13а), (13б), (13в) ё (13г) ранги матритсаҳои асосӣ ва васеъкардашуда мувофиқан ба r ва ρ баробар бошад.

1) Агар $r = \rho = 2n$ бошад, он гоҳ масъалаи 2 ҳалли ягона дорад, ки он аз формулаи (5) бо иваз кардани доимиҳои ихтиёрӣ бо ҳалли яке аз системаҳои (13а), (13б), (13в) ва (13г), ки якҷоя бо системаи (8) гирифта мешавад, ҳосил мегардад;

2) Агар $r = \rho < 2n$ бошад, пас масъалаи 2 ҳалли бешумор дорад ва ҳалли умумии он тавассути ҳалли яке аз системаҳои (13а), (13б), (13в) ва (13г), ки якҷоя бо системаи (8) гирифта мешавад, бо формулаи (5) ифода мегардад, ки аз $2n - r$ доимиҳои ихтиёрӣ вобаста аст;

3) Агар $r < 2n$, $r \neq \rho$ бошад, пас ҳар яки системаҳои (13а), (13б), (13в) ва (13г) дар якҷоягӣ бо системаи (8) ноҳамҷоя аст ва масъалаи 2 ҳал надорад.

Дар ҳолати $n = 2$ системаи (8) намуди (10), системаҳои (13а), (13б), (13в) ва (13г) бошанд, мувофиқан намуди зеринро мегиранд:

$$m_{k0}^1 C_{10}^1 + m_{k1}^1 C_{11}^1 + n_{k0}^1 C_{20}^1 + n_{k1}^1 C_{21}^1 = l_k^1, \quad (14)$$

$$m_{k0}^1 C_{10}^1 + m_{k1}^1 C_{11}^1 + n_{k0}^2 C_{20}^2 + n_{k1}^2 C_{21}^2 = l_k^2, \quad (15)$$

$$m_{k0}^2 C_{10}^2 + m_{k1}^2 C_{11}^2 + n_{k0}^1 C_{20}^1 + n_{k1}^1 C_{21}^1 = l_k^3, \quad (16)$$

$$m_{k0}^2 C_{10}^2 + m_{k1}^2 C_{11}^2 + n_{k0}^2 C_{20}^2 + n_{k1}^2 C_{21}^2 = l_k^4, \quad k = \overline{1,4}. \quad (17)$$

Агар муайянкунандаҳои онҳоро мувофиқан ҳамчун Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{21} , Δ_{22} ишорат кунем, пас натиҷаи дақиқтари зерин ҳосил мешавад:

Теоремаи 5. Бигзор, дар муодилаи (1) $n = 2$ ва шартҳои теоремаи 1 иҷро гарданд.

1) Агар муайянкунандаи Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{21} ё Δ_{22} ғайрисифр бошад, пас ранги матритсаи асосии системаҳои (14), (15), (16) ва (17) - r ба ранги матритсаи васеъкардашудаи онҳо - ρ баробар, $r = \rho = 4$ аст ва масъалаи 2 ҳалли ягонаи бо формулаи

$$y(x) = Q_{(1),(b)}^{(2)}[p(x), q(x), f(x), C_{10}^1, C_{11}^1; C_{10}^2, C_{11}^2; C_{20}^1, C_{21}^1; C_{20}^2, C_{21}^2] \quad (18)$$

ифодашаванда дорад, ки дар он доимиҳои C_{ij}^1 , C_{ij}^2 , $j = 0,1$, $i = 1,2$ бо ҳалли яке аз системаҳои (14), (15), (16) ё (17) - и якҷоя бо (10) гирифташуда, масалан, системаи (14), (10), яъне бо ёрии формулаҳои

$$C_{i0}^1 = \frac{\Delta_{11}^{i0}}{\Delta_{11}}, C_{i1}^1 = \frac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}}, C_{i0}^2 = \frac{d_i \Delta_{11}^{i0}}{e_i \Delta_{11}} + (k_i + r_i) \frac{d_i \Delta_{11}^{i1}}{e_i \Delta_{11}} + A_i, C_{i1}^2 = -\frac{d_i \Delta_{11}^{i1}}{e_i \Delta_{11}} + \bar{A}_i, \quad i = 1,2,$$

муайян карда мешаванд.

2) Агар муайянкунандаи Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{21} ё Δ_{22} баробари сифр бошад, пас $r < 4$

аст. Дар ин ҳол, ҳангоми $r = \rho$ будан ҳар яке аз системаҳои (14), (15), (16), (17) ва аз ин рӯ, системаи (13), (10) ҳалли бешумор дорад, ҳалли умумии онҳо аз $4 - r$ доимиҳои ихтиёрий вобаста аст, пас масъалаи 2 низ ҳалли бешумори тавассути ҳалли системаи (13), (10) бо ёрии формулаи (18) ифодашаванда дорад, ки аз $4 - r$ доимиҳои ихтиёрий вобаста аст, ҳангоми $r \neq \rho$ будан системаҳои (14), (15), (16), (17) ноҳамчоянд, аз ин рӯ системаи (13), (10) низ ноҳамчоя аст ва масъалаи 2 ҳал надорад.

Натиҷаи асосии банди 2.3 аз тасдиқоти зерин иборат аст:

Теоремаи 6. Бигзор, нуқтаҳои сингулярнокиашон пасти муодилаи (1) дар намуди $a = b_1 < b_2 < b_3 = b$ ҷойгир, ҷудокунии маҷмӯи $\Gamma_{(b)}$ ҳамчун ҷудокунии дар теоремаи 1 гузаронида шуда буда, функсияҳои $p(x), q(x)$ ва $f(x)$ шарти A-ро қонеъ кунонанд.

Он гоҳ, ҳалли умумии муодилаи (1) ва дараҷаҳои оператори $A_{(\alpha),(b)}$ аз он дар маҷмӯи $\Gamma_{(b)}$ бо ёрии формулаи

$$\begin{aligned} A_{(\alpha),(b)}^s y &= \begin{cases} I_{b_i,s}^{\alpha_i,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1] & \text{ҳангоми } x \in \Gamma_i^1 \\ I_{b_{i+1},s}^{\alpha_{i+1},-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2] & \text{ҳангоми } x \in \Gamma_i^2 \end{cases} \equiv \\ & \quad i = 1, 2 \\ & \equiv \Omega_{(\alpha),(b),s}^{(n)} [p(x), q(x), f(x), C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1; C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2; C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1; \\ & \quad C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2], \quad s = \overline{0, (n-1)}, \end{aligned} \quad (19)$$

ифода мешавад, ки дар ин ҷо

$$\begin{aligned} & I_{b_i,s}^{\alpha_i,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1] \equiv \exp \left[-u_{p_i^1, b_i}^{\alpha_i,+}(x) \right] \times \\ & \times \left\{ \int_{b_i}^x F_s[x - \xi, q_i^1(\xi), f_i^1(\xi)] (\xi - b_i)^{-\alpha_i} \exp \left[u_{p_i^1, b_i}^{\alpha_i,+}(\xi) \right] d\xi + \sum_{j=s}^{n-1} C_{ij}^1 \frac{(x - b_i)^{j-s}}{(j-s)!} \right\}, \quad (20) \\ & I_{b_{i+1},s}^{\alpha_{i+1},-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2] \equiv \\ & \equiv \exp \left[u_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(x) \right] \left\{ (-1)^s \sum_{j=s}^{n-1} C_{ij}^2 \frac{(b_{i+1} - x)^{j-s}}{(j-s)!} - \int_x^{b_{i+1}} F_s[x - \xi, q_i^2(\xi), f_i^2(\xi)] \times \right. \\ & \quad \left. \times (b_{i+1} - x)^{-\alpha_{i+1}} \exp \left[-u_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(\xi) \right] d\xi \right\}, \end{aligned}$$

$C_{ij}^1, C_{ij}^2, j = \overline{0, (n-1)}$ — бошанд, доимиҳои ихтиёрии с. м. а. х. - и муайяни секунҷагии намуди зеринро қаноат гардонандаанд:

$$I_{b_i,s}^{\alpha_i,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1]_{x=\bar{x}_i^0} =$$

$$= I_{b_{i+1},s}^{\alpha_{i+1},-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2]_{x=\bar{x}_i^0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad i = 1, 2,$$

ки дар он $\bar{x}_i^0$ - нуқтаи қайдкардашудаи фосилаи Γ_i ҳаст.

Барои тасвири (19) баробариҳои характериистикии зерин (формулаи баргардонӣ) исбот карда шудаанд:

$$\begin{aligned} [A_{(\alpha),(b)}^s y]_{x=b_1+0} &= C_{1s}^1; & [A_{(\alpha),(b)}^s y]_{x=b_2-0} &= (-1)^s C_{1s}^2; \\ [A_{(\alpha),(b)}^s y]_{x=b_2+0} &= C_{2s}^1; & [A_{(\alpha),(b)}^s y]_{x=b_3-0} &= (-1)^s C_{2s}^2; \quad s = \overline{0, (n-1)}. \end{aligned}$$

Нишон дода шудааст, ки ҳама ҳалли муодилаи (1) ва дараҷаи оператори $A_{(\alpha),(b)}$ аз онҳо дар атрофи нуқтаҳои сингулярнокиашон паст, маҳдуд мебошанд.

Дар банди 2.4 - и боби 2 барои муодилаи (1) масъалаҳои канорӣ тадқиқ карда шудаанд. Баъзе аз онҳоро меорем.

Масъалаи 3 (Коши-Риккё). Ёфтани чунин ҳалли муодилаи (1) талаб карда мешавад, ки ба ҷуфти зерини шартҳо итоат мекунад:

$$[A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_1+0} = \bar{a}_{1j}^1, \quad [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_2+0} = \bar{a}_{2j}^1, \quad j = \overline{0, (n-1)}.$$

Масъалаи 4 (намуди хаттӣ-ҳамрохшавӣ) Ёфтани чунин ҳалли муодилаи (1) талаб карда мешавад, ки ба системаи зерини шартҳо итоат мекунад:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_1+0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_2-0} + \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_2+0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_3-0} = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, 2n}, \end{aligned}$$

ки дар ин ҷо b_{kj} ва $\varepsilon_k, j = \overline{0, (4n-1)}$ - ададҳои ҳақиқии додашуда ҳастанд.

Барои масъалаҳои 3 ва 4 теоремаҳои исбот карда шудаанд, ки мувофиқан ба теоремаҳои 2, 3 ва 4, 5 монанд мебошанд (теоремаҳои 2.7, 2.8, 2.9 ва 2.10).

Дар банди 2.5 доир ба бандҳои 2.1 ва 2.2 мисоли мушаххас дида баромада шудааст.

Дар боби 3 муодилаи намуди (1) бо нуқтаҳои дохилии сингулярнокии баланд омӯхта шудааст. Дар банди 3.1 теоремаи асосии зерин исбот карда шудааст:

Теоремаи 7. Бигзор, нуқтаҳои сингулярнокиашон баланди муодилаи (1) дар намуди $a < b_1 < b_2 < b_3 < b$ ҷойгир, баъдан

$$\Gamma_{(b)} = \bigcup_{i=0}^3 \Gamma_i, \quad \Gamma_0 = (a, b_1), \quad \Gamma_i = (b_i, b_{i+1}), \quad i = 1, 2, \quad \Gamma_3 = (b_3, b)$$

ва x_i^0 нуқтаи қайдишудаи фосилаи Γ_i - ро ифода намояд, ки ин интервалро ба фосилаҳои $\Gamma_i^1 = (b_i, x_i^0]$, $\Gamma_i^2 = [x_i^0, b_{i+1}]$ ҷудо менамояд.

1) функцияҳои $p(x), q(x)$ ва $f(x)$ ба шартҳои A итоат кунанд;

2) функцияҳои $p_i^1(x), i = 1, 2, 3$ мувофиқан шартҳои зеринро қаноат кунанд:

$$|p_i^1(x) - p_i^1(b_i + 0)| \leq L_i^1(x - b_i)^{l_i^1}, \quad L_i^1 > 0, \quad l_i^1 > \alpha_i - 1 \text{ ҳангоми } x \rightarrow b_i + 0;$$

3) функцияҳои $p_i^2(x), i = 0, 1, 2$ мувофиқан шартҳои зеринро қаноат кунанд:

$$|p_i^2(b_{i+1} - 0) - p_i^2(x)| \leq L_i^2(b_{i+1} - x)^{l_i^2}, \quad L_i^2 > 0, \quad l_i^2 > \alpha_{i+1} - 1 \text{ ҳангоми } x \rightarrow b_{i+1} - 0;$$

4) нобаробариҳои $p(b_i + 0) > 0, p(b_i - 0) < 0, i = 1, 2, 3$ иҷро гарданд;

5) комбинатсияи дилҳоҳи дигари аломатҳои ададҳои $p(b_i + 0), i = 1, 2, 3, p(b_{i+1} - 0), i = 0, 1, 2$ ҷой дошта метавонад. Дар ин ҳол талаб карда мешавад, ки функцияҳои $q(x)$ ва $f(x)$, дар ҳолати $p(b_i + 0) < 0$ ҳангоми $x \rightarrow b_i + 0$ ба сифр табдил ёфта ва мувофиқан ба шартҳои

$$\exp[-p_i^1(b_i + 0)\omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(x)] q(x) = o[(x - b_i)^{\beta_i^1}],$$

$$\exp[-p_i^1(b_i + 0)\omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(x)] f(x) = o[(x - b_i)^{\gamma_i^1}], \quad \beta_i^1, \gamma_i^1 > \alpha_i - 1$$

тобеъ бошанд, дар ҳолати $p(b_{i+1} - 0) > 0$ ҳангоми $x \rightarrow b_{i+1} - 0$ ба сифр табдил ёфта, мувофиқан ба шартҳои

$$\exp[p_i^2(b_{i+1} - 0)\omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x)] q(x) = o[(b_{i+1} - x)^{\beta_i^2}],$$

$$\exp[p_i^2(b_{i+1} - 0)\omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x)] f(x) = o[(b_{i+1} - x)^{\gamma_i^2}], \quad \beta_i^2, \gamma_i^2 > \alpha_{i+1} - 1$$

тобеъ бошанд.

Он гоҳ, ҳалли умумии муодилаи (1) ва дараҷаҳои оператори $A_{(\alpha), (b)}$ аз он дар маҷмӯи Γ_b бо ёрии формулаи зерин ифода меёбад:

$$A_{(\alpha), (b)}^s y = \begin{cases} K_{b_1, s}^{\alpha_1, -} [p_0^2(x), q_0^2(x), f_0^2(x), C_{0s}^2, C_{0(s+1)}^2, \dots, C_{0(n-1)}^2] & \text{ҳангоми } x \in \Gamma_0 \\ K_{b_i, s}^{\alpha_i, +} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1] & \text{ҳангоми } x \in \Gamma_i^1 \\ K_{b_{i+1}, s}^{\alpha_{i+1}, -} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2] & \text{ҳангоми } x \in \Gamma_i^2 \equiv \\ & i = 1, 2 \\ K_{b_3, s}^{\alpha_3, +} [p_3^1(x), q_3^1(x), f_3^1(x), C_{3s}^1, C_{3(s+1)}^1, \dots, C_{3(n-1)}^1] & \text{ҳангоми } x \in \Gamma_3 \end{cases} \equiv U_{(\alpha), (b), s}^{(n)} [p(x), q(x), f(x), C_{0s}^2, \dots, C_{0(n-1)}^2; C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1; C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2; C_{3s}^1, \dots, C_{3(n-1)}^1; C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2; C_{3s}^1, \dots, C_{3(n-1)}^1], \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (U_{(\alpha), (b), 0}^{(n)} \equiv U_{(\alpha), (b)}^{(n)}), \quad (21)$$

ки дар он

$$K_{b_i, s}^{\alpha_i, +} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1] \equiv$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \exp \left[p_i^1(b_i + 0) \omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(x) - w_{p_i^1, b_i}^{\alpha_i, +}(x) \right] \left\{ \int_{b_i}^x F_s[x - \xi, q_i^1(\xi), f_i^1(\xi)] (\xi - b_i)^{-\alpha_i} \times \right. \\
&\quad \times \exp \left[w_{p_i^1, b_i}^{\alpha_i, +}(\xi) - p_i^1(b_i + 0) \omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(\xi) \right] d\xi + \sum_{j=s}^{n-1} C_{ij}^1 \frac{(x - b_i)^{j-s}}{(j-s)!} \Bigg\}, i = 1, 2, 3, \\
&\quad K_{b_{i+1}, s}^{\alpha_{i+1}, -} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2] \equiv \\
&\equiv \exp \left[-p_i^2(b_{i+1} - 0) \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) - w_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) \right] \left\{ (-1)^s \sum_{j=s}^{n-1} C_{ij}^2 \frac{(b_{i+1} - x)^{j-s}}{(j-s)!} - \right. \\
&\quad \left. - \int_x^{b_{i+1}} F_s[x - \xi, q_i^2(\xi), f_i^2(\xi)] (b_{i+1} - \xi)^{-\alpha_{i+1}} \times \right. \\
&\quad \left. \times \exp \left[p_i^2(b_{i+1} - 0) \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(\xi) + w_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(\xi) \right] d\xi \right\}, i = 0, 1, 2, s = \overline{0, (n-1)},
\end{aligned}$$

C_{ij}^1 , $i = 1, 2, 3$, C_{ij}^2 , $i = 0, 1, 2$, $j = \overline{0, (n-1)}$ - бошанд, доимиҳои ихтиёрӣ ҳастанд, ки гуруҳҳои ба фосилаи Γ_i , $i = 1, 2$ мансуби онҳо, мувофиқан бо с. м. а. х. - и секунҷагии зерин ба таври яққимата алоқаманд мебошанд:

$$\begin{aligned}
&K_{b_i, s}^{\alpha_i, +} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1]_{x=x_i^0} = \\
&= K_{b_{i+1}, s}^{\alpha_{i+1}, -} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2]_{x=x_i^0}, s = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2. \quad (22)
\end{aligned}$$

Барои тасвири (21) баробарии характеристикӣ зерин (формулаи баргардонӣ) муқаррар карда шудаанд:

$$\begin{aligned}
&\{\exp[p_0^2(b_1 - 0) \omega_{b_1}^{\alpha_1, -}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y\}_{x=b_1-0} = (-1)^s C_{0s}^2, \\
&\{\exp[-p_1^1(b_1 + 0) \omega_{b_1}^{\alpha_1, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y\}_{x=b_1+0} = C_{1s}^1, \\
&\{\exp[p_1^2(b_2 - 0) \omega_{b_2}^{\alpha_2, -}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y\}_{x=b_2-0} = (-1)^s C_{1s}^2, \\
&\{\exp[-p_2^1(b_2 + 0) \omega_{b_2}^{\alpha_2, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y\}_{x=b_2+0} = C_{2s}^1, \\
&\{\exp[p_2^2(b_3 - 0) \omega_{b_3}^{\alpha_3, -}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y\}_{x=b_3-0} = (-1)^s C_{2s}^2, \\
&\{\exp[-p_3^1(b_3 + 0) \omega_{b_3}^{\alpha_3, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y\}_{x=b_3+0} = C_{3s}^1, \quad s = \overline{0, (n-1)},
\end{aligned}$$

Нишон дода шудааст, ки рафтори ҳалҳои ин муодила дар атрофи нуқтаҳои дорои сингулярнокии баланд аз аломати ададҳои $p(b_i + 0)$, $i = 1, 2, 3$, $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 0, 1, 2$ вобаста аст ва он дақиқ чунин тавсиф карда мешавад: дар ҳолати

$x \rightarrow b_i + 0$, $i = 1, 2, 3$, агар $p(b_i + 0) > 0$ бошад, пас ҳамаи ҳалҳои муодила ба беохирӣ майл мекунамд ва баробарии асимптоти $y(x) = O\left\{\exp\left[p_i^1(b_i + 0)\omega_{b_i}^{\alpha_{i,+}}(x)\right]\right\}$ - ро қонун мекунамд, агар $p(b_i + 0) < 0$ бошад, пас ҳамаи ҳалҳо ба сифр бо рафтори $y(x) = o\left\{\exp\left[p_i^1(b_i + 0)\omega_{b_i}^{\alpha_{i,+}}(x)\right]\right\}$ майл мекунамд; дар ҳолати $x \rightarrow b_{i+1} - 0$, $i = 0, 1, 2$, агар $p(b_{i+1} - 0) < 0$ бошад, пас ҳамаи ҳалҳои муодила ба беохирӣ бо рафтори асимптоти $y(x) = O\left\{\exp\left[-p_i^2(b_{i+1} - 0)\omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1,-}}(x)\right]\right\}$ майл мекунамд, агар $p(b_{i+1} - 0) > 0$ бошад, он гоҳ ҳамаи онҳо ба сифр бо рафтори $y(x) = o\left\{\exp\left[-p_i^2(b_{i+1} - 0)\omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1,-}}(x)\right]\right\}$ равона мешаванд. Аз ин рӯ, умуман рафтори ҳалҳои муодилаи (1) дар атрофи нуқтаҳои сингулярнокиашон баланд бо комбинатсияи аломатҳои шаш ададҳои $p(b_i + 0)$, $i = 1, 2, 3$, $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 0, 1, 2$ тавсиф карда мешавад.

Дар банди 3.2 барои муодилаи (1) масъалаҳои канорӣ тадқиқ карда шудаанд. Баъзе аз онҳоро дида мебароем.

Масъалаи 5 (Коши-Рикйе). Ҳалли муодилаи (1) ёфта шавад, ки чор гуруҳи шартҳои намуди

$$\begin{aligned} \left\{\exp\left[p_0^2(b_1 - 0)\omega_{b_1}^{\alpha_{1,-}}(x)\right]A_{(\alpha),(b)}^s y\right\}_{x=b_1-0} &= a_{0s}^2, \\ \left\{\exp\left[-p_3^1(b_3 + 0)\omega_{b_3}^{\alpha_{3,+}}(x)\right]A_{(\alpha),(b)}^s y\right\}_{x=b_3+0} &= d_{3s}^1; \\ \left\{\exp\left[-p_1^1(b_1 + 0)\omega_{b_1}^{\alpha_{1,+}}(x)\right]A_{(\alpha),(b)}^s y\right\}_{x=b_1+0} &= a_{1s}^1, \\ \left\{\exp\left[-p_2^1(b_2 + 0)\omega_{b_2}^{\alpha_{2,+}}(x)\right]A_{(\alpha),(b)}^s y\right\}_{x=b_2+0} &= a_{2s}^1 \end{aligned}$$

- ро қаноат кунанд, ки дар ин ҷо $s = \overline{0, (n-1)}$, ва a_{0s}^2 , a_{is}^1 , $i = 1, 2$, d_{3s}^1 ададҳои ҳақиқии додашуда ҳастанд.

Тасдиқоти зерин дуруст аст:

Теоремаи 8. Бигзор, барои муодилаи (1) шартҳои теоремаи 7 иҷро гарданд. Он гоҳ, масъалаи 5 ҳалли ягона дорад, ки он аз формулаи (21) бо иваз кардани доимӣҳои ихтиёрӣ бо қиматашон, мувофиқи формулаҳои

$$C_{0s}^2 = a_{0s}^2, C_{3s}^1 = d_{3s}^1, C_{1s}^1 = a_{1s}^1, C_{2s}^1 = a_{2s}^1, \quad s = \overline{0, (n-1)}$$

ва системаҳои

$$\begin{aligned} &K_{b_{i+1},s}^{\alpha_{i+1,-}}\left[p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2\right]_{x=x_i^0} = \\ &= K_{b_{is}}^{\alpha_{i,+}}\left[p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), a_{is}^1, \dots, a_{i(n-1)}^1\right]_{x=x_i^0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

ҳосил карда мешавад.

Масъалаи 6 (намуди хатгӣ-ҳамроҳшавӣ). Ҳалли муодилаи (1) тавре ёфта шавад, ки системаи шартҳои зерин иҷро гардад:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} \{ \exp[p_0^2(b_1 - 0) \omega_{b_1}^{\alpha_1, -}(x)] A_{(\alpha), (b)}^j y \}_{x=b_1-0} + \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} \{ \exp[-p_1^1(b_1 + 0) \omega_{b_1}^{\alpha_1, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^j y \}_{x=b_1+0} + \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} \{ \exp[p_1^2(b_2 - 0) \omega_{b_2}^{\alpha_2, -}(x)] A_{(\alpha), (b)}^j y \}_{x=b_2-0} + \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} \{ \exp[-p_2^1(b_2 + 0) \omega_{b_2}^{\alpha_2, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^j y \}_{x=b_2+0} + \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(4n+j)} \{ \exp[p_2^2(b_3 - 0) \omega_{b_3}^{\alpha_3, -}(x)] A_{(\alpha), (b)}^j y \}_{x=b_3-0} + \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(5n+j)} \{ \exp[-p_3^1(b_3 + 0) \omega_{b_3}^{\alpha_3, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^j y \}_{x=b_3+0} = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, 4n},
\end{aligned}$$

ки дар ин ҷо b_{kj} и ε_k , $j = \overline{0, (6n - 1)}$ — ададҳои ҳақиқии додашуда ҳастанд.

Ин масъала бо роҳи овардан ба с. м. а. х. — и дорой $4n$ муодилаҳо ва $6n$ номаълумҳои намуди:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} (-1)^j C_{0j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} C_{1j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} (-1)^j C_{1j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} C_{2j}^1 + \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(4n+j)} (-1)^j C_{2j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(5n+j)} C_{3j}^1 = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, 4n},
\end{aligned} \tag{23}$$

тадқиқ карда мешавад, ки ба он системаҳои (22) илова карда мешаванд. Ба системаи (23) табдилдиҳӣ татбиқ карда мешаванд, ки дар системаи (13) истифода шудаанд. Пас, ба ҷои он системаҳои $4n$ муодилаҳо бо $4n$ номаълумҳоро, мувофиқан нисбати яке аз гурӯҳҳои номаълумҳои $C_{1j}^1, C_{2j}^1; C_{1j}^2, C_{2j}^2; C_{1j}^3, C_{2j}^3; C_{1j}^4, C_{2j}^4$, инчунин номаълумҳои C_{0j}^2, C_{3j}^1 , $j = \overline{0, (n - 1)}$ ҳосил мекунем, ки онҳоро ҳамчун (23а), (23б), (23в) ва (23г) ишорат мекунем. Ҳар яке аз ин системаҳо дар пайвастагӣ бо системаи (22) ба системаи (23), (22) баробарқувва аст, аз ин рӯ, онҳо бо ҳамдигар низ баробарқувваанд.

Тасдиқоти зерин дуруст аст:

Теоремаи 9. Бигзор, нисбат ба муодилаи (1) шартҳои теоремаи 7 иҷро гарданд, дар системаи (23а), (23б), (23в) ё (23г) бошад, матритсаҳои асосӣ ва васеъкардашуда ранги мувофиқан ба r ва p баробар дошта бошанд.

1) Агар $r = \rho = 4n$ бошад, пас масъалаи 6 ҳалли ягона дорад, ки аз формулаи (21) бо ивази доимиҳои ихтиёрӣ дар он бо ҳалли яке аз системаҳои (23а), (23б), (23в) ва (23г) – и дар якҷоягӣ бо системаи (22) баррасишаванда ҳосил карда мешавад;

2) Агар $r = \rho < 4n$ бошад, пас масъалаи 6 ҳалли бешумор дорад ва ҳалли умумии он тавассути ҳалли яке аз системаҳои (23а), (23б), (23в), (23г) - и дар якҷоя бо системаи (22) муоинашаванда, бо формулаи (21) ифода карда мешавад, ки аз $4n - r$ доимиҳои ихтиёрӣ вобаста аст;

3) Агар $r < 4n$, $r \neq \rho$ бошад, пас ҳар яке аз системаҳои (23а), (23б), (23в), (23г) дар якҷоягӣ бо системаи (22) ноҳамчоя аст ва масъалаи 6 ҳал надорад.

Дар ҳолати хусусии $n = 2$ барои масъалаҳои 5 ва 6 теоремаҳои дақиқтар ба даст оварда шудаанд, ки мувофиқан ба теоремаҳои 3 ва 5 (теоремаҳои 3.3 ва 3.5) монанд мебошанд.

Натиҷаи асосии банди 4.1 - и боби 4 аз тасдиқоти зерин иборат аст:

Теоремаи 10. Бигзор, дар муодилаи (1) нуқтаи сингулярнокии пасти b_1 ва нуқтаҳои сингулярии b_2, b_3 дар намуди $a = b_1 < b_2 < b_3 < b$ ҷойгир, баъдан

$$\Gamma_{(b)} = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i, \quad \Gamma_i = (b_i, b_{i+1}), \quad \Gamma_i = \Gamma_i^1 \cup \Gamma_i^2, \quad \Gamma_i^1 = (b_i, x_i^0], \Gamma_i^2 = [x_i^0, b_{i+1}), \quad i = 1, 2,$$

$\Gamma_3 = (b_3, b)$ ва x_i^0 нуқтаи қайдишудаи интервали Γ_i бошад. Бигзор, шартҳои зерин иҷро шаванд:

1) функсияҳои $p(x), q(x)$ ва $f(x)$ ба шарти A тобеъ бошанд;

2) функсияҳои $p_i^1(x), i = 2, 3, p_i^2(x), i = 1, 2$ дар нуқтаҳои сингулярӣ мувофиқан шарти Гёлдер (2) – ро қонеъ кунонанд;

3) комбинатсияи зерини аломатҳои ададҳои $p(b_i \pm 0)$: $p(b_i + 0) > 0, p(b_i - 0) < 0, i = 2, 3$ ҷой дошта бошад;

4) комбинатсияи дилхоҳи дигари аломатҳои ададҳои $p(b_i \pm 0), i = 2, 3$ ҷой доштаниаш мумкин аст. Дар ин ҳол, агар барои як ё ҳарду қиматҳои $i = 2, 3$ ба ҷои шарти $p(b_i + 0) > 0$ ($p(b_i - 0) < 0$) шарти $p(b_i + 0) < 0$ ($p(b_i - 0) > 0$) иҷро гардад, пас талаб карда мешавад, ки функсияҳои $q(x)$ ва $f(x)$ дар аснои $x \rightarrow b_i + 0$ ($x \rightarrow b_{i+1} - 0, i = 1, 2$) ба сифр майл кунанд ва мувофиқан шартҳои (3) ((4)) - ро қонеъ кунонанд.

Он гоҳ, ҳалли умумии муодилаи (1) ва дараҷаҳои оператори $A_{\{\alpha_{1,1,1}\},(b)}$ дар маҷмӯи $\Gamma_{(b)}$ бо ёрии формулаи

$$\begin{aligned}
A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y = & \begin{cases} I_{b_1, s}^{\alpha_1, +} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, C_{1(s+1)}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1] & \text{ҳангоми } x \in \Gamma_1^1 \\ K_{b_2, s}^{1, -} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, C_{1(s+1)}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2] & \text{ҳангоми } x \in \Gamma_1^2 \\ K_{b_2, s}^{1, +} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, C_{2(s+1)}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1] & \text{ҳангоми } x \in \Gamma_2^1 \equiv \\ K_{b_3, s}^{1, -} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, C_{2(s+1)}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2] & \text{ҳангоми } x \in \Gamma_2^2 \\ K_{b_3, s}^{1, +} [p_3^1(x), q_3^1(x), f_3^1(x), C_{3s}^1, C_{3(s+1)}^1, \dots, C_{3(n-1)}^1] & \text{ҳангоми } x \in \Gamma_3 \end{cases} \\
\equiv V_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b), s}^{(n)} [p(x), q(x), f(x), C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1; C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2; C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1; C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2; \\
C_{3s}^1, C_{3(s+1)}^1, \dots, C_{3(n-1)}^1], \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (V_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b), 0}^{(n)} [\dots] \equiv V_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^{(n)} [\dots]) \quad (24)
\end{aligned}$$

ифода карда мешавад, ки дар он сатри аввал бо формулаи (20), сатрҳои боқимонда мувофиқан бо формулаҳои (6) ва (7) муайян карда мешаванд, C_{ij}^1 , C_{ij}^2 , $i = 1, 2$ ва C_{3j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$ – бошанд, доимииҳои ихтиёрианд, ки гурӯҳҳои ба фосилаи Γ_i , $i = 1, 2$ нисбат доштаи онҳо, мувофиқан бо с. м. а. х. – и зерин якҷамъа пайваст мебошанд:

$$\begin{aligned}
& I_{b_1, s}^{\alpha_1, +} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, C_{1(s+1)}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0-0} = \\
& = K_{b_2, s}^{1, -} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, C_{1(s+1)}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0+0}, \\
& K_{b_2, s}^{1, +} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, C_{2(s+1)}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0-0} = \\
& = K_{b_3, s}^{1, -} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, C_{2(s+1)}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0+0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (25)
\end{aligned}$$

Барои тасвири (24) баробарииҳои хараактеристикии зерин (формулаҳои баргардонӣ) муқаррар карда шудаанд:

$$\begin{aligned}
& [A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_1+0} = C_{1s}^1, \\
& [(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_2-0} = (-1)^s C_{1s}^2, \\
& [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_2+0} = C_{2s}^1, \\
& [(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_3-0} = (-1)^s C_{2s}^2, \\
& [(x - b_3)^{p_3^1(b_3+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_3+0} = C_{3s}^1, \quad s = \overline{0, (n-1)}.
\end{aligned}$$

Исбот карда шудааст, ки ҳамаи ҳалҳои муодилаи (1) ва дараҷаҳои оператори $A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}$ аз онҳо дар атрофи нуқтаи сингулярнокии паст маҳдуд мебошанд ва рафтори онҳо дар атрофи нуқтаҳои сингулярӣ ба монанди ҳолати муодилаи дар банди 2.1 баррасишуда бо аломатҳои ададҳои $p(b_i \pm 0)$, $i = 2, 3$ муайян карда мешавад.

Дар банди 4.2-и боби 4 барои муодилаи (1) як қатор масъалаҳои канорӣ тадқиқ карда шудаанд. Баъзе аз онҳоро дида мебароем.

Масъалаи 7. Ёфтани ҳалли муодилаи (1) талаб карда мешавад, ки ба гурӯҳҳои зерини шартҳо тобеъ аст:

$$\begin{aligned} [A_{\{\alpha_1,1,1\},(b)}^s y]_{x=b_1+0} &= a_{1s}^1, & [(x-b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{\{\alpha_1,1,1\},(b)}^s y]_{x=b_2+0} &= a_{2s}^1, \\ [(x-b_3)^{p_3^1(b_3+0)} A_{\{\alpha_1,1,1\},(b)}^s y]_{x=b_3+0} &= d_{3s}^1, & s &= \overline{0, (n-1)}, \end{aligned}$$

ки дар он a_{is}^1 , $i = 1, 2$, d_{3s}^1 - ададҳои ҳақиқии додашуда ҳастанд.

Тасдиқоти зерин дуруст аст.

Теоремаи 11. Бигзор, барои муодилаи (1) шартҳои теоремаи 10 иҷро гарданд.

Он гоҳ, масъалаи 7 ҳалли ягона дорад, ки он аз формулаи (24) бо роҳи иваз кардани доимиҳои ихтиёрӣ бо қимати онҳо, мувофиқан аз баробариҳои

$$C_{1s}^1 = a_{1s}^1, \quad C_{2s}^1 = a_{2s}^1, \quad C_{3s}^1 = d_{3s}^1, \quad s = \overline{0, (n-1)}$$

ва системаҳои

$$\begin{aligned} &K_{b_2,s}^{1,-}[p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0} = \\ &= I_{b_1,s}^{\alpha_1,+}[p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), a_{1s}^1, \dots, a_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0}, \\ &K_{b_3,s}^{1,-}[p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0} = \\ &= K_{b_2,s}^{1,+}[p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), a_{2s}^1, a_{2(s+1)}^1, \dots, a_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0}, \quad s = \overline{0, (n-1)} \end{aligned}$$

ҳосил мешавад.

Масъалаи 8. Ҳалли муодилаи (1) тавре ёфта шавад, ки системаи зерини шартҳо иҷро гардад:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} [A_{\{\alpha_1,1,1\},(b)}^j y]_{x=b_1+0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} [(b_2-x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{\{\alpha_1,1,1\},(b)}^j y]_{x=b_2-0} + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} [(x-b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{\{\alpha_1,1,1\},(b)}^j y]_{x=b_2+0} + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} [(b_3-x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{\{\alpha_1,1,1\},(b)}^j y]_{x=b_3-0} + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(4n+j)} [(x-b_3)^{p_3^1(b_3+0)} A_{\{\alpha_1,1,1\},(b)}^j y]_{x=b_3+0} = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, 3n}, \end{aligned}$$

ки дар ин ҷо b_{kj} ва ε_k , $j = \overline{0, (5n-1)}$ - ададҳои ҳақиқии додашуда ҳастанд.

Тадқиқи масъалаи 8 бо роҳи гузариш ба с. м. а. х. – и зерин гузаронида мешавад:

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} C_{1j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} (-1)^j C_{1j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} C_{2j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} (-1)^j C_{2j}^2 + \\ + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(4n+j)} C_{3j}^1 = \varepsilon_k, k = \overline{1, 3n}, \quad (26)$$

ки ба он с. м. а. х. – и муайяни (25) ҳамроҳ мегарданд. Табдилдихҳои дар ҳолати системаи (13) истифодашударо татбиқ карда, ба ҷои системаи (26) с. м. а. х. – ҳо бо $3n$ муодилаҳо ва номаълумҳои зерин ҳосил карда мешаванд: гурӯҳе аз $C_{1j}^1, C_{2j}^1; C_{1j}^1, C_{2j}^2; C_{1j}^2, C_{2j}^1; C_{1j}^2, C_{2j}^2$ ва $C_{3j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$, ки онҳоро ҳамчун (26а), (26б), (26в) ва (26г) ишорат мекунем. Системаҳои охирин дар якҷоягӣ бо системаҳои (25) ба системаи (26), (25) ва байни худ баробарқувва мебошанд, ки тадқиқи онҳо ҳулосаи зеринро медиҳад:

Теоремаи 12. *Бигзор, барои муодилаи (1) ҳамаи шартҳои теоремаи 10 иҷро мегарданд ва дар системаи (26а), (26б), (26в) ё (26г) ранги матриксаҳои асосӣ ва васеъкардашуда мувофиқан ба r ва ρ баробаранд.*

1) *Агар $r = \rho = 3n$ бошад, он гоҳ масъалаи 8 ҳалли ягона дорад, ки он аз формулаи (24) бо ивази доимиҳои ихтиёрӣ дар он бо ҳалли яке аз системаҳои (26а), (26б), (26в) ва (26г), ки якҷоя бо системаи (25) дида баромада шудааст, ҳосил мешавад;*

2) *Агар $r = \rho < 3n$ бошад, он гоҳ масъалаи 8 ҳалли бешумор дорад ва ҳалли умумии он тавассути ҳалли яке аз системаҳои (26а), (26б), (26в), (26г)- и дар якҷоягӣ бо системаи (25) муоинашаванда бо формулаи (24) ифода меёбад, ки аз $3n - r$ доимиҳои ихтиёрӣ вобаста аст;*

3) *Агар $r < 3n, r \neq \rho$ бошад, пас он гоҳ ҳар яки системаҳои (26а), (26б), (26в), (26г) якҷоя бо системаи (25) ноҳамҷоя аст ва масъалаи 8 ҳал надорад.*

Дар ҳолати $n = 2$ барои масъалаҳои 7 ва 8 теоремаҳои дақиқтар ба даст оварда шудаанд, ки мувофиқан ба теоремаҳои 3 ва 5 монанд мебошанд (теоремаҳои 4.3 ва 4.5).

Дар банди 4.3 доир ба маводи боби 4 мисоли мушаххас дида баромада шудааст.

Боби 5-уми диссертатсия ба муҳокимаи натиҷаҳои бадастомада бахшида шудааст.

ХУЛОСАҲО

Натиҷаҳои асосии илмии диссертатсия аз инҳо иборат мебошанд:

- теоремаҳо дар бораи тасвири ҳалли умумӣ дар шакли интегралӣ барои муодилаҳои дифференсиалии намуди (1):
 - бо ду нуқтаҳои сарҳадӣ ва як нуқтаи дохилии сингулярӣ [2-А], [3-А];

- бо ду нуқтаи сарҳадӣ ва як нуқтаи дохилии сингулярнокиашон паст [1-A], [6-A], [8-A];
- бо се нуқтаҳои дохилии сингулярнокиашон баланд [4-A], [12-A], [13-A];
- бо як нуқтаи сарҳадии чапи сингулярнокиаш паст ва ду нуқтаи дохилии сингулярӣ [5-A], [14-A]

ба даст оварда шудаанд.

- тасдиқот дар бораи имкони баррасии тасвирҳои гирифташудаи ҳалли умумии муодилаҳои омӯхташудаи намуди (1) дар чор шакли баробарқувва ҳосил карда шудаанд [1-A] – [5-A],

- тасдиқот дар бораи баргардандагии тасвирҳои интегралӣ ҳалли умумӣ ва формулаҳои ошкорои баргардонӣ ба даст оварда шуданд [1-A] – [5-A].

- хулосаҳо дар бораи рафтори ҳалҳои муодилаҳои муоинашудаи намуди (1) дар атрофи нуқтаҳои махсус ба даст оварда шудааст [1-A] – [5-A].

- теоремаҳо дар бораи мавҷудият, ягонагӣ ва тасвири ошкорои ҳалли масъалаҳои Коши-Риккё барои муодилаҳои баррасишавандаи намуди махсуси (1) ба даст оварда шуданд [1-A], [3-A], [4-A], [9-A], [12-A].

- теоремаҳо дар бораи ҳалшавандагӣ, ягона ҳалшавандагӣ ва тасвири ошкорои ҳалли масъалаҳои намуди хаттӣ-ҳамроҳшавӣ барои муодилаҳои баррасишавандаи намуди махсуси (1) ба даст оварда шудаанд [1-A], [2-A], [5-A], [13-A], [16-A].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои дар рисола ба даст овардашуда хусусияти назариявӣ доранд. Онҳо барои коркарди минбаъдаи назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ, ҳам одӣ ва ҳам бо ҳосилаҳои хусусӣ бо коэффитсиентҳои махсус, инчунин дар ҳалли масъалаҳои амалӣ истифода шуда метавонанд.

Маводи диссертатсия зимни хондани курсҳои махсус барои магистрантон ва аспирантон истифода шуда метавонад.

Ман ба роҳбари илмиам дотсент Олими Абдуманон Ғафорода барои гузоштани вазифаҳо, кӯмаки бебаҳо ва дастгириашон дар вақти қор аз болои рисола ва академик Раҷабов Нусрат Раҷабович барои муҳокимаи натиҷаҳо ва маслиҳатҳояшон миннатдории амиқ изҳор мекунам.

РҶҲАТИ АДАБИЁТ

А) Рӯйхати манбаъҳои истифодашуда

[1]. Александров, А.Я. Пространственные задачи теории упругости [Текст] / А.Я. Александров, Ю.И. Соловьев. – М.: Наука, 1978. – 464 с.

[2]. Дадоджонова, М.Я. Интегральные представления решений и задачи типа Коши-Риккё для одного уравнения, полученного итерированием обыкновенного дифференциального оператора первого порядка со сверхсингулярной точкой [Текст] / М.Я. Дадоджонова, А.Г. Олимов,

Н.Р. Раджабов // Докл. АН Республики Таджикистан. – 2014. – Т. 57, № 9-10. – С. 713–719.

[3]. Дадоджанова, М.Я. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений специального типа со слабо сингулярной, сингулярной или сверхсингулярной точкой и их приложения [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Мукаддас Якубджановна Дадоджанова – Худжанд, 2018. – 113 с.

[4]. Кадиров, Г.М. Интегральные представления многообразия решений для одного класса линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с граничными сверхсингулярными точками [Текст] / Г.М. Кадиров, Н. Раджабов // Вестник Таджикского Национального Университета. наук Серия естественных – 2012. – 1-1. – С. 40–49.

[5]. Олимов, А.Г. Об одном обобщении линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка [Текст] / А.Г. Олимов // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. – 2010. – №2(17). – С. 17–19.

[6]. Олимов, А.Г. Интегральное представление решений и задача типа Рикье для одного обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с левой сверхсингулярной точкой [Текст] / А.Г. Олимов // Ученые записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. – 2011. – №3(18). – С. 3–7.

[7]. Олимов, А.Г. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида с сингулярной точкой [Текст] / А.Г. Олимов, М.Я. Дадоджанова // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. – 2016. – №3 (38). – С. 24–31.

[8]. Олимов, А.Г. Свойства решений и задачи типа Коши - Рикье для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / А.Г. Олимов, Ш.Э. Мирзоева // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. – 2019. – №1(48). – С. 11–18.

[9]. Олими, А.Г. Формула представления общего решения и задачи типа Коши - Рикье для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с граничной и внутренней слабо сингулярной точкой [Текст] / А.Г. Олими, М.Я. Дадоджанова, Н.К. Охунов, С.А. Толибов // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. – 2021. – №1(56). – С. 22–33.

[10]. Олими, А.Г. Представление общего решения в интегральном виде и задачи типов Коши и линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка со сверхсингулярной точкой [Текст] / А.Г. Олими // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – 2021. – №1. – С. 60–77.

[11]. Раджабов, Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями [Текст] / Н. Раджабов. – часть 4. – Душанбе: изд. ТГУ, 1985. – 157 с.

[12]. Раджабов, Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами [Текст] / Н. Раджабов. – Душанбе: изд-во ТГУ, 1992. – 236с.

[13]. Раджабов, Н. Задачи типов линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с тремя внутренними сингулярными точками [Текст] / Н. Раджабов, Е. Шишкина // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и её приложения». – Худжанд, 2003. – С. 119–122.

[14]. Раджабов, Н. Решение немодельного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н. Раджабов, С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2009. – №1 (49). – С. 3–14.

[15]. Раджабов, Н. Линейная модельная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной левой граничной сингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов, О.И. Меликов // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2015. – Т. 58, № 6. – С.451–457.

[16]. Сансоне, Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст]: том 2 / Дж. Сансоне. – М.: ИЛ, 1954. – 415 с.

[17]. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.

[18]. Хидиров, Х.С. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с тремя сингулярными точками [Текст] / Х.С. Хидиров // Докл. АН Республики Таджикистан. – 2010. – Т. 53, №1. – С. 20–24.

[19]. Rajabov, N.R. Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients / N. R. Rajabov. – Dushanbe: TSNU, 1998. – 158 p.

Б) КОРҶОИ ИНТИШОРКАРДАИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӢИ ДИССЕРТАТСИЯ

1. Дар нашрияҳо аз рӯи хати ҚОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва ҚОА Вазорати илм ва таҳсилоти олии ФР:

[1-М]. Охунов, Н.К. Представление общего решения в интегральном виде и граничные задачи для одного обыкновенного операторно - дифференциального уравнения с тремя слабо сингулярными точками [Текст] / А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – 2022. – №3. – С. 141–159.

[2-М]. Охунов, Н.К. Задача типа линейного сопряжения для операторно - дифференциального уравнения с двумя граничными и одной внутренней сингулярными точками [Текст] / А.Г. Олими, Н.К. Охунов// Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия естественные и экономические науки. – 2022. – №4 (63). – С.12–20.

[3-М]. Охунов, Н.К. Представление общего решения в интегральном виде и задачи Коши-Рикье для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с тремя сингулярными точками [Текст] / Н.Р. Раджабов, А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – 2023. – №1. – С. 69–82.

[4-М]. Охунов, Н.К. Интегральное представление общего решения и задачи Коши - Рикье для обыкновенного операторно-дифференциального уравнения с тремя внутренними сверхсингулярными точками [Текст] / Н.К. Охунов // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия естественные и экономические науки. – 2023. – №2 (65). – С.9–22.

[5-М]. Охунов, Н.К. Интегральное представление общего решения и задача типа линейного сопряжения для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с левой граничной слабосингулярной и двумя внутренними сингулярными точками [Текст] / А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – 2023. – №3. – С. 63–81.

2. Дар маҷмӯаҳои маводҳои конференсияҳо:

[6-М]. Охунов, Н.К. Интегральное представление общего решения и граничные задачи для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с тремя слабо сингулярными точками [Текст] / А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Уфимская осенняя математическая школа: Материалы международной научной конференции. – Уфа: Аэтерна, 2021. – В 2 томах, том 1. – С. 205–207.

[7-М]. Охунов, Н.К. Тасвири интегралҳои ҳалли умумӣ ва масъалаҳои Кошӣ

- Рикйе барои як муодилаи операторӣ - дифференсиалии одӣ бо се нуктаи сингулярнокиаш паст [Матн] / А.Ғ. Олимӣ, Н.Қ. Охунов // Маводи конференсияи илмӣ – амалии ҷумҳуриявии «Муаммоҳои муосири математикаи татбиқӣ ва нақши он дар тавсеаи тафаккури техникаи ҷомеа». – Хучанд: Нури маърифат, 2021. – С. 130–133.

[8-М]. Охунов, Н.К. Задача типа линейного сопряжения для обыкновенного операторно - дифференциального уравнения с тремя слабо сингулярными точками [Текст] / Н.К. Охунов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш. Шабозова. – Душанбе: ООО Эр-граф, 2022. – С. 291–295.

[9-М]. Охунов, Н.К. Общее представление решений и задачи Коши-Рикье для одного операторно-дифференциального уравнения с тремя сингулярными точками [Текст] / А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». Том 2 /отв. ред. З.Ю. Фазуллин. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2022. – С. 216–218.

[10-М]. Охунов, Н.К. Пример задачи типа линейного сопряжения для одного операторно - дифференциального уравнения с тремя слабо особыми точками [Текст] / Н.К. Охунов // Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвящённой 20 - летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы. – Душанбе, 2022. – С. 144–149.

[11-М]. Охунов, Н.К. Пример краевой задачи для одного обыкновенного дифференциального уравнения [Текст] / Н.К. Охунов, А.Г. Олими // Материалы международной научно-практической конференции «Комплексный анализ и его приложения», посвящённой «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования», 75-летию чл. корр. НАН Таджикистана И.К. Курбанова и 70-летию профессора Д.С. Сафарова – Бохтар, 2022. – С.147–151.

[12-М]. Охунов, Н.К. Формула представления общего решения и задачи с начальными условиями для одного обыкновенного операторно - дифференциального уравнения с тремя внутренними сверхсингулярными точками [Текст] / Н.К. Охунов // Материалы международной научно-практической конференции «Развитие математических, точных и естественных наук в современных условиях: проблемы и перспективы». – Дангара, 2023 г. – С. 165–170.

[13-М]. Охунов, Н.К. Задача сопряжения решений для одного обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с тремя внутренними сверхсингулярными точками [Текст] / Н.К. Охунов, А.Г. Олими //

Материалы международной конференции «Современные проблемы математики», посвященной 50-летию Института математики им. А. Джураева НАН Таджикистана. – Душанбе, 2023. – С. 155 – 158.

[14-М]. Охунов, Н.К. Исследование по теории одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений специального типа с тремя сингулярными точками разного порядка / Н.К. Охунов // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвященной 75-летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук 2020-2040 годы, 85-летию академика НАН Таджикистана Н. Раджабова. – Душанбе, 2023. – С. 138-143.

[15-М]. Охунов Н.К. К теории класса обыкновенных дифференциальных уравнений с тремя сингулярными точками разного порядка [Текст] / А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики. Материалы международной научной конференции. - Нальчик, 2023. – С. 214 – 216.

[16-М]. Охунов, Н.К. Задача сопряжения для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с граничными и внутренней сингулярными точками [Текст] / Н.К. Охунов // Материалы международной научно-практической конференции «Математика в современном мире», посвященной Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических дисциплин в области науки и образования и 70-летию профессора С. Байзоева (Худжанд, 20 апреля 2024 г.). – Худжанд, 2024. – С. 50-55.

Аннотатсияи

диссертатсияи Охунзода Нозимҷон Қобил дар мавзӯи «Тасвири интегралӣи ҳалҳо ва масъалаҳои канорӣ барои баъзе муодилаҳои дифференсиалӣи одӣ намуди махсуси дорои се нуқтаҳои сингулярнокии паст, сингулярӣ ё сингулярнокии баланд» барои дарёфти дараҷаи илмӣи номзади илмҳои физика-математика аз рӯи ихтисоси 01.01.02 – муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ

Вожаҳои калидӣ: муодилаи дифференсиалӣи одӣ, намуди махсус, нуқтаи сингулярнокиаш паст, сингулярӣ, сингулярнокиаш баланд, ҳалли умумӣ, баробарии характеристикӣ, рафтори ҳалҳо, масъалаи канорӣ.

Мақсади кор. Ҳосил кардани тасвири интегралӣи ҳалли умумӣи як қатор муодилаи дифференсиалӣи одӣ намудашон махсус бо се нуқтаи сингулярӣи тартиби гуногун, муқаррар намудани хосиятҳои характеристикӣи тасвирҳо ва татбиқи онҳо дар омӯзиши хосиятҳои ҳалҳо дар атрофи нуқтаҳои махсус, аниқ кардани гузориш ва тадқиқи масъалаҳои канорӣ бо шартҳо дар нуқтаҳои махсус мақсади тадқиқотро ташкил медиҳад.

Методҳои тадқиқот. Дар диссертатсия методҳои умумӣи назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ, методи ҳосил намудани тасвирҳои интегралӣ ва назарияи системаҳои муодилаҳои ҳаттии алгебравӣ истифода шудаанд.

Навгониҳои илмӣи тадқиқот. Дар қори диссертатсионӣ натиҷаҳои зерин ҳосил карда шудаанд, ки наво мебошанд:

1. Барои муодилаҳои дифференсиалӣи одӣ намуди махсус:

- бо ду нуқтаҳои сарҳадӣ ва як нуқтаи дохилии сингулярӣ;
- бо ду нуқтаҳои сарҳадӣ ва як нуқтаи дохилии дорои сингулярнокии паст;
- бо се нуқтаҳои дохилии дорои сингулярнокии баланд;
- бо як нуқтаи сарҳадӣи чапи сингулярнокии паст ва ду нуқтаҳои дохилии сингулярӣ,

тасвири ҳалли умумӣ дар намуди интегралӣ ҳосил карда шудаанд.

2. Муқаррар карда шудааст, ки тасвирҳои интегралӣи ҳалли умумӣи ёфташудаи муодилаҳои омӯхташавандаро дар чор намуди баробарқувва дида баромада, истифода бурдан мумкин аст.

3. Барои формулаҳои ҳалли умумӣи ёфташудаи муодилаҳои муоинашаванда баробарӣҳои характеристикӣ (формулаҳои баргардонӣ) муқаррар карда шудаанд.

4. Рафтори ҳалҳои муодилаҳои муоинашаванда дар атрофи нуқтаҳои махсус омӯхта шудаанд.

5. Барои муодилаҳои муоинашаванда масъалаҳои канорӣ бо шартҳо дар нуқтаҳои махсус гузошта, тадқиқ карда ва ҳалли онҳо дар намуди ошкор ёфта шудаанд.

Аҳамияти назариявӣ ва амалӣ. Натиҷаҳои диссертатсия хусусияти назариявӣ доранд. Онҳоро дар қоркарди минбаъдаи назарияи муодилаҳои дифференсиалӣи одӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣи ҳосилаҳои хусусидор бо коэффисиентҳои махсус, инчунин масъалаҳои амалӣ истифода бурдан мумкин аст.

Аннотация

диссертации Охунзода Нозимджона Кобила на тему «Интегральное представление решений и граничные задачи для некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений специального типа с тремя слабо сингулярными, сингулярными или сверхсингулярными точками», представленной на соискание учёной степени кандидата физико - математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, специальный тип, слабо сингулярная, сингулярная, сверхсингулярная точка, общее решение, характеристическое равенство, поведение решений, граничная задача.

Цель работы. Получение интегрального представления общего решения ряда обыкновенных дифференциальных уравнений специального типа с тремя сингулярными точками разного порядка, выявление характеристических свойств представлений и их применение для изучения поведения решений в окрестности особых точек, выяснения постановки и исследования граничных задач с условиями в особых точках.

Методы исследования. В диссертации используются общие методы теории дифференциальных уравнений, метод получения интегральных представлений и теория систем линейных алгебраических уравнений.

Научная новизна исследования. В работе получены следующие результаты, которые являются новыми:

1. Для обыкновенных дифференциальных уравнений специального типа:

- с двумя граничными и одной внутренней сингулярной точками;
- с двумя граничными и одной внутренней слабо сингулярной точками;
- с тремя внутренними сверхсингулярными точками;
- с одной левой граничной слабо сингулярной и двумя внутренними

сингулярными точками,

получены представление общего решения в интегральном виде.

2. Установлено, что полученные интегральные представления общего решения изучаемых уравнений можно рассмотреть и использовать в четырёх равносильных формах.

3. Для полученных формул общего решения рассматриваемых уравнений установлены характеристические равенства (формулы обращения).

4. Изучены поведение решений рассматриваемых уравнений в окрестности особых точек.

5. Для рассматриваемых уравнений поставлены и исследованы граничные задачи с условиями в особых точках, решение которых найдены в явном виде.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы для дальнейшей разработки теории обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных с особыми коэффициентами, а также в прикладных вопросах.

Annotation

dissertation of Okhunzoda Nozimjon Qobil on the topic «Integral representation of solutions and boundary value problems for some ordinary differential equations of a special type with three weakly singular, singular or supersingular points», submitted for the degree of Candidate of Physical and mathematical Sciences in the specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Keywords: ordinary differential equation, special type, weakly singular, singular, supersingular point, general solution, characteristic equality, behavior of solutions, boundary value problem.

The purpose of the work. Obtaining an integral representation of the general solution of a number of ordinary differential equations of a special type with three singular points of different orders, identifying the characteristic properties of representations and their application to study the behavior of solutions in the vicinity of singular points, clarifying the formulation and investigation of boundary value problems with conditions at singular points.

Research methods. The dissertation uses general methods of the theory of differential equations, the method of obtaining integral representations and the theory of systems of linear algebraic equations.

The scientific novelty of the research. The following results have been obtained, which are new:

1. For ordinary differential equations of a special type:
 - with two boundary and one inner singular points;
 - with two boundary and one internal weakly singular point;
 - with three internal supersingular points;
 - with one weakly singular left boundary and two internal singular points, an integral representation of the general solution is obtained.
2. It is established that the obtained integral representations of the general solution of the equations under study can be considered and used in four equivalent forms.
3. For the obtained formulas of the general solution of the equations under consideration, characteristic equalities (inversion formulas) are established.
4. The behavior of solutions of the equations under consideration in the vicinity of singular points is studied.
5. For the equations under consideration, boundary value problems with conditions at special points are posed and investigated, the solutions of which are found explicitly.

Theoretical and practical value. The results obtained in the dissertation are theoretical in nature. They can be used for further development of the theory of ordinary differential equations and partial differential equations with special coefficients, as well as in applied issues.