

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
ГОУ «ХУДЖАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА Б. ГАФУРОВА»**

УДК 517.927

На правах рукописи

ББК 22.161.1

О-92



Охунзода Нозимджон Кобил

**ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ И ГРАНИЧНЫЕ
ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА С
ТРЕМЯ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫМИ, СИНГУЛЯРНЫМИ ИЛИ
СВЕРХСИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ**

ДИ С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения,

динамические системы и оптимальное управление

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук,

доцент **Олими Абдуманон Гафурзода**

Худжанд - 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ИССЛЕДУЕМОЙ ТЕМЕ.....	16
1.1. О слабо сингулярных, сингулярных и сверхсингулярных обыкновенных дифференциальных уравнениях.....	16
1.2. Обзор литературы по обыкновенным дифференциальным уравнениям и системам с одной сингулярной точкой разного порядка.....	17
1.3. Обзор литературы по обыкновенным дифференциальным уравнениям и системам со многими особыми точками.....	22
ГЛАВА 2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА С ДВУМЯ ГРАНИЧНЫМИ И ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СИНГУЛЯРНЫМИ ИЛИ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ.....	26
2.1. Представление общего решения уравнения (2.1) в интегральном виде и его свойства.....	26
2.2. Постановка и исследование граничных для уравнения (2.1) с условиями в сингулярных точках.....	35
2.3. Представление общего решения уравнения (2.2) в интегральном виде и его свойства.....	50
2.4. Постановка и исследование граничных для уравнения (2.2) с условиями в слабо сингулярных точках.....	53
2.5. Пример.....	65
ГЛАВА 3. ОБЫКНОВЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА С ТРЕМЯ ВНУТРЕННИМИ СВЕРХСИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ.....	69
3.1. Представление общего решения уравнения (3.1) в интегральном виде и изучение его свойств.....	69
3.2. Постановка и исследование граничных для уравнения (3.1) с условиями в сверхсингулярных точках.....	81

ГЛАВА 4. ОБЫКНОВЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА С ЛЕВОЙ ГРАНИЧНОЙ СЛАБОСИНГУЛЯРНОЙ И ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ.....	97
4.1. Интегральное представление общего решения уравнения (4.1) и его свойства.....	98
4.2. Постановка и исследование граничных для уравнения (4.1) с условиями в слабо сингулярной и сингулярной точках.....	107
4.3. Пример.....	120
ГЛАВА 5. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ.....	126
ВЫВОДЫ.....	138
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	140

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. К изучению вырождающихся дифференциальных уравнений или дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами приводят многие задачи из теоретической физики, техники, различных частей математической физики, таких как теория поля, теория упругости, теория колебаний, теория гравитации, гидродинамики, газовой динамики, теории автоматического управления и другие (см., например, [3, 7, 8, 22, 44, 48, 70, 100, 101, 108, 111]).

В основополагающей работе М.В. Келдыша [36], работах А.В. Бицадзе, М.М. Смирнова (см., например, [7, 8, 106, 107, 108]) выявлены существенные свойства вырождающихся дифференциальных уравнений, в частности, установлены влияние порядка вырождения и значения коэффициентов на структуру множества решений этих уравнений и особенности постановки граничных задач для них. Указанные работы способствовали значительному росту интереса к изучению вырождающихся и сингулярных дифференциальных уравнений.

Обширную информацию об исследованиях по теории вырождающихся и сингулярных дифференциальных уравнений и вкладе советских, зарубежных и отечественных учёных в разработке важных проблем по указанному направлению можно получить, например, по монографиям А.В. Бицадзе [7, 8], М.М. Смирнова [106 – 108], Н.Р. Раджабова [70, 75], К.Б. Сабитова [100], В.В. Катрахова и С.М. Ситника [35], А. Сатторова [103], R.P. Gilbert [124], H. Begehr, R.P. Gilbert [119], в которых имеется подробная библиография по данной теме. В разработке теории вырождающихся и сингулярных дифференциальных уравнений в частных производных огромный вклад внесли А.В. Бицадзе, И.Н. Векуа, В.Ф. Волкодавов, А.Д. Джураев, Т.Д. Джураев, В.А. Ильин, Т.Ш. Кальменов, М.В. Келдыш, В.В. Катрахов, И.А. Киприянов, Л.Д. Кудрявцев, П.И. Лизоркин, Л.Г. Михайлов, С.Г. Михлин, Е.И. Моисеев, А.М. Нахушев, С.М. Никольский, С.П. Пулькин, Н.Р. Раджабов, К.Б. Сабитов, М.С. Салахитдинов, М.М. Смирнов, А.П. Солдатов, С.А. Терсенов,

З.Д. Усманов, Ф.И. Франкль, А.И. Янушаускас, Л. Берс, А. Вайнштейн, Р. Джилберт, Р. Керрол, Р. Шоултерр и многие другие.

В нашей республике сингулярные дифференциальные уравнения начал исследовать Л.Г. Михайлов, который по праву считается основателем этой математической школы. В дальнейшем эти исследования были расширены и углублены в различных направлениях им и его учениками Н.Р. Раджабовым, З.Д. Усмановым, Г. Джангибековым и А. Мухсиновым. В нашей стране общая теория вырождающихся и сингулярных дифференциальных и интегральных уравнений интенсивно разрабатывалась и разрабатывается под руководством Н.Р. Раджабова, З.Д. Усманова, Э. Мухаммадиева, Н. Усманова, М. Исмати, А. Сатторова, Г. Джангибекова, К.Х. Бойматова, С. Байзаева, Д.С. Сафарова, С.А. Исхокова и других, при активном участии их учеников и последователей.

В задачах прикладного характера и теоретических исследованиях важное место занимают также линейные и нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения с различным типом вырождения или сингулярности. Например, известны важные приложения уравнений Бесселя, Лагерра, Эрмита, Чебышева, Лежандра, Эйри, гипергеометрического уравнения, уравнение Эмдена для политропного газа и других линейных и нелинейных уравнений (см., например, [22, 37, 48, 49, 101, 110] и указанную там литературу). В теории уравнений в частных производных, интегральных, интегро - дифференциальных уравнений типов Вольтерра с коэффициентами и ядрами, имеющими вырождения или сингулярности различных типов и порядков, а также их переопределённых систем, с помощью соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений эффективно решаются многие теоретические вопросы. (см., например, [27, 50, 51, 61, 72, 75, 87, 90, 93 – 95, 97, 98, 100, 116 – 119, 124, 126, 127]).

В течение последних нескольких десятилетий советскими, зарубежными и отечественными исследователями выполнено огромное число работ, посвященных изучению линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, их специальных видов, заданных на

ограниченных и неограниченных областях, имеющих вырождения (сингулярности) различного типа и порядка, разнообразными способами с применением широкого спектра математических средств в различных функциональных пространствах и их приложениях, смотрите, например, В.А. Чечик [115], В.П. Глушко [13], Н.Р. Раджабов [69, 72, 76 – 78, 80 – 83, 128 – 132], Е.И. Моисеев, В.А. Садовничий [48], И.Т. Кигурадзе, Б.Л. Шехтер [37, 38] Ю.Е. Бояринцев [10], Л.В. Крицков [39], С.А. Исхоков [30], С.В. Брычев [11], С.С. Орлов [66], Е.В. Лютов [42], С.М. Ситник [105], А.В. Псху [68], С. Байзаев, Э. Мухамадиев [6], В.Е. Круглов [40], А.Г. Олими [53, 54, 56], О.А. Выхрева [12], М. Илолов [28], С.В. Исраилов, А.Л. Джабраилов, Х.Л. Гасаева [29], Д.С. Сафаров, С.К. Миратов [104], R.C. Gilbert [123], F.R. Hoog, R. Weiss [125], J. Elschner [121], Н. Begehr, R.P. Gilbert [119], Jian Ping Cai, Zong Chi Lin [120], а также дальнейшие ссылки. В этих работах изучены проблемы получения представления общего решения уравнений, других представлений решений в окрестности особых точек, доказательства существования и нахождения решений с определёнными свойствами, свойства и поведение решений вблизи особых точек, свойства соответствующих дифференциальных операторов и операторов их преобразования и другие. Также исследованы вопросы постановки и разрешимости задач Коши, двухточечных и многоточечных краевых задач, задач типа линейного сопряжения и различных других с условиями на особых точках, имеющих большое значение в приложениях.

Следовательно, изучение обыкновенных дифференциальных уравнений, особенно с переменными коэффициентами, имеющих сингулярности различных типов и порядков представляет собой актуальную задачу.

Степень разработанности научной темы. Тема данной диссертационной работы тесно связана с исследованиями по обыкновенным дифференциальным уравнениям, проводимыми в нашей республике под руководством академика Н.Р. Раджабова.

В ряде работ, таких как [69, 71 – 83, 126 – 132] Н.Р. Раджабовым

разработаны универсальные методы исследования линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений разных порядков, их линейных систем, имеющих одну и более слабо сингулярных, сингулярных и сверхсингулярных (особых) точек в коэффициентах в зависимости от расположения этих точек. Согласно предложенной методике (см., например, [76, 81 – 83, 130]) в случае одной особой точки, сначала исследуется случай, когда точка совпадает с граничной точкой, а случай совпадения особой точки с внутренней точкой интервала сводится к рассмотренному случаю. В случае, когда уравнения имеют много особых точек в коэффициентах, Н.Р. Раджабов свёл их изучение к изучению ряда соответствующих уравнений с одной граничной особой точкой (см., например, [82, 128, 130, 132]).

В работах Г. Кадилова, Н.Р. Раджабова (см., например, [31 – 34, 84, 86]), Н.Р. Раджабова, О.И. Меликова (см., например [43, 91]), М.Я. Дадоджановой, Н.Р. Раджабова, А.Г. Олимова (см., например, [15 – 18, 92]), А.Г. Олими (см., например, [53, 54, 56]), А.Г. Олимова, М.Я. Дадоджановой [62], разработанной Н.Р. Раджабовым методикой изучались линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго, более высоких порядков и их систем с одной слабо сингулярной, сингулярной или сверхсингулярной точкой в коэффициентах, а в работах Н.Р. Раджабова, С.К. Зарипова [23, 24, 88 – 90], А.Г. Олимова, Ш.Э. Мирзоевой [65], А.Г. Олими, М.Я. Дадоджановой, Н.К. Охунова, С.А. Толибова [55] линейные уравнения второго, третьего и n - го порядков, а также их специальные типы с двумя сингулярными или слабо сингулярными точками. В работе С.К. Зарифзода [26] предложен новый способ изучения одного класса указанных уравнений.

В выше названных работах исследовались вопросы получения представления общего решения уравнений, свойств представлений, поведения решений, правильной постановки и исследования задач типов Коши, Коши - Рикье и линейного сопряжения.

В работе Н.Р. Раджабова, Е. Шишкиной [85] изучено линейное уравнение первого порядка с тремя внутренними особыми точками и исследована задача

сопряжения решений.

В работах Л.Г. Михайлова, Х.С. Хидирова [47], Х.С. Хидирова [113, 114] исследованы вопросы существования непрерывных и ограниченных решений систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя и тремя сингулярными точками.

В работах А.Р. Абдуллаева, Я.Н. Крохалевой [1], В.П. Архипова, А.В. Глушака [4], В.П. Архипова [5], С.В. Брычева [11], Г.Э. Гришанина, Э.М. Мухамадиева, А.Н. Наимова [14], С.К. Зарипова [25], И.Т. Кигурадзе [38], Л.В. Крицкова [39], В.Е. Круглова [40], И.С. Ломова [41], Л.Г. Михайлова [46], С.С. Орлова [66], И.П. Павлоцкого, М. Стрианезе [67] для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, линейных систем этих уравнений с точкой вырождения или сингулярности изучены вопросы разрешимости задачи Коши, асимптотического представления, структуры и поведения решений в окрестности особой точки, существования непрерывных и ограниченных решений, свойства соответствующих сингулярных дифференциальных операторов и другие.

В работах Н.В. Азбелева, М.Ж. Алвеш, Е.И. Бравого [2], В.П. Глушко [13], И.Т. Кигурадзе, Б.Л. Шехтер [37], Е.В. Лютова [42], Е.И. Моисеева, В.А. Садовниченко [48], Э.М. Мухамадиева, А.Н. Наимова [49] изучены линейные и нелинейные обыкновенные дифференциальные (функционально-дифференциальные) уравнения второго порядка с двумя точками сингулярности по независимому переменному, а в некоторых случаях имеющие сингулярность и по зависимому переменному. В этих работах исследованы вопросы существования, единственности решения двухточечных краевых задач, асимптотики и асимптотического представления решений и другие (обзор и обширная библиография имеется в работе [37]).

Обыкновенные дифференциальные уравнения высоких порядков, с переменными коэффициентами, специальные их типы, имеющие три и более сингулярные точки одного порядка, исследованы мало, а относительно случая,

когда в указанных уравнениях особые точки имеют разные порядки, публикаций нами не обнаружено.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Данная диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры математического анализа имени профессора А. Мухсинова ГОУ «Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова» по теме «Исследование классов обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями, разрешимость переопределенных систем дифференциальных уравнений в различных функциональных пространствах, применение групп и алгебры Ли в изучении дифференциальных уравнений» на 2021 – 2025 гг.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Объект исследования. В диссертационной работе изучаются уравнения специального типа

$$A_{(\alpha),(b)}^n y = f(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i} \quad (0.1)$$

получаемые n -кратным повторным применением обыкновенного дифференциального оператора

$$A_{(\alpha),(b)} y \equiv y' + p(x) \left(\prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i} \right) y - q(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i}$$

по правилу $A_{(\alpha),(b)}^0 y \equiv y$, $A_{(\alpha),(b)}^s y = A_{(\alpha),(b)} (A_{(\alpha),(b)}^{s-1} y)$, $s = \overline{1, n}$, которые рассматриваются на множестве $\Gamma_{(b)} = \Gamma \setminus (b)$ вещественной числовой оси, где $\Gamma = (a, b)$, $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$, $a \leq b_1 < b_2 < b_3 \leq b$, $(\alpha) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\alpha_i > 0$ - действительные числа, n - натуральное число, а точки b_i , $i = 1, 2, 3$, являются сингулярными (особыми) точками уравнения (0.1) и оператора $A_{(\alpha),(b)}$, с порядком сингулярности (особенности) α_i , которые как в работах [16, 130, 132] считаются слабо сингулярными, сингулярными и сверхсингулярными, соответственно, при $0 < \alpha_i < 1$, $\alpha_i = 1$, $\alpha_i > 1$, $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ - известные

функции, непрерывные на отрезке $\bar{\Gamma}$ кроме, быть может, точек b_i , в которых могут иметь разрыв первого рода, а также $p(b_i \pm 0) \neq 0$, соответственно.

Понятие решения уравнения (0.1) вводится как в работах [16, 59, 60] следующим образом:

Определение. Функция $y(x)$ называется решением уравнения (0.1), если она подчиняется условиям $A_{(\alpha),(b)}^s y \in C^1(\Gamma_{(b)})$, $s = \overline{0, n-1}$ и выражение $A_{(\alpha),(b)}^n y$ обращает уравнение в тождество относительно точек множества $\Gamma_{(b)}$.

Цель исследования. Получение представления общего решения в интегральном виде для некоторых уравнений специального типа (0.1) с тремя сингулярными точками разного порядка. Выявление характеристических свойств полученных представлений, с их помощью изучение поведения решений в окрестности особых точек, а также выяснение правильной постановки и исследование граничных задач с условиями в особых точках.

Задачи исследования. В соответствии с поставленной целью выделим следующие задачи:

1. Нахождение представления общего решения в интегральном виде для уравнений специального типа (0.1):

- с двумя граничными и одной внутренней сингулярной точками;
- с двумя граничными и одной внутренней слабо сингулярной точками;
- с тремя внутренними сверхсингулярными точками;
- с одной левой граничной слабо сингулярной и двумя внутренними сингулярными точками.

2. Установление формул обращения для интегральных представлений общего решения, рассматриваемых уравнений типа (0.1).

3. Применение полученных интегральных представлений общего решения рассматриваемых уравнений типа (0.1) для изучения поведения решений в окрестности особых точек.

4. Применение полученных представлений общего решения уравнений

типа (0.1) к выяснению постановки, исследования ряда граничных задач Коши-Рикье и типа линейного сопряжения с условиями в особых точках и нахождения их решения в явном виде.

Предмет исследования. Получение интегрального представления общего решения уравнений типа (0.1), установление формул обращения представлений, изучение поведения решений рассматриваемых уравнений в окрестности особых точек, постановка, исследование и решение в явном виде задач Коши-Рикье и типа линейного сопряжения.

Методы исследования. В работе используются общие методы теории дифференциальных уравнений, метод получения интегральных представлений, а также современные методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений со многими особыми точками.

Научная новизна исследования. В диссертационной работе впервые получены следующие результаты:

1. Для уравнений специального типа (0.1):
 - с двумя граничными и одной внутренней сингулярной точками;
 - с двумя граничными и одной внутренней слабо сингулярной точками;
 - с тремя внутренними сверхсингулярными точками;
 - с одной левой граничной слабо сингулярной и двумя внутренними сингулярными точками,получены представление общего решения в интегральном виде, зависящее от n произвольных постоянных.
2. Установлено, что полученные интегральные представления общего решения изучаемых уравнений типа (0.1) можно рассмотреть и использовать в четырёх равносильных формах.
3. Для полученных интегральных представлений общего решения, рассматриваемых уравнений типа (0.1) установлены характеристические равенства, служащие для них формулами обращения.
4. Получены утверждения о поведении решений рассматриваемых уравнений типа (0.1) в окрестности особых точек.

5. Для рассматриваемых уравнений специального типа (0.1) поставлены и исследованы граничные задачи Коши-Рикье и типа линейного сопряжения с условиями в особых точках, решение которых найдены в явном виде.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы для дальнейшей разработки теории дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных с особыми коэффициентами, а также в прикладных вопросах.

Положения, выносимые на защиту.

- Теоремы о представлении общего решения в интегральном виде для дифференциальных уравнений типа (0.1):

- с двумя граничными и одной внутренней сингулярной точками;
- с двумя граничными и одной внутренней слабо сингулярной точками;
- с тремя внутренними сверхсингулярными точками;
- с одной левой граничной слабо сингулярной и двумя внутренними сингулярными точками.

- Утверждения о возможности рассмотрения полученных представлений общего решения изучаемых уравнений типа (0.1) в четырёх равносильных формах, в зависимости от расположения произвольных постоянных.

- Утверждения об обратимости полученных интегральных представлений общего решения и явные формулы обращения.

- Заключение о поведении решений рассматриваемых уравнений типа (0.1) в окрестности особых точек.

- Теоремы о существовании, единственности и явном представлении решения задач Коши-Рикье для рассматриваемых уравнений специального типа (0.1).

- Теоремы о разрешимости, однозначной разрешимости и явном представлении решения задач типа линейного сопряжения для рассматриваемых

уравнений специального типа (0.1).

Степень достоверности полученных результатов. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами теорем, утверждений, заключений, приведенных в работе, и подтверждается результатами других авторов.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, соответствует формуле (разрешимость и свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений) и пунктам области исследования (1. Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 2. Начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 7. Теория дифференциально-операторных уравнений) Паспорта специальности.

Личный вклад соискателя учёной степени. Вклад соискателя состоит в непосредственном его участии в получении научных положений, выносимых на защиту, подготовке основных публикаций по выполненной работе и личном участии в апробации результатов исследования.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- Международная научная конференция: «Уфимская осенняя математическая школа» (6-9 октября 2021 г.), г. Уфа;
- Республиканская научно-практическая конференция «Современные проблемы прикладной математики и её роль развитии технического мышления общества» (29-30 октября 2021 г.), г. Худжанд;
- Международная научная конференция «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш. Шабозова (24-25 июня 2022 г.), г. Душанбе;
- Международная научная конференция: «Уфимская осенняя

математическая школа» (28 сентября-1 октября 2022 г.), г. Уфа;

- Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы математики и её приложения», посвящённая 20 - летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы (20-21 октября 2022г.), г. Душанбе;

- Международная научно-практическая конференция «Комплексный анализ и его приложения», посвящённая «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования», 75-летию чл. корр. НАНТ И.К. Курбанова и 70-летию д.ф.-м.н., профессора Д.С. Сафарова (19 ноября 2022 г.), г. Бохтар;

- Международная научно-практическая конференция «Развитие математических, точных и естественных наук в современных условиях: проблемы и перспективы» (28-29 апреля 2023 г.), Дангара;

- Международная конференция «Современные проблемы математики», посвящённая 50-летию Института математики им. А. Джураева НАН Таджикистана (26-27 мая 2023 г.), г. Душанбе;

- Международная конференция «Современные проблемы математики и её приложения», посвящённая 75-летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук 2020-2040 годы, 85-летию академика НАН Таджикистана Н. Раджабова (5 октября 2023г.), г. Душанбе;

- Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (4-8 декабря 2023 г.), г. Нальчик;

- Международная научно-практическая конференция «Математика в современном мире», посвящённая Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических дисциплин в области науки и образования и 70-летию профессора С. Байзоева (20. 04. 2024 г.), г. Худжанд;

- Общегородской семинар кафедры математического анализа и теории функций Таджикского Национального университета «Комплексный анализ и его приложения» (под руководством академика НАНТ Н. Раджабова), 2024 г.;

- Апрельские научно-теоретические конференции молодых учёных и профессорского-преподавательского состава Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова, 2021 – 2024 гг.;

- Научно-теоретический семинар кафедры математического анализа им. профессора А. Мухсинова Худжандского государственного университета, 2021 – 2024 гг.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 16 работах [1-А] – [16-А]. Из них первые 5 статей опубликованы в изданиях из перечня рецензируемых журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Министерства науки и высшего образования РФ, а остальные в материалах научных конференций. В совместных работах постановка задачи и выбор метода доказательств принадлежит научному руководителю. Академик Н. Раджабов оказывал консультативную помощь.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, состоящего из 148 наименований, и занимает 160 страниц компьютерного текста. В диссертации принята двойная нумерация. Первый номер указывает на номер главы, второй выражает номер раздела, теоремы, следствия и замечания в пределах главы. Подобным образом нумеруются формулы, при этом для следствия формулы сохраняется ее номер с добавочной буквой, а, б, в или г.

При изложении содержания диссертации используются обозначения, принятые в работах [16, 130] и некоторые их видоизменения.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ИССЛЕДУЕМОЙ ТЕМЕ

В этой главе проводится обзор и анализ литературы по исследуемой теме. Здесь, в основном рассматриваются близкие к теме исследования работы, на которых, как в идейном, теоретическом и методическом отношениях база, основывается проводимое исследование.

1.1. О слабо сингулярных, сингулярных и сверхсингулярных обыкновенных дифференциальных уравнениях. Понятие о слабо сингулярных, сингулярных и сверхсингулярных дифференциальных уравнениях и их систем можно получить на основании работ Л.Г. Михайлова [44 – 47] и Н.Р. Раджабова [70 – 73, 75, 76, 130, 132]. Как отмечается в работе [130] это для линейных уравнений в каждом случае определяется отдельно в зависимости от порядка сингулярности и размерности рассматриваемой области.

Обыкновенные дифференциальные уравнения рассматриваются на части вещественной числовой оси, поэтому уравнения

$$|x - c|^{\alpha} y'(x) + p(x)y(x) = f(x) \quad (1.1)$$

$$\sum_{j=0}^m |x - c|^{\alpha(m-j)} a_j(x) y^{(m-j)}(x) = f(x), \quad (a_0(x) \equiv 1), \quad (1.2)$$

и система

$$|x - c|^{\alpha} y_j'(x) + \sum_{k=1}^m p_{jk}(x) y_k(x) = f_j(x), \quad j = \overline{1, m} \quad (1.3)$$

$x \in \Gamma \setminus \{c\}$, $\Gamma = (a, b)$ называются линейным уравнением первого порядка, линейным уравнением m -го порядка и системой линейных уравнений первого порядка с левой при $c = a$, правой при $c = b$ граничной или внутренней при $a < c < b$ слабо сингулярной, в случае $0 < \alpha < 1$, сингулярной, в случае $\alpha = 1$, сверхсингулярной, в случае $\alpha > 1$ (особой) точкой c . Число α называется порядком сингулярности точки c . Более общие уравнения

$$\prod_{i=1}^n |x - b_i|^{\alpha_i} y'(x) + p(x)y(x) = f(x) \quad (1.4)$$

$$\sum_{j=0}^m \left(\prod_{i=1}^n |x - b_i|^{\alpha_i} \right)^{m-j} a_j(x) y^{(m-j)} = f(x), \quad (a_0(x) \equiv 1) \quad (1.5)$$

и система

$$\prod_{i=1}^n |x - b_i|^{\alpha_i} y_j' + \sum_{k=1}^m p_{jk}(x) y_k = f_j(x), \quad j = \overline{1, m} \quad (1.6)$$

$x \in \Gamma_{(b)}$ где в принятом в настоящем исследовании обозначениях $\Gamma_{(b)} = \Gamma \setminus (b)$, $(b) = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $a \leq b_1 < b_2 < \dots < b_n \leq b$, называются линейным уравнением первого порядка, линейным уравнением m -го порядка и системой линейных уравнений первого порядка с n слабо сингулярными, в случае $0 < \alpha_i < 1$, сингулярными, в случае $\alpha_i = 1$, сверх сингулярными, в случае $\alpha_i > 1$ (особыми) точками b_i [46, 47, 72, 130, 132].

Слабо сингулярность, сингулярность и сверхсингулярность точки c на примере уравнения (1.1) можно охарактеризовать следующим образом. Считая функции $p(x)$ и $f(x)$ непрерывными на отрезке $\bar{G}$ разделяем обе части уравнения на $|x - c|^\alpha$. Функция вида $p(x)|x - c|^{-\alpha}$ остается неограниченным в окрестности точки c , более того в случае $\alpha = 1$ и $\alpha > 1$ она не интегрируема, ее несобственный интеграл второго рода с особой точкой c не существует, так что в этих случаях естественно точку c назвать сингулярной [46]. Как следует из работы [130] в случаях $\alpha = 1$ и $\alpha > 1$ поведение решений уравнения (1.1) при $x \rightarrow c$ существенно отличаются, поэтому в первом случае точку c принято называть просто сингулярной, а во втором сверхсингулярной. В случае $0 < \alpha < 1$ функция $p(x)|x - c|^{-\alpha}$ интегрируема, решения уравнения (1.1) вблизи особой точки остаются ограниченными, поэтому точку c называют слабо сингулярной.

1.2. Обзор литературы по обыкновенным дифференциальным

уравнениям и системам с одной сингулярной точкой разного порядка

В работе Н.Р. Раджабова [72] изучены уравнение (1.1) и система линейных уравнений (1.3) с сингулярной точкой c , то есть при $\alpha = 1$ без учета

расположения этой точки. Применением метода вычитания, когда коэффициент $p(x)$ подчиняется условию Гёльдера, а $f(x)$ непрерывна, получено интегральное представление всех решений уравнения (1.1).

Системе (1.3) сопоставляется модельная система с постоянными коэффициентами $p_{jk}(c) = A_{jk}$, $j = \overline{1, n}$, общее решение которой находится при помощи степенных функций как в теории регулярных систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В общем случае в системе (1.3), когда коэффициенты $p_{jk}(x)$ имеют непрерывные производные в особой точке, при помощи представления решений модельной системы совершается переход к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода и общее решение выписывается с помощью резольвент этой системы.

В работе [73] разработанный в работе [72] способ впервые применен к уравнению (1.1), системе линейных уравнений (1.3) с непрерывными известными функциями $p_{jk}(x)$, $f_j(x)$ при $\alpha > 1$ то есть, когда c является их сверхсингулярной точкой. В этой работе в случае $c = 0$, когда коэффициенты подчиняются условиям типа Гёльдера, а правая часть обращается в нуль при $x \rightarrow 0$, в проколотой двусторонней окрестности сверхсингулярной точки, получено интегральное представление всех дифференцируемых решений.

В рассмотренных работах установлено, что поведение решений в окрестности сингулярной или сверхсингулярной точки зависит, в случае уравнения (1.1) от значения коэффициента $p(x)$, а в случае системы от корней характеристического уравнения, образуемого значениями коэффициентов системы в особой точке, и все они стремятся к нулю или бесконечности. Полученные представления применены к постановке и решению задачи Коши.

В работе Н.Р. Раджабова [76] рассмотрено линейное обыкновенное дифференциальное уравнение высшего порядка типа Эйлера (1.2) с особой точкой $c = 0$. Составляется характеристическое уравнение

$$\sum_{j=0}^m a_j(x) \lambda^{m-j}(x) = 0, \quad \lambda^0(x) = 1 \quad (1.7)$$

с помощью корней которого, левая часть уравнения (1.2) представляется в виде произведения особых линейных обыкновенных дифференциальных операторов первого порядка, при этом её правая часть будет известной функцией. Таким образом, когда коэффициенты $a_j(x) \in C^{m-1}(-a; a)$, $f(x) \in C(-a; a)$, в случаях $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$, в зависимости от корней уравнения (1.7), получено интегральное представление решений уравнения (1.2), которое применяется для постановки и решения задач типа Коши.

В работах Л.Г. Михайлова [46] и Х.С. Хидирова [114] исследованы линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (1.3) и уравнение высшего порядка типа Эйлера (1.2) при $\alpha = 1$ с одной сингулярной точкой $c = 0$ для значений $x > 0$, с непрерывными коэффициентами, непрерывной или только ограниченной в окрестности особой точки правой частью. Системе (1.3) сопоставляется модельная система с коэффициентами $p_{jk}(0)$, а уравнению, уравнение Эйлера с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{j=0}^m x^{m-j} a_j(0) y^{(m-j)} = f(x), \quad (a_0(0) = 1),$$

и с помощью их общего решения, полученного в различных случаях корней характеристических уравнений, рассматриваемая система сводится к изучению системы интегральных уравнений с ядрами однородными степени (-1) или локально однородными, изученных Л.Г. Михайловым [45]. Установлено, что изучаемая система (уравнение), в зависимости правой части, всегда имеет, соответственно, непрерывное или ограниченное решение в достаточно малой окрестности особой точки. Рассмотрен вопрос продолжения решений, определено число линейно независимых решений однородной системы и уравнения и оценено их поведение при $x \rightarrow +0$.

В работах [76, 77, 79 – 83, 126 – 132] Н.Р. Раджабовым предложен новый метод исследования линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем, имеющих одну или много особых точек

в коэффициентах.

В работе Н.Р. Раджабова, С.С. Ходжаева [79] изучена система двух линейных уравнений первого порядка вида (1.3) со сверхсингулярной точкой $x = c$, непрерывными на множестве $\Gamma \setminus \{c\}$ коэффициентами и правой частью, допускающими разрыв первого рода в точке c и в случаях $c = a$, $c = b$ и $a < c < b$, в зависимости от корней характеристических уравнений

$$p_{21}(c \pm 0)\lambda^2 + [p_{11}(c \pm 0) - p_{22}(c \pm 0)]\lambda - p_{12}(c \pm 0) = 0 \quad (1.8)$$

получено представление многообразия решений. Полученное представление применено для корректной постановки и решения задач типа Коши с условиями на особой точке. Показано, что на постановку задач существенно влияют корни характеристических уравнений, а также порядок особенности точки c .

В работе Г.М. Кадирова, Н.Р. Раджабова [31] для системы (1.3) с сверхсингулярной точкой c , $a < c < b$, при помощи представления многообразия решений, полученного в работе [79], впервые поставлена и решена задача типа линейного сопряжения. В работах Н.Р. Раджабова [129, 131] задача типа линейного сопряжения исследована для общих систем линейных уравнений первого порядка с сингулярными и сверхсингулярными точками.

Отметим, что задача линейного сопряжения является одним из основных граничных задач теории аналитических функций, впервые она возникла в работах Б. Римана, посвящённых линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям (см., библиографию в [2-А]). Л.Г. Михайлов полностью исследовал эту задачу для аналитических и обобщенных аналитических функций, а также поставил и изучил её для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (см., например, [44]). Задача линейного сопряжения в различных случаях была исследована и другими авторами (см., например, [9, 20, 21, 99]).

В монографии Н.Р. Раджабова [130], обобщены исследования, проведенные в работах [72, 79]. В работе приведен способ исследования одного линейного уравнения вида (1.1) с учётом расположения особой точки c в случаях $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ и $\alpha > 1$. Изучены случаи, когда точка c совпадает с граничной

точкой интервала Γ , то есть, когда $c = a$, $c = b$, а затем изучение случая $a < c < b$ сведено к рассмотренным случаям. В зависимости от порядка сингулярности и расположения особой точки получены представление общего решения уравнения (1.1), с их помощью изучено поведение решений вблизи особой точки, поставлены и решены задачи Коши.

В работах Н.Р. Раджабова [81 – 83, 128, 132] способом разложения обыкновенных линейных дифференциальных операторов второго порядка на линейные множители (см. [76]) изучены линейные уравнения второго порядка со слабо сингулярной, сингулярной или сверхсингулярной точкой. В этих работах в зависимости от расположения особой точки и корней характеристических уравнений вида (1.7) ($m = 2$), построены представление всех решений, исследованы задачи Коши и типа линейного сопряжения.

Выше проведенный анализ подтверждает, что в изучении общих дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами, особенно высоких порядков, важную роль играют модельные уравнения, то есть более простые уравнения, общее решение которых удастся найти.

В работах Г.М. Кадирова, Н.Р. Раджабова [32, 33, 84, 86], С.К. Зарипова, Н.Р. Раджабова [88, 89], в отличие от модельных уравнений с постоянными коэффициентами, использованных в работах [46, 69, 72, 73, 113, 114, 130], сконструированы модельные линейные уравнения второго и третьего порядков с переменными сингулярными или сверхсингулярными коэффициентами, общее решение которых было найдено методом, аналогичным методу Эйлера в теории линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Далее, с помощью общего решения модельных уравнений, соответствующие линейные уравнения общего вида с сингулярной или сверхсингулярной точкой, в зависимости от корней характеристических уравнений, а также расположения особой точки, заменены равносильными интегральными уравнениями Вольтерра второго рода, что позволило выписать общее решение, исследовать задачи Коши и типа линейного сопряжения.

Использовался и другой подход, основывающийся на исследованиях

А.Г. Олимова (Олими). В его работах [58 – 60] разработан способ нахождения общего решения для частных случаев уравнения вида

$$A_{\alpha,c}^n y = f(x)|x - c|^{-\alpha}, \quad A_{\alpha,c} y \equiv y' + p(x)|x - c|^{-\alpha} y - q(x)|x - c|^{-\alpha}, \quad (1.9)$$

полученного n -кратным применением оператора $A_{\alpha,c}$, где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ - известные на Γ , непрерывные функции. На этой основе, с применением методики, разработанной Н.Р. Раджабовым, уравнение (1.9) исследовано в работах М.Я. Дадоджановой, Н.Р. Раджабова, А.Г. Олимова [15, 16], М.Я. Дадоджановой, А.Г. Олимова (см. например, [17, 18]) при всевозможных значениях α ($0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ и $\alpha > 1$) и различных расположениях особой точки c ($c = a$, $c = b$ и $a < c < b$). Найдено интегральное представление общего решения уравнений, изучены их свойства, они применены для изучения поведения решений вблизи особой точки, постановки задач Коши-Рикье и типа линейного сопряжения.

Полученные в работах [15 – 18] результаты позволили сконструировать модельные линейные обыкновенные дифференциальные уравнения произвольного порядка с особой точкой разного порядка, общее решение для которых, выписывается в явном интегральном виде. В работах Н.Р. Раджабова, М.Я. Дадоджановой, А.Г. Олимова [92], А.Г. Олимова, М.Я. Дадоджановой [62], А.Г. Олимова, Н.Р. Раджабова [63, 64], А.Г. Олими [53, 54, 56] эти конструкции применены для изучения общих линейных обыкновенных уравнений второго и третьего порядков и их систем с сингулярной точкой разного порядка. В терминах коэффициентов для рассматриваемых уравнений доказано существование интегрального представления общего решения, изучены его свойства и поведение решений вблизи особых точек, исследованы задачи типов Коши и линейного сопряжения.

1.3. Обзор литературы по обыкновенным дифференциальным уравнениям и системам со многими особыми точками

В работе [78] исследована система линейных уравнений (1.6) при $m = 2$,

$\alpha_i = 1$ и $\alpha_i > 1$ в случае, когда коэффициенты и правая часть в особых точках допускают разрыв первого рода. При различных расположениях особых точек b_i в пределах промежутка $\bar{\Gamma}$, справа и слева от них, в зависимости от корней характеристических уравнений

$$p_{21}(b_i \pm 0)\lambda^2 + [p_{11}(b_i \pm 0) - p_{22}(b_i \pm 0)]\lambda - p_{12}(b_i \pm 0) = 0, i = \overline{1, n} \quad (1.10)$$

получено представление многообразия решений, зависящее от $2n$ или $2n - 1$ произвольных констант.

В работе [130] линейное уравнение вида (1.4) и система (1.6) с n особыми точками одного порядка на множестве $\Gamma_{(b)}$ изучены следующим способом. С помощью особых точек b_i множество $\Gamma_{(b)}$ представляется в виде суммы ряда интервалов, и искомое решение получается в виде объединения решений в этих интервалах. В этой процедуре в зависимости от расположения особых точек, появляются интервалы двух типов, интервалы, одна граничная точка которых является особой точкой и обе граничные точки которых являются особыми точками уравнения. Интервал, в котором обе граничные точки состоят из особых точек уравнения (1.4), некоторой фиксированной её точкой разбивается на две промежутки, левая и правая граничная точка которых, соответственно, является особой точкой уравнения. Решение уравнения (1.4) находятся в последних промежутках, склеиваются в точке, связывающей промежутки, и получается решение в рассматриваемом интервале второго типа. Таким образом, в данной работе найдено интегральное представление общего решения уравнения (1.4) и системы (1.6) с n сингулярными и сверхсингулярными точками в четырёх возможных случаях их расположения. Представления применяются для изучения поведения решений в окрестности особых точек, правильной постановки и нахождения решения задач Коши, с условиями в особых точках.

В работах [128, 132] Н.Р. Раджабов применил способы, разработанные в работах [76, 130] для изучения линейного уравнения высшего порядка (1.5) с n сингулярными точками одного порядка.

В работах Н.Р. Раджабова, С.К. Зарипова [88, 89] изучены линейные

обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка (1.5) ($m = n = 2$) с двумя граничными сингулярными точками. Использование методики, разработанной в работе [130] в зависимости от корней характеристических уравнений, соответствующих модельным уравнениям, получено интегральное представление общего решения, изучены свойства представлений и поведение решений в окрестности особых точек и исследованы задачи Коши. В работах Н.Р. Раджабова, С.К. Зарипова [23] и С.К. Зарипова [24] эти результаты распространены на линейные уравнения третьего и n -го порядков, а в работе Н.Р. Раджабова, С.К. Зарипова [90] они применены для исследования линейного гиперболического уравнения четвёртого порядка с четырьмя граничными сингулярными линиями.

В работе С.К. Зарифзода [26] для одного класса операторно-дифференциальных уравнений с двумя сингулярными точками предложен новый подход в построении общего решения.

В работах Л.Г. Михайлова, Х.С. Хидирова [47], Х.С. Хидирова [113, 114] для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с двумя и тремя сингулярными точками (система (1.6) при $n = 2$, $n = 3$ и $\alpha_i = 1$) при помощи способа использованного в работах этих авторов [47, 113] изучены вопросы существования непрерывных и ограниченных решений.

В работе Н.Р. Раджабова, Е. Шишкиной [85] найдено интегральное представление общего решения линейного уравнения первого порядка с тремя внутренними особыми точками (уравнение (1.4) при $n = 3$ и $0 < \alpha_i < 1$, $\alpha_i = 1$, $\alpha_i > 1$), которое применено для изучения задачи типа линейного сопряжения.

В работе А.Г. Олимова, Ш.Э. Мирзоевой [65], А.Г. Олими, М.Я. Дадоджановой, Н.К. Охунова, С.А. Толибова [55] изучено обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$A_{(\alpha),(b)}^2 y = \frac{f(x)}{(x - b_1)^{\alpha_1} |b_2 - x|^{\alpha_2}}, \quad (1.11)$$

где $A_{(\alpha),(b)}y \equiv y' + \frac{p(x)}{(x - b_1)^{\alpha_1}|b_2 - x|^{\alpha_2}}y - \frac{q(x)}{(x - b_1)^{\alpha_1}|b_2 - x|^{\alpha_2}}$ в случаях $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ и $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, когда особые точки совпадают с граничными точками интервала $\Gamma = (a, b)$, или одна из них равна левой граничной точке, а другая лежит внутри интервала, то есть $b_1 = a$, $b_2 = b$, или $b_1 = a$, $a < b_2 < b$. Найдена формула представления общего решения, изучены ее свойства и решены в явном виде задачи Коши-Рикье.

Уравнения типа (0.1), которые являются объектом исследования в настоящей диссертационной работе, изучены только в случае $n = 1$, когда b_i , $i = 1, 2, 3$ являются внутренними к интервалу $\Gamma = (a, b)$ особыми точками в работах [85, 130]. В общем случае уравнения типа (0.1) остаются неизученными.

ГЛАВА 2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА С ДВУМЯ ГРАНИЧНЫМИ И ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СИНГУЛЯРНЫМИ ИЛИ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ

В этой главе уравнение (0.1) изучается в случае расположения особых точек в виде $a = b_1 < b_2 < b_3 = b$ при следующих двух системах значений чисел α_i , $i = 1, 2, 3$: $\alpha_i = 1$, $i = 1, 2, 3$; $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, 2, 3$. Уравнение (0.1) в случае, когда точки b_i , $i = 1, 2, 3$ сингулярные, записываем в виде

$$A_{(1),(b)}^n y = f(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-1}, \quad (2.1)$$

где $A_{(1),(b)} y \equiv y' + p(x) \left(\prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-1} \right) y - q(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-1},$

а когда они слабо сингулярные, для него сохраним общую запись

$$A_{(\alpha),(b)}^n y = f(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i}, \quad (2.2)$$

где $A_{(\alpha),(b)} y \equiv y' + p(x) \left(\prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i} \right) y - q(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i}.$

Для изучения рассматриваемых уравнений применяются способы исследования, разработанные и примененные в исследованиях [15, 59, 130], а также результаты, полученные в них.

Результаты, приведенные в настоящей главе, опубликованы в работах [1-A], [2-A], [3-A], [6-A], [7-M], [8-A], [9-A] и [16-A].

2.1. Представление общего решения уравнения (2.1) в интегральном виде и его свойства

Множество $\Gamma_{(b)}$ представим в виде объединения двух интервалов $\Gamma_1 = (b_1, b_2)$, $\Gamma_2 = (b_2, b_3)$, то есть $\Gamma_{(b)} = (a, b_2) \cup (b_2, b) = (b_1, b_2) \cup (b_2, b_3) =$

$= \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Под решением уравнения (2.1) (а также (2.2)) на множестве $\Gamma_{(b)}$ будем понимать объединение его решений на промежутках Γ_1 и Γ_2 , предполагая их существующими.

Уравнение (2.1) изучим параллельно на интервалах Γ_i , $i = 1, 2$. На интервале Γ_i берём произвольную точку x_i^0 , фиксируем её и интервал представим в виде объединения промежутков $\Gamma_i^1 = (b_i, x_i^0]$, $\Gamma_i^2 = [x_i^0, b_{i+1})$, $i = 1, 2$. При рассмотрении уравнения (2.1) на промежутке Γ_i^1 функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ в точке b_i доопределим по непрерывности с помощью их правого предельного значения. Далее, с их помощью вводим новые функции равенствами

$$p_i^1(x) = p(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |x - b_k|^{-1}, \quad q_i^1(x) = q(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |x - b_k|^{-1},$$

$$f_i^1(x) = f(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |x - b_k|^{-1},$$

которые будут непрерывными на отрезке $\overline{\Gamma_i^1}$. Тогда левую часть уравнения (2.1) можно представить как n -ю степень оператора

$$y' + p_i^1(x)(x - b_i)^{-1}y - q_i^1(x)(x - b_i)^{-1},$$

а правую часть в виде $f_i^1(x)(x - b_i)^{-1}$. Из этих рассуждений, согласно работ [15, 130], следует, что данное уравнение в интервале Γ_i^1 имеет единственную сингулярную точку b_i , являющуюся левой граничной точкой этого промежутка.

Пусть функция $p(x)$ такова, что функция $p_i^1(x)$ в точке $x = b_i$ подчиняется условию Гельдера

$$|p_i^1(x) - p_i^1(b_i + 0)| \leq H_i^1(x - b_i)^{h_i^1}, \quad H_i^1 - \text{const.} > 0, 0 < h_i^1 \leq 1 \quad (2.3)$$

при $x \rightarrow b_i + 0$ и неравенству $p_i^1(b_i + 0) = p(b_i + 0) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |b_i - b_k|^{-1} > 0$,

которое равносильно неравенству $p(b_i + 0) > 0$. Тогда на основании формулы (1.2) из работы [15, с. 41] общее решение уравнения (2.1) на Γ_i^1 записывается в виде

$$y(x) = K_{b_i}^{1,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{i0}^1, C_{i1}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1] \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} K_{b_i}^{1,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{i0}^1, C_{i1}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1] &\equiv (x - b_i)^{-p_i^1(b_i+0)} \times \\ &\times \exp \left[-w_{p_i^1, b_i}^{1,+}(x) \right] \left\{ \int_{b_i}^x \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x - \xi)^j}{j!} q_i^1(\xi) + \frac{(x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} f_i^1(\xi) \right] \times \right. \\ &\times (\xi - b_i)^{p_i^1(b_i+0)-1} \exp \left[w_{p_i^1, b_i}^{1,+}(\xi) \right] d\xi + \sum_{j=0}^{n-1} C_{ij}^1 \frac{(x - b_i)^j}{j!} \Bigg\}, \\ w_{p_i^1, b_i}^{1,+}(x) &= \int_{b_i}^x \frac{p_i^1(t) - p_i^1(b_i + 0)}{t - b_i} dt, \text{ а } C_{ij}^1, \quad j = \overline{0, (n-1)} - \text{произвольные} \end{aligned}$$

постоянные ($j = \overline{0, (n-1)} = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

На основании формулы (1.3) из работы [15, с. 42] для степеней оператора $A_{(1),(b)}$ от функции (2.4) получим формулу

$$A_{(1),(b)}^s y = K_{b_i, s}^{1,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1] \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} K_{b_i, s}^{1,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1] &\equiv (x - b_i)^{-p_i^1(b_i+0)} \times \\ &\times \exp \left[-w_{p_i^1, b_i}^{1,+}(x) \right] \left\{ \int_{b_i}^x \left[\sum_{j=0}^{n-s-1} \frac{(x - \xi)^j}{j!} q_i^1(\xi) + \frac{(x - \xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} f_i^1(\xi) \right] \times \right. \\ &\times (\xi - b_i)^{p_i^1(b_i+0)-1} \exp \left[w_{p_i^1, b_i}^{1,+}(\xi) \right] d\xi + \sum_{j=s}^{n-1} C_{ij}^1 \frac{(x - b_i)^{j-s}}{(j-s)!} \Bigg\}, \quad s = \overline{1, (n-1)}. \end{aligned}$$

Из результатов работы [15] вытекает, что формулы (2.4) и (2.5) остаются верными и в случаях, когда для одного или обоих значений $i = 1, 2$ вместо условия $p(b_i + 0) > 0$ выполняется соответствующее условие $p(b_i + 0) < 0$ и $q(x), f(x)$ при $x \rightarrow b_i + 0$ стремятся к нулю со следующим, соответственно асимптотическим поведением:

$$q(x) = o[(x - b_i)^{\beta_i^1}], f(x) = o[(x - b_i)^{\gamma_i^1}], \beta_i^1, \gamma_i^1 > -p_i^1(b_i + 0) \text{ при } x \rightarrow b_i + 0. \quad (2.6)$$

Действительно, тогда из явного выражения для функций $p_i^1(x)$ видно, что для тех же значений $i = 1, 2$ вместо неравенства $p_i^1(b_i + 0) > 0$ выполняется

соответствующее неравенство $p_i^1(b_i + 0) < 0$, а функции $q_i^1(x)$ и $f_i^1(x)$, согласно их определению при $x \rightarrow b_i + 0$ стремятся к нулю со следующим, соответственно асимптотическим поведением:

$$q_i^1(x) = o[(x - b_i)^{\beta_i^1}], \quad f_i^1(x) = o[(x - b_i)^{\gamma_i^1}], \quad \beta_i^1, \gamma_i^1 > -p_i^1(b_i + 0).$$

Тогда в формулах (2.4) и (2.5) все интегралы сходятся и они опять выражают общее решение уравнения (2.1) и степени оператора $A_{(1),(b)}$ от него.

Теперь уравнение (2.1) рассмотрим на промежутке $\Gamma_i^2 = [x_i^0, b_{i+1})$, $i = 1, 2$. В этом случае функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ в точке b_{i+1} доопределим с помощью их левого предельного значения. Тогда, левую часть уравнения можно записать в виде n -й степени оператора

$$A_{(1),(b)}y = y' + p_i^2(x)(b_{i+1} - x)^{-1}y - q_i^2(x)(b_{i+1} - x)^{-1},$$

а правую часть как $f_i^2(x)(b_{i+1} - x)^{-1}$, где

$$p_i^2(x) = p(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |x - b_k|^{-1}, \quad q_i^2(x) = q(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |x - b_k|^{-1},$$

$$f_i^2(x) = f(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |x - b_k|^{-1},$$

известные функции, непрерывные на отрезке $\overline{\Gamma_i^2}$. Поэтому, согласно [15, 130], точка b_{i+1} будет единственной правой граничной сингулярной точкой уравнения (2.1) в интервале Γ_i^2 . Пусть функция $p(x)$ такова, что функция $p_i^2(x)$ в точке b_{i+1} подчиняется условию Гельдера, то есть

$$|p_i^2(b_{i+1} - 0) - p_i^2(x)| \leq H_i^2(b_{i+1} - x)^{h_i^2}, \quad H_i^2 - \text{const.} > 0, \quad 0 < h_i^2 \leq 1, \quad (2.7)$$

и имеет место неравенство $p_i^2(b_{i+1} - 0) = p(b_{i+1} - 0) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |b_{i+1} - b_k|^{-1} < 0$,

равносильное неравенству $p(b_{i+1} - 0) < 0$. Тогда в силу формулы (2.2) из исследования [15, с. 43] общее решение уравнения (2.1) на промежутке Γ_i^2 выражается формулой вида

$$y(x) = K_{b_{i+1}}^{1,-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{i0}^2, C_{i1}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2] \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned}
& K_{b_{i+1}}^{1,-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{i0}^2, C_{i1}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2] \equiv (b_{i+1} - x)^{p_i^2(b_{i+1}-0)} \times \\
& \times \exp \left[-w_{p_i^2, b_{i+1}}^{1,-}(x) \right] \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} C_{ij}^2 \frac{(b_{i+1} - x)^j}{j!} - \int_x^{b_{i+1}} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x - \xi)^j}{j!} q_i^2(\xi) + \frac{(x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} f_i^2(\xi) \right] \times \right. \\
& \times (b_{i+1} - x)^{-p_i^2(b_{i+1}-0)-1} \exp \left[w_{p_i^2, b_{i+1}}^{1,-}(\xi) \right] d\xi \Big\}, \\
& w_{p_i^2, b_{i+1}}^{1,-}(x) = \int_x^{b_{i+1}} \frac{p_i^2(b_{i+1} - 0) - p_i^2(t)}{b_{i+1} - t} dt, \text{ а } C_{ij}^2, \quad j = \overline{0, (n-1)} - \text{ произвольные}
\end{aligned}$$

постоянные.

Для степеней оператора $A_{(1),(b)}$ от функции (2.8) получим следующую формулу:

$$A_{(1),(b)}^s y = K_{b_{i+1},s}^{1,-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2] \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned}
& K_{b_{i+1},s}^{1,-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2] \equiv (b_{i+1} - x)^{p_i^2(b_{i+1}-0)} \times \\
& \times \exp \left[-w_{p_i^2, b_{i+1}}^{1,-}(x) \right] \left\{ (-1)^s \sum_{j=s}^{n-1} C_{ij}^2 \frac{(b_{i+1} - x)^{j-s}}{(j-s)!} - \int_x^{b_{i+1}} \left[\sum_{j=0}^{n-s-1} \frac{(x - \xi)^j}{j!} q_i^2(\xi) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(x - \xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} f_i^2(\xi) \right] (b_{i+1} - x)^{-p_i^2(b_{i+1}-0)-1} \exp \left[w_{p_i^2, b_{i+1}}^{1,-}(\xi) \right] d\xi \right\}, s = \overline{1, (n-1)}.
\end{aligned}$$

Непосредственное рассмотрение формул (2.8) и (2.9) показывает, что все интегралы в них сходятся и они выражают общее решение уравнения (2.1) и степени оператора $A_{(1),(b)}$ от него и в случаях, когда для одного или обоих значений $i = 1, 2$ вместо условия $p_i^2(b_{i+1} - 0) < 0$ выполняется соответствующее условие $p_i^2(b_{i+1} - 0) > 0$, а функции $q_i^2(x)$ и $f_i^2(x)$ при $x \rightarrow b_{i+1} - 0$ стремятся к нулю и подчиняются, соответственно, асимптотическим равенствам:

$$q_i^2(x) = o[(b_{i+1} - x)^{\beta_i^2}], \quad f_i^2(x) = o[(b_{i+1} - x)^{\gamma_i^2}], \quad \beta_i^2, \gamma_i^2 > p_i^2(b_{i+1} - 0).$$

Согласно определению функций $p_i^2(x)$, $q_i^2(x)$ и $f_i^2(x)$ эти требования выполняются, если для тех же значений $i = 1, 2$ вместо неравенства

$p(b_{i+1} - 0) < 0$ выполняется, соответственно, неравенство $p(b_{i+1} - 0) > 0$ и для функций $q(x)$ и $f(x)$ имеет место, соответственно, асимптотическое равенство

$$q(x) = o[(b_{i+1} - x)^{\beta_i^2}], \quad f(x) = o[(b_{i+1} - x)^{\gamma_i^2}], \quad \beta_i^2, \gamma_i^2 > p_i^2(b_{i+1} - 0) \quad (2.10)$$

при $x \rightarrow b_{i+1} - 0$.

Формулы (2.4) и (2.8) при значениях $i = 1$ и $i = 2$ определяют решение уравнения (2.1), соответственно на промежутках Γ_i , $i = 1, 2$, а формулы (2.5) и (2.9) степени оператора $A_{(1),(b)}$ от этих функций. Поэтому для общего решения уравнения (2.1) на множестве $\Gamma_{(b)}$ получим следующую формулу:

$$\begin{aligned} y(x) &= \begin{cases} K_{b_1}^{1,+}[p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{10}^1, C_{11}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1] \text{ при } x \in \Gamma_1^1 \\ K_{b_2}^{1,-}[p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{10}^2, C_{11}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2] \text{ при } x \in \Gamma_1^2 \\ K_{b_2}^{1,+}[p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{20}^1, C_{21}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1] \text{ при } x \in \Gamma_2^1 \\ K_{b_3}^{1,-}[p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{20}^2, C_{21}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2] \text{ при } x \in \Gamma_2^2 \end{cases} \equiv \\ &\equiv Q_{(1),(b)}^{(n)}[p(x), q(x), f(x), C_{10}^1, C_{11}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1; C_{10}^2, C_{11}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2; \\ &\quad C_{20}^1, C_{21}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1; C_{20}^2, C_{21}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2], \end{aligned} \quad (2.11)$$

а для степеней оператора $A_{(1),(b)}$ от этой функции формулу

$$\begin{aligned} A_{(1),(b)}^s y &= \begin{cases} K_{b_1,s}^{1,+}[p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, C_{1(s+1)}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1] \text{ при } x \in \Gamma_1^1 \\ K_{b_2,s}^{1,-}[p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, C_{1(s+1)}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2] \text{ при } x \in \Gamma_1^2 \\ K_{b_2,s}^{1,+}[p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, C_{2(s+1)}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1] \text{ при } x \in \Gamma_2^1 \\ K_{b_3,s}^{1,-}[p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, C_{2(s+1)}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2] \text{ при } x \in \Gamma_2^2 \end{cases} \equiv \\ &\equiv Q_{(1),(b),s}^{(n)}[p(x), q(x), f(x), C_{1s}^1, C_{1(s+1)}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1; C_{1s}^2, C_{1(s+1)}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2; \\ &\quad C_{2s}^1, C_{2(s+1)}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1; C_{2s}^2, C_{2(s+1)}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2], \quad s = \overline{1, (n-1)}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Отметим, что, если принять обозначение $Q_{(1),(b),0}^{(n)}[\dots] \equiv Q_{(1),(b)}^{(n)}[\dots]$, то формулы (2.11) и (2.12) можно выразить одной формулой (2.12) полагая в нём $s = \overline{0, (n-1)}$.

На основе проведенных рассуждений заключаем, что формулы (2.11) и (2.12) остаются справедливыми при любых комбинациях знаков чисел $p(b_i + 0)$ и $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 1, 2$, если, дополнительно, функции $q(x)$ и $f(x)$ в случае $p(b_i + 0) < 0$ подчиняются условиям (2.6), а в случае $p(b_{i+1} - 0) > 0$

подчиняются условиям (2.10).

По определению решение уравнения (2.1) и степени оператора $A_{(1),(b)}$ от него являются непрерывными в точке x_i^0 , $i = 1, 2$, то есть выполняются равенства $[A_{(1),(b)}^s y]_{x=x_i^0+0} = [A_{(1),(b)}^s y]_{x=x_i^0-0}$, $s = \overline{0, (n-1)}$. Эти равенства приводят нас к связи пар произвольных постоянных, относящихся промежутку Γ_i , выражаемое следующей, соответственно, системой линейных алгебраических равенств:

$$\begin{aligned} & K_{b_{i,s}}^{1,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1]_{x=x_i^0} = \\ & = K_{b_{i+1,s}}^{1,-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2]_{x=x_i^0}, s = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Системы (2.13) относительно каждой группы произвольных постоянных C_{ij}^1 или C_{ij}^2 , $i = 1, 2, j = \overline{0, (n-1)}$ являются треугольными системами линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у.) с положительными элементами в главной диагонали соответствующей основной матрицы, если другую группу считать известной. Так что с ее помощью каждую из этих групп можно выразить однозначно с помощью другой. Это дает возможность формулы (2.11) и (2.12) записать в четырех равносильных формах в соответствии с одной из следующих правил:

1). Произвольные постоянные C_{1j}^1 и C_{2j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$, расположенные в первой и третьей строках формул считаются основными, а постоянные C_{1j}^2 и C_{2j}^2 , $j = \overline{0, (n-1)}$, расположенные во второй и четвертой строках, определяются с их помощью из соответствующей системы (2.13);

2). Произвольные постоянные C_{1j}^1 и C_{2j}^2 , $j = \overline{0, (n-1)}$, расположенные в первой и четвертой строках формул считаются основными, а постоянные C_{1j}^2 и C_{2j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$, расположенные во второй и третьей строках, определяются с их помощью из соответствующей системы (2.13);

3). Произвольные постоянные C_{1j}^2 и C_{2j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$, расположенные во второй и третьей строках формул считаются основными, а постоянные C_{1j}^1 и C_{2j}^2 ,

$j = \overline{0, (n-1)}$, расположенные в первой и четвертой строках, определяются с их помощью из соответствующей системы (2.13);

4). Произвольные постоянные C_{1j}^2 и C_{2j}^2 , $j = \overline{0, (n-1)}$, расположенные в во второй и четвертой строках формул считаются основными, а постоянные C_{1j}^1 и C_{2j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$, расположенные в первой и третьей строках, определяются с их помощью из соответствующей системы (2.13).

Из этих рассуждений вытекает, что формула (2.11), выражающая общее решение уравнения (2.1), зависит от n произвольных постоянных, которые по разному обозначаются в промежутках Γ_i , $i = 1, 2$.

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Теорема 2.1. Пусть сингулярные точки уравнения (2.1) расположены в виде $a = b_1 < b_2 < b_3 = b$, далее $\Gamma_{(b)} = \bigcup_{i=1}^2 \Gamma_i$, $\Gamma_i = (b_i, b_{i+1})$, $i = 1, 2$, а x_i^0 — обозначает фиксированную точку интервала Γ_i , которая разделяет этот интервал на промежутки $\Gamma_i^1 = (b_i, x_i^0]$, $\Gamma_i^2 = [x_i^0, b_{i+1})$. Пусть выполняются следующие условия:

1) функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $\bar{\Gamma}$, за исключением, быть может, точек b_i , $i = 1, 2, 3$, а в самих этих точках они могут иметь лишь разрыв первого рода;

2) функции $p_i^1(x)$ и $p_i^2(x)$, определяемые с помощью функции $p(x)$, удовлетворяют условию типа Гельдера (2.3) и (2.7), соответственно;

3) выполняются неравенства $p(b_i + 0) > 0$, $p(b_{i+1} - 0) < 0$, $i = 1, 2$;

4) может иметь место любая другая комбинация знаков чисел $p(b_i + 0)$, $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 1, 2$. При этом, если для одного или обоих значений $i = 1, 2$ вместо неравенства $p(b_i + 0) > 0$ выполняется неравенство $p(b_i + 0) < 0$, то функции $q(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют, соответственно, условию (2.6). Если же для одного или обоих значений $i = 1, 2$ взамен неравенства $p(b_{i+1} - 0) < 0$ выполняется неравенство $p(b_{i+1} - 0) > 0$, то эти функции подчиняются, соответственно, условию (2.10).

Тогда общее решение уравнения (2.1) на множестве $\Gamma_{(b)}$ выражается при помощи формулы (2.11), где $C_{ij}^1, C_{ij}^2, j = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2$ - произвольные постоянные, группы из которых, относящиеся к промежутку $\Gamma_i, i = 1, 2$, однозначно связаны соответствующей с.л.а.у. (2.13). Для степеней оператора $A_{(1),(b)}$ от функции (2.11) имеет место формула (2.12).

Замечание 2.1. В формулах (2.11) и (2.12) первую и третью строки, соответственно, умножим на $(x - b_i)^{p_i^1(b_i+0)}, i = 1, 2$ и в полученных равенствах переходим к пределу при $x \rightarrow b_i + 0$, а вторая и четвёртая строки, соответственно, умножим на $(b_{i+1} - x)^{-p_i^2(b_{i+1}-0)}, i = 1, 2$ и переходим в полученных равенствах к пределу при $x \rightarrow b_{i+1} - 0$.

Тогда получим следующие, соответствующим порядком записанные характеристические равенства:

$$[(x - b_1)^{p_1^1(b_1+0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_1+0} = C_{1s}^1, \quad (2.14)$$

$$[(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_2-0} = (-1)^s C_{1s}^2, \quad (2.15)$$

$$[(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_2+0} = C_{2s}^1, \quad (2.16)$$

$$[(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_3-0} = (-1)^s C_{2s}^2, \quad (2.17)$$

где $s = \overline{0, (n-1)}$.

По известному решению уравнения (2.1), которое выражается формулой (2.11), с помощью этих равенств, соответствующие ему постоянные находятся однозначно. Осуществить это можно и следующим образом, которое понадобится нам в дальнейшем, а именно взяв две группы из равенств (2.14) - (2.17), одно относящееся к Γ_1 , другое к Γ_2 , что возможно четырьмя способами, однозначно находим две группы произвольных постоянных, по одному относящиеся к этим интервалам, далее подставляя их в соответствующую из систем (2.13), находим однозначно другие группы постоянных, относящихся к указанным интервалам. Поэтому равенства (2.14) - (2.17) называются формулами обращения представления (2.11).

Замечание 2.2. На основе оценочных вычислений в строках представлений

(2.11), (2.12), подобных [87, с. 130-32], заключаем, что все решения уравнения (2.1) в окрестности сингулярных точек ведут себя сравнимо со степенной функцией и точно это характеризуется знаками предельных значений функции $p(x)$ в этих точках. При $x \rightarrow b_i + 0$, если $p(b_i + 0) > 0$, то все решения уравнения стремятся к бесконечности с поведением $y(x) = O[(x - b_i)^{-p_i^1(b_i+0)}]$, если $p(b_i + 0) < 0$, то все решения стремятся к нулю с поведением $y(x) = o[(x - b_i)^{-p_i^1(b_i+0)}]$. При $x \rightarrow b_{i+1} - 0$, если $p(b_{i+1} - 0) < 0$, то все решения данного уравнения стремятся к бесконечности с поведением $y(x) = O[(b_{i+1} - x)^{p_i^2(b_{i+1}-0)}]$, если же $p(b_{i+1} - 0) > 0$, то все решения стремятся к нулю с поведением $y(x) = o[(b_{i+1} - x)^{p_i^2(b_{i+1}-0)}]$. Каждое из приведённых заключений может выполняться для одного или обоих значений $i = 1, 2$, или чередоваться различным порядком, так что общая картина поведения решений уравнения (2.1) в окрестности сингулярных точек характеризуется комбинацией знаков четырёх чисел $p(b_i + 0)$ и $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 1, 2$.

2.2. Постановка и исследование граничных для уравнения (2.1) с условиями в сингулярных точках

Начнём с рассмотрения задач Коши-Рикье.

Задача 2.1. Решение уравнения (2.1) найти таким образом, чтобы выполнялось одно из следующих пар групп условий:

$$[(x - b_1)^{p_1^1(b_1+0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_1+0} = a_{1s}^1, [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_2+0} = a_{2s}^1, \quad (2.18)$$

$$[(x - b_1)^{p_1^1(b_1+0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_1+0} = b_{1s}^1, [(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_3-0} = b_{2s}^2, \quad (2.19)$$

$$[(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_2-0} = c_{1s}^2, [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_2+0} = c_{2s}^1, \quad (2.20)$$

$$[(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_2-0} = d_{1s}^2, [(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_3-0} = d_{2s}^2, \quad (2.21)$$

где $s = \overline{0, (n-1)}$, а $a_{is}^1, b_{is}^k, c_{is}^k, d_{is}^2, i, k = 1, 2$ - заданные вещественные числа.

Решение задачи 2.1 в общем случае. Пусть для уравнения (2.1) выполнены все условия теоремы 2.1. Решение задачи 2.1 проводим, используя формулу представления общего решения и степеней оператора $A_{(1),(b)}$ от него,

то есть формулу (2.12), системы (2.13), а также характеристические равенства (2.14) - (2.17).

Формулу (2.12) подставим в условия (2.18). Тогда на основании равенств (2.14) и (2.16) значение произвольных постоянных C_{1s}^1 и $C_{2s}^1, s = \overline{0, (n-1)}$ однозначно находим следующими равенствами:

$$C_{1s}^1 = a_{1s}^1, \quad C_{2s}^1 = a_{2s}^1, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (2.22)$$

Теперь в системах (2.13) постоянные C_{1s}^1 и C_{2s}^1 заменим их значениями из последних равенств. Тогда приходим к следующим треугольным с.л.а.у.:

$$\begin{aligned} K_{b_2, s}^{1, -} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0} &= \\ &= K_{b_1, s}^{1, +} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), a_{1s}^1, \dots, a_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0}, \\ K_{b_3, s}^{1, -} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0} &= \\ &= K_{b_2, s}^{1, +} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), a_{2s}^1, \dots, a_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0}, s = \overline{0, (n-1)}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

относительно произвольных постоянных C_{1s}^2 и $C_{2s}^2, s = \overline{0, (n-1)}$, соответственно, из которых последние определяются однозначно. Значение постоянных $C_{1s}^1, C_{2s}^1, C_{1s}^2$ и $C_{2s}^2, s = \overline{0, (n-1)}$, соответственно из формул (2.22) и систем (2.23), подставляя в формулу (2.11), получим единственное решение задачи 2.1 с условиями (2.18).

Докажем единственность полученного решения $y(x) = y_1(x)$ задачи Коши -Рикье другим способом. Предположим, что существует другое решение $y_2(x)$ данной задачи, отличное от функции $y_1(x)$. Тогда, функция

$$v(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

на основании следующих тождеств, доказываемых математической индукцией:

$$A_{(1), (b)}^s y_1 - A_{(1), (b)}^s y_2 = B_{(1), (b)}^s v, \quad s = \overline{0, n},$$

$$B_{(1), (b)} v \equiv v' + p(x) \left(\prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-1} \right) v$$

будет решением частного случая уравнения (2.1), то есть уравнения

$$B_{(1), (b)}^n v = 0,$$

удовлетворяющим условиям

$$[(x - b_1)^{p_1^{1,0}(b_1+0)} B_{(1),(b)}^s y]_{x=b_1+0} = 0, \quad [(x - b_2)^{p_2^{1,0}(b_2+0)} B_{(1),(b)}^s y]_{x=b_2+0} = 0,$$

$$s = \overline{0, (n-1)}.$$

Применяя формулы (2.12), (2.14) и (2.16) в этом случае, имеем $v(x) \equiv 0$ или $y_1(x) \equiv y_2(x)$. Значит, данная задача кроме $y_1(x)$ другого решения не имеет.

При требовании выполнения других условий задачи 2.1 выводы делаем подобным образом. Тогда: в случае условий (2.19) в силу равенств (2.14) и (2.17) произвольные постоянные C_{1s}^1, C_{2s}^2 находим равенствами:

$$C_{1s}^1 = b_{1s}^1, \quad C_{2s}^2 = (-1)^s b_{2s}^2, \quad s = \overline{0, (n-1)} \quad (2.24)$$

и, подставляя найденные значения в соответствующую систему (2.13) для нахождения постоянных C_{1s}^2, C_{2s}^1 , приходим к следующим треугольным с.л.а.у.:

$$\begin{aligned} K_{b_{2,s}}^{1,-}[p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0} &= \\ &= K_{b_{1,s}}^{1,+}[p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), b_{1s}^1, \dots, b_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0}, \\ K_{b_{2,s}}^{1,+}[p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0} &= \\ &= K_{b_{3,s}}^{1,-}[p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), (-1)^s b_{2s}^2, \dots, (-1)^{n-1} b_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0}, \\ s &= \overline{0, (n-1)}; \end{aligned} \quad (2.25)$$

в случае условий (2.20) в силу равенств (2.15) и (2.16) произвольные постоянные C_{1s}^2, C_{2s}^1 находим так:

$$C_{1s}^2 = (-1)^s c_{1s}^2, \quad C_{2s}^1 = c_{2s}^1, \quad s = \overline{0, (n-1)} \quad (2.26)$$

и подставляя эти значения в соответствующую систему (2.13), получим следующую с.л.а.у. для определения C_{1s}^1, C_{2s}^2 , соответственно:

$$\begin{aligned} K_{b_{1,s}}^{1,+}[p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0} &= \\ &= K_{b_{2,s}}^{1,-}[p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), (-1)^s c_{1s}^2, \dots, (-1)^{n-1} c_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0}, \\ K_{b_{3,s}}^{1,-}[p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0} &= \\ &= K_{b_{2,s}}^{1,+}[p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), c_{2s}^1, \dots, c_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0}, \\ s &= \overline{0, (n-1)}; \end{aligned} \quad (2.27)$$

в случае условий (2.21) в силу равенств (2.15) и (2.17) произвольные постоянные C_{1s}^2, C_{2s}^2 находим равенствами

$$C_{1s}^2 = (-1)^s d_{1s}^2, \quad C_{2s}^2 = (-1)^s d_{2s}^2, \quad s = \overline{0, (n-1)} \quad (2.28)$$

и, подставляя эти их значения в соответствующую систему из (2.13), для нахождения постоянных C_{1s}^1, C_{2s}^1 имеем следующую с.л.а.у., соответственно:

$$\begin{aligned} K_{b_1, s}^{1,+} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0} &= \\ &= K_{b_2, s}^{1,-} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), (-1)^s d_{1s}^2, \dots, (-1)^{n-1} d_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0}, \\ K_{b_2, s}^{1,+} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0} &= \\ &= K_{b_3, s}^{1,-} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), (-1)^s d_{2s}^2, \dots, (-1)^{n-1} d_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0}, \\ s &= \overline{0, (n-1)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

В каждом из этих случаев также выписываем соответствующее решение уравнения (2.1).

Подытоживая рассуждения, имеем утверждение:

Теорема 2.2. Пусть для уравнения (2.1) выполняются условия теоремы 2.1. Тогда задача 2.1 имеет единственное решение, которое, в соответствии с её условиями, получается из формулы (2.11) заменой произвольных постоянных их значением, соответственно, из следующих формул и систем: (2.22), (2.23); (2.24), (2.25); (2.26), (2.27) и (2.28), (2.29).

Решение задачи 2.1 в случае $n = 2$. В этом случае подробно рассмотрим процесс решения и получим окончательные формулы для решения. Отметим, что при $n = 2$ система (2.13) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} d_i(\mu_i + C_{i0}^1 + k_i C_{i1}^1) = e_i(\lambda_i + C_{i0}^2 + r_i C_{i1}^2), \\ d_i(v_i + C_{i1}^1) = e_i(\eta_i - C_{i1}^2) \end{cases}, \quad i = 1, 2, \quad (2.30)$$

где

$$\begin{aligned} d_i &\equiv d_i(x_i^0) = (x_i^0 - b_i)^{-p_i^1(b_i+0)} \exp \left[-w_{p_i^1, b_i}^{1,+}(x_i^0) \right], \\ e_i &\equiv e_i(x_i^0) = (b_{i+1} - x_i^0)^{p_i^2(b_{i+1}-0)} \exp \left[-w_{p_i^2, b_{i+1}}^{1,-}(x_i^0) \right], \\ k_i &\equiv k_i(x_i^0) = x_i^0 - b_i, \quad r_i \equiv r_i(x_i^0) = b_{i+1} - x_i^0, \quad d_i, e_i, k_i, r_i > 0, \\ \mu_i &\equiv \mu_i(x_i^0) = \int_{b_i}^{x_i^0} [(1 + x_i^0 - \xi) q_i^1(\xi) + (x_i^0 - \xi) f_i^1(\xi)] (\xi - b_i)^{p_i^1(b_i+0)-1} \times \end{aligned}$$

$$\times \exp \left[w_{p_i^1, b_i}^{1,+}(\xi) \right] d\xi ,$$

$$\lambda_i \equiv \lambda_i(x_i^0) = - \int_{x_i^0}^{b_{i+1}} [(1 + x_i^0 - \xi)q_i^2(\xi) + (x_i^0 - \xi)f_i^2(\xi)](b_{i+1} - \xi)^{-p_i^2(b_{i+1}-0)-1} \times$$

$$\times \exp \left[w_{p_i^2, b_{i+1}}^{1,-}(\xi) \right] d\xi ,$$

$$\nu_i \equiv \nu_i(x_i^0) = \int_{b_i}^{x_i^0} [q_i^1(\xi) + f_i^1(\xi)](\xi - b_i)^{p_i^1(b_i+0)-1} \exp \left[w_{p_i^1, b_i}^{1,+}(\xi) \right] d\xi ,$$

$$\eta_i \equiv \eta_i(x_i^0) = - \int_{x_i^0}^{b_{i+1}} [q_i^2(\xi) + f_i^2(\xi)](b_{i+1} - \xi)^{-p_i^2(b_{i+1}-0)-1} \exp \left[w_{p_i^2, b_{i+1}}^{1,-}(\xi) \right] d\xi .$$

При $n = 2$ условия (2.18) состоят из следующих равенств:

$$\begin{aligned} [(x - b_1)^{p_1^1(b_1+0)}y(x)]_{x=b_1+0} &= a_{10}^1, \quad [(x - b_1)^{p_1^1(b_1+0)}A_{(1),(b)}y]_{x=b_1+0} = a_{11}^1, \\ [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)}y(x)]_{x=b_2+0} &= a_{20}^1, \quad [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)}A_{(1),(b)}y]_{x=b_2+0} = a_{21}^1, \end{aligned} \quad (2.31)$$

Представление (2.11) подчиним этим условиям. Тогда в силу характеристических равенств (2.14) и (2.16), произвольные постоянные C_{1j}^1, C_{2j}^1 находим так:

$$C_{1j}^1 = a_{1j}^1, \quad C_{2j}^1 = a_{2j}^1, \quad j = 0, 1. \quad (2.32)$$

Найденное значение C_{1j}^1, C_{2j}^1 подставляем в систему (2.15). Тогда, относительно произвольных постоянных C_{1j}^2, C_{2j}^2 , имеем определенную систему из которого получим

$$C_{i0}^2 = \frac{d_i}{e_i} a_{i0}^1 + \frac{d_i}{e_i} (k_i + r_i) a_{i1}^1 + A_i, \quad C_{i1}^2 = -\frac{d_i}{e_i} a_{i1}^1 + \bar{A}_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.33)$$

$$\text{где } A_i = \frac{d_i}{e_i} (\mu_i + r_i \nu_i) - r_i \eta_i - \lambda_i, \quad \bar{A}_i = \eta_i - \frac{d_i}{e_i} \nu_i .$$

Теперь значение произвольных постоянных, из равенств (2.32) и (2.33) подставляя в формулу (2.11), находим решение задачи с условиями (2.31).

Переходим к условиям (2.19). Требуя выполнение условий (2.19) из представления (2.12) с использованием равенств (2.14) и (2.17) произвольные постоянные C_{1j}^1, C_{2j}^2 находим так:

$$C_{10}^1 = b_{10}^1, \quad C_{11}^1 = b_{11}^1, \quad C_{20}^2 = b_{20}^2, \quad C_{21}^2 = -b_{21}^2. \quad (2.34)$$

Подставляя эти пары в соответствующую систему из (2.30) для нахождения произвольных постоянных C_{1j}^2, C_{2j}^1 имеем равенства:

$$\begin{aligned} C_{10}^2 &= \frac{d_1}{e_1} b_{10}^1 + \frac{d_1}{e_1} (k_1 + r_1) b_{11}^1 + A_1, & C_{11}^2 &= -\frac{d_1}{e_1} b_{11}^1 + \bar{A}_1; \\ C_{20}^1 &= \frac{e_2}{d_2} b_{20}^2 - \frac{e_2}{d_2} (k_2 + r_2) b_{21}^2 + B_2, & C_{21}^1 &= \frac{e_2}{d_2} b_{21}^2 + \bar{B}_2, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где $B_i = \frac{e_i}{d_i} (\lambda_i - k_i \eta_i) + k_i v_i - \mu_i, \bar{B}_i = \frac{e_i}{d_i} \eta_i - v_i$.

Значение произвольных постоянных из равенств (2.34) и (2.35) подставляя в формулу (2.11), находим решение задачи 2.1 с условиями (2.19).

Переходим к условиям (2.20) при $n = 2$. Подчиняя формулу (2.12) этим условиям в силу характеристических равенств (2.15) и (2.16) произвольные постоянные C_{1j}^2, C_{2j}^1 , находим так:

$$C_{10}^2 = c_{10}^2, \quad C_{11}^2 = -c_{11}^2; \quad C_{20}^1 = c_{20}^1, \quad C_{21}^1 = c_{21}^1, \quad (2.36)$$

после подставляя их значение в соответствующую систему из (2.30), находим произвольные постоянные C_{1j}^1, C_{2j}^2 равенствами

$$\begin{aligned} C_{10}^1 &= \frac{e_1}{d_1} c_{10}^2 - \frac{e_1}{d_1} (k_1 + r_1) c_{11}^2 + B_1, & C_{11}^1 &= \frac{e_1}{d_1} c_{11}^2 + \bar{B}_1; \\ C_{20}^2 &= \frac{d_2}{e_2} c_{20}^1 + \frac{d_2}{e_2} (k_2 + r_2) c_{21}^1 + A_2, & C_{21}^2 &= -\frac{d_2}{e_2} c_{21}^1 + \bar{A}_2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Данные из равенств (2.36) и (2.37) внося в формулу (2.11), получим решение уравнения (2.1), подчиняющееся условиям (2.20).

Теперь находим решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям (2.21). Подчинив представление (2.12) при $n = 2$ этим условиям и применяя характеристические равенства (2.15) и (2.17), получим равенства

$$C_{10}^2 = d_{10}^2, \quad C_{11}^2 = -d_{11}^2, \quad C_{20}^2 = d_{20}^2, \quad C_{21}^2 = -d_{21}^2, \quad (2.38)$$

для нахождения C_{1j}^2, C_{2j}^2 , далее, поставим эти значения в соответствующую систему из (2.30), откуда произвольные постоянные C_{1j}^1, C_{2j}^1 определим так:

$$C_{10}^1 = \frac{e_1}{d_1} d_{10}^2 - \frac{e_1}{d_1} (k_1 + r_1) d_{11}^2 + B_1, \quad C_{11}^1 = \frac{e_1}{d_1} d_{11}^2 + \bar{B}_1,$$

$$C_{20}^1 = \frac{e_2}{d_2} d_{20}^2 - \frac{e_2}{d_2} (k_2 + r_2) d_{21}^2 + B_2, \quad C_{21}^1 = \frac{e_2}{d_2} d_{21}^2 + \overline{B}_2, \quad (2.39)$$

Подставляя значение произвольных постоянных из равенств (2.38) и (2.39) в формулу (2.11), получим искомое решение.

Таким образом, доказано утверждение.

Теорема 2.3. Пусть в уравнении (2.1) $n = 2$ и выполняются условия теоремы 2.1. Тогда, оно имеет единственное решение, подчиняющееся группе условий (2.18), (2.19), (2.20) или (2.21), которое выражается формулой

$$y(x) = Q_{(1),(b)}^{(2)}[p(x), q(x), f(x), C_{10}^1, C_{11}^1; C_{10}^2, C_{11}^2; C_{20}^1, C_{21}^1; C_{20}^2, C_{21}^2],$$

где постоянные $C_{ij}^1, C_{ij}^2, j = 0, 1, i = 1, 2$ определяются, соответственно, группами формул (2.32), (2.33); (2.34), (2.35); (2.36), (2.37) и (2.38), (2.39).

Переходим к рассмотрению задачи типа линейного сопряжения.

Задача 2.2. Найти решение уравнения (2.1) так, чтобы выполнялась следующая система условий:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} [(x - b_1)^{p_1^1(b_1+0)} A_{(1),(b)}^j y]_{x=b_1+0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} [(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{(1),(b)}^j y]_{x=b_2-0} + \\ + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{(1),(b)}^j y]_{x=b_2+0} + \\ + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} [(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{(1),(b)}^j y]_{x=b_3-0} = \varepsilon_k, \end{aligned} \quad (2.40)$$

где $k = \overline{1, 2n}$, b_{kj} и $\varepsilon_k, j = \overline{0, (4n-1)}$ - заданные вещественные числа.

Исследование задачи 2.2 в общем случае. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Представление (2.12) общего решения уравнения (2.1) подставим в условия (2.40). Вычислим пределы, входящие в систему (2.40) и, принимая во внимание характеристические равенства (2.14) - (2.17), свяжем их в соответствии с условиями задачи. Тогда приходим к следующей с.л.а.у. из $2n$ уравнений с $4n$ неизвестными $C_{ij}^1, C_{ij}^2, j = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} C_{1j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} (-1)^j C_{1j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} C_{2j}^1 +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} (-1)^j C_{2j}^2 = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, 2n} \quad (2.41)$$

К полученной системе уравнений добавим автоматически выполняющиеся для представления (2.12) треугольные с.л.а.у. (2.13):

$$\begin{aligned} & K_{b_i, s}^{1,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1]_{x=x_i^0} = \\ & = K_{b_{i+1}, s}^{1,-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2]_{x=x_i^0}, s = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

При помощи этих систем, согласно правилам 1) - 4) из раздела 2.1, две группы из неизвестных $C_{ij}^1, C_{ij}^2, j = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2$, относящиеся по одному к промежуткам $\Gamma_i, i = 1, 2$, можно выразить однозначно при помощи другой группы, относящейся соответствующему промежутку. Совершая это (что можно делать четырьмя способами), полученный результат, подставляя в систему (2.41) можно ее преобразовать в эквивалентный вид, состоящий из системы $2n$ уравнений относительно двух групп, всего $2n$, неизвестных $C_{ij}^1, C_{ij}^2, j = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2$, относящихся к разным промежуткам Γ_i и систем (2.42). Поясним эти способы эквивалентного преобразования системы (2.41):

а) неизвестные C_{1j}^2 и $C_{2j}^2, j = \overline{0, (n-1)}$ заменим их выражением через неизвестные C_{1j}^1 и C_{2j}^1 из систем (2.42). Тогда после некоторых элементарных преобразований система (2.41) переходит в с.л.а.у. с $2n$ уравнениями и неизвестными $C_{1j}^1, C_{2j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$. Полученную систему обозначим как (2.41а);

б) неизвестные C_{1j}^2 и $C_{2j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$ заменим их выражением через неизвестные C_{1j}^1 и C_{2j}^2 из систем (2.42). Тогда система (2.41) переходит в с.л.а.у. с $2n$ уравнениями и неизвестными $C_{1j}^1, C_{2j}^2, j = \overline{0, (n-1)}$. Полученную систему обозначим как (2.41б);

в) неизвестные C_{1j}^1 и $C_{2j}^2, j = \overline{0, (n-1)}$, заменим их выражением через неизвестные C_{1j}^2 и C_{2j}^1 из систем (2.42). Тогда система (2.41) приводится в с.л.а.у. с $2n$ уравнениями и неизвестными $C_{1j}^2, C_{2j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$. Полученную систему

обозначим как (2.41в);

г) неизвестные C_{1j}^1 и C_{2j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$, заменим их выражением через неизвестные C_{1j}^2 и C_{2j}^2 из систем (2.42). Тогда система (2.41) приводится к с.л.а.у. с $2n$ уравнениями и неизвестными C_{1j}^2 , C_{2j}^2 , $j = \overline{0, (n-1)}$, которую обозначим как (2.41г).

Из проведенных рассуждений следует, что каждая из систем (2.41а), (2.41б), (2.41в), (2.41г) в связке с системой (2.42) является эквивалентной системе (2.41), (2.42). Следовательно, все они эквивалентны между собой вместе с (2.42).

Таким образом, исследование разрешимости задачи 2.2 приводится к изучению, эквивалентных в указанном смысле, систем (2.41а), (2.41б), (2.41в), (2.41г).

Остановимся на случае системы (2.41а). Возможны следующие случаи [52]:

1) ранг r основной матрицы равен рангу расширенной матрицы и общее их значение есть $r = 2n$. Тогда система (2.41а) определённая и, решая её, находим неизвестные C_{ij}^1 , $i = 1, 2$, $j = \overline{0, (n-1)}$. Далее, в системах (2.42) неизвестные C_{ij}^1 , $i = 1, 2$ заменяем найденными их числовыми значениями. Из полученной системы однозначно находим значение неизвестных C_{1j}^2 и C_{2j}^2 , $j = \overline{0, (n-1)}$. Таким образом, все неизвестные, входящие в систему (2.41) однозначно определяются, подставляя значение которых в представление (2.11) находим единственное решение $y(x)$ задачи 2.2.

2) ранг основной матрицы $r < 2n$ и равен рангу расширенной матрицы. Тогда система (2.41а) совместна, точнее она, также и система (2.42) имеет бесконечное число решений, зависящих от $2n - r$ произвольных постоянных. В этом случае задача 2.2 имеет бесконечное множество решений.

3) ранг основной матрицы $r < 2n$ и не равен рангу расширенной матрицы. Тогда система (2.41а) несовместна, и задача 2.2 не имеет решения.

Покажем единственность полученного в случае 1) решения подробными рассуждениями. Для этого предположим существования другого, отличного от

$y(x)$, решения $y^*(x)$ задачи. Эта функция тоже охватывается представлением (2.11). Постоянные соответствующие ей по формулам (2.14) - (2.17) обозначим с теми же индексами, как и выше, только с дополнительным значком *, то есть в виде $C_{ij}^{1*}, C_{ij}^{2*}, i = 1, 2, j = \overline{0, (n-1)}$. Эти числа обращают в тождества систему (2.41) и связаны при помощи систем (2.42). Отсюда следует, что постоянные $C_{ij}^{1*}, i = 1, 2, j = \overline{0, (n-1)}$ образуют решение с.л.а.у. (2.41а) и поэтому совпадают с числами $C_{ij}^1, i = 1, 2, j = \overline{0, (n-1)}$. Тогда и числа C_{ij}^{2*} совпадают с числами C_{ij}^2 . Итак, решению $y^*(x)$ соответствуют те же постоянные, которые определяют решение $y(x)$. Значит, эти два решения тождественно равны.

Обобщая, получим следующее утверждение о разрешимости задачи 2.2.

Теорема 2.4. Пусть относительно уравнения (2.1) выполняются условия теоремы 2.1, а в системе (2.41а), (2.41б), (2.41в) или (2.41г) основная и расширенная матрицы имеют ранг, соответственно, равный r и ρ .

1) Если $r = \rho = 2n$, тогда задача 2.2 имеет единственное решение, которое получается из формулы (2.11) заменой в нём произвольных постоянных решением одной из систем (2.41а), (2.41б), (2.41в) и (2.41г), рассматриваемой вместе с системой (2.42);

2) Если $r = \rho < 2n$, тогда задача 2.2 имеет бесконечно много решений и её общее решение выражается через решения одной из систем (2.41а), (2.41б), (2.41в) и (2.41г), рассматриваемой вместе с системой (2.42), формулой (2.11), зависящей от $2n - r$ произвольных постоянных;

3) Если $r < 2n, r \neq \rho$, тогда каждая из систем (2.41а), (2.41б), (2.41в) и (2.41г) вместе с системой (2.42) несовместна, и задача 2.2 не имеет решения.

Исследование задачи 2.2 в случае $n = 2$. Продолжим обсуждение с целью получения точных результатов и конкретных формул. Отметим, что в случае $n = 2$ с.л.а.у. (2.42) записываются в виде (2.30).

Случай 1. Из системы (2.30) неизвестные C_{ij}^2 выразим при помощи неизвестных $C_{ij}^1, i = 1, 2, j = 0, 1$, то есть

$$\left\{ C_{i0}^2 = \frac{d_i}{e_i} [C_{i0}^1 + (k_i + r_i)C_{i1}^1] + A_i, \quad C_{i1}^2 = -\frac{d_i}{e_i} C_{i1}^1 + \overline{A_i}, \quad i = 1, 2. \right. \quad (2.43)$$

С.л.а.у (2.41), которая при $n = 2$ записывается в виде

$$b_{k0}C_{10}^1 + b_{k1}C_{11}^1 + b_{k2}C_{20}^2 - b_{k3}C_{21}^2 + b_{k4}C_{20}^1 + b_{k5}C_{21}^1 + b_{k6}C_{20}^2 - b_{k7}C_{21}^2 = \varepsilon_k, \\ k = \overline{1, 4}, \quad (2.44)$$

рассмотрим вместе с (2.43). В нем неизвестные $C_{i0}^2, C_{i1}^2, i = 1, 2$ заменяем их выражениями из систем (2.43). В полученном результате произведём некоторые преобразования и приходим к следующей с.л.а.у. относительно неизвестных $C_{i0}^1, C_{i1}^1, i = 1, 2$, эквивалентной к (2.44) вместе с системой (2.43):

$$m_{k0}^1 C_{10}^1 + m_{k1}^1 C_{11}^1 + n_{k0}^1 C_{20}^1 + n_{k1}^1 C_{21}^1 = l_k^1, \quad k = \overline{1, 4}, \quad (2.45)$$

где

$$m_{k0}^1 = b_{k0} + b_{k2} \frac{d_1}{e_1}, \quad m_{k1}^1 = b_{k1} + \frac{d_1}{e_1} [b_{k2}(k_1 + r_1) + b_{k3}], \quad n_{k0}^1 = b_{k4} + b_{k6} \frac{d_2}{e_2}, \\ n_{k1}^1 = b_{k5} + \frac{d_2}{e_2} [b_{k6}(k_2 + r_2) + b_{k7}], \quad l_k^1 = \varepsilon_k - b_{k2}A_1 + b_{k3}\overline{A_1} - b_{k6}A_2 + b_{k7}\overline{A_2}$$

- известные вещественные числа.

Пусть, при $n = 2$ в условиях (2.40) числа b_{kj} и $\varepsilon_k, k = \overline{1, 4}, j = \overline{0, 7}$ такие, что детерминант $\Delta_{11} = \begin{vmatrix} m_{k0}^1 & m_{k1}^1 & n_{k0}^1 & n_{k1}^1 \\ k = \overline{1, 4} \end{vmatrix}$ не равно нулю. Тогда в системе (2.45) ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы, их общее значение $r = 4$. В этом случае единственное решение с.л.а.у. (2.45) есть

$$C_{i0}^1 = \frac{\Delta_{11}^{i0}}{\Delta_{11}}, \quad C_{i1}^1 = \frac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}}, \quad i = 1, 2, \quad (2.46)$$

где Δ_{11}^{ij} - есть детерминант, который получается из основного детерминанта Δ_{11} , если вместо столбца, соответствующего неизвестному $C_{ij}^1, i = 1, 2, j = 0, 1$ поставить столбец правой части системы (2.45). Теперь значение неизвестных C_{ij}^1 из (2.46) поставим в соответствующую систему (2.43), откуда определим значение неизвестных $C_{ij}^2, i = 1, 2, j = 0, 1$ так:

$$C_{i0}^2 = \frac{d_i}{e_i} \frac{\Delta_{11}^{i0}}{\Delta_{11}} + (k_i + r_i) \frac{d_i}{e_i} \frac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}} + A_i, \quad C_{i1}^2 = -\frac{d_i}{e_i} \frac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}} + \overline{A_i}, \quad i = 1, 2, \quad (2.47)$$

Таким образом, все неизвестные входящие в систему (2.44) однозначно

определены, значение которых из равенств (2.46) и (2.47) поставляя в представление (2.11), получим единственное решение задачи 2.2.

Замечание 2.3. Пусть, детерминант системы (2.45) $\Delta_{11} = 0$. Тогда ранг основной матрицы системы (2.45) есть $r < 4$, и оно может, равняться рангу расширенной матрицы или нет. В первом случае система (2.45) и поэтому система (2.44), (2.43) имеет бесконечно много решений, определяемых $4 - r$ произвольными постоянными. Тогда и задача 2.2 имеет бесконечно много решений, выражаемых через решения системы (2.44), (2.43) формулой (2.11), зависящей от $4 - r$ произвольных постоянных. Во втором случае система (2.45) несовместна, поэтому система (2.44), (2.43) не имеет решения, а тогда и задача 2.2 ($n = 2$) не имеет решения.

Случай 2. Систему (2.30) запишем в равносильном виде:

$$\begin{aligned} C_{10}^2 &= \frac{d_1}{e_1} C_{10}^1 + \frac{d_1}{e_1} (k_1 + r_1) C_{11}^1 + A_1, & C_{11}^2 &= -\frac{d_1}{e_1} C_{11}^1 + \bar{A}_1, \\ C_{20}^1 &= \frac{e_2}{d_2} C_{20}^2 + \frac{e_2}{d_2} (k_2 + r_2) C_{21}^2 + B_2, & C_{21}^1 &= -\frac{e_2}{d_2} C_{21}^2 + \bar{B}_2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

и присоединим ее к системе (2.44). В последней системе вместо неизвестных C_{10}^2 , C_{11}^2 , C_{20}^1 , C_{21}^1 поставим их выражения через неизвестные C_{10}^1 , C_{11}^1 , C_{20}^2 , C_{21}^2 из равенств (2.48). Тогда получим следующую, вместе с системой (2.48) равносильную (2.44), с.л.а.у. для определения неизвестных C_{10}^1 , C_{11}^1 , C_{20}^2 , C_{21}^2 :

$$m_{k0}^1 C_{10}^1 + m_{k1}^1 C_{11}^1 + n_{k0}^2 C_{20}^2 + n_{k1}^2 C_{21}^2 = l_k^2, \quad k = \overline{1,4}, \quad (2.49)$$

где m_{k0}^1 , m_{k1}^1 - известные вещественные числа из случая 1, а

$$n_{k0}^2 = b_{k4} \frac{e_2}{d_2} + b_{k6}, \quad n_{k1}^2 = \frac{e_2}{d_2} [b_{k4} (k_2 + r_2) - b_{k5}] - b_{k7},$$

$$l_k^2 = \varepsilon_k - b_{k2} A_1 + b_{k3} \bar{A}_1 - b_{k4} B_2 - b_{k7} \bar{B}_2, \quad k = \overline{1,4}.$$

Пусть детерминант $\Delta_{12} = \begin{vmatrix} m_{k0}^1 & m_{k1}^1 & n_{k0}^2 & n_{k1}^2 \\ k = \overline{1,4} \end{vmatrix}$ отличен от нуля. Тогда ранг системы

(2.49) $r = 4$, она определена и ее решение выражается формулами

$$C_{1j}^1 = \frac{\Delta_{12}^{1j}}{\Delta_{12}}, \quad C_{2j}^2 = \frac{\Delta_{12}^{2j}}{\Delta_{12}}, \quad j = 0,1. \quad (2.50)$$

Здесь детерминанты Δ_{12}^{1j} , Δ_{12}^{2j} , $j = 0,1$ находятся из детерминанта Δ_{12} заменой

столбца системы (2.49), соответствующего переменным $C_{1j}^1, C_{2j}^2, j = 0,1$, столбцом правой части этой системы. Теперь, используя найденное значение неизвестных $C_{1j}^1, C_{2j}^2, j = 0,1$ из формул (2.50), по формулам (2.48) вычислим значение остальных неизвестных. Имеем:

$$\begin{aligned} C_{10}^2 &= \frac{d_1}{e_1} \frac{\Delta_{12}^{10}}{\Delta_{12}} + \frac{d_1}{e_1} \frac{\Delta_{12}^{11}}{\Delta_{12}} (k_1 + r_1) + A_1, & C_{11}^2 &= -\frac{d_1}{e_1} \frac{\Delta_{12}^{11}}{\Delta_{12}} + \overline{A}_1, \\ C_{20}^1 &= \frac{e_2}{d_2} \frac{\Delta_{12}^{20}}{\Delta_{12}} + \frac{e_2}{d_2} \frac{\Delta_{12}^{21}}{\Delta_{12}} (k_2 + r_2) + B_2, & C_{21}^1 &= -\frac{e_2}{d_2} \frac{\Delta_{12}^{21}}{\Delta_{12}} + \overline{B}_2. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Найденное значение произвольных постоянных из формул (2.50) и (2.51) подставляя в представление (2.11), получим единственное решение задачи 2.2.

Случай 3. Систему (2.30) записываем в разрешенном относительно переменных $C_{1j}^1, C_{2j}^2, j = 0,1$ виде:

$$\begin{cases} C_{10}^1 = \frac{e_1}{d_1} C_{10}^2 + \frac{e_1}{d_1} (k_1 + r_1) C_{11}^2 + B_1, & C_{11}^1 = -\frac{e_1}{d_1} C_{11}^2 + \overline{B}_1 \\ C_{20}^2 = \frac{d_2}{e_2} C_{20}^1 + \frac{d_2}{e_2} (k_2 + r_2) C_{21}^1 + A_2, & C_{21}^2 = -\frac{d_2}{e_2} C_{21}^1 + \overline{A}_2 \end{cases} \quad (2.52)$$

и последнюю систему рассмотрим вместе системой (2.44). В системе (2.44) вместо переменных $C_{1j}^1, C_{2j}^2, j = 0,1$ поставим их выражения через переменные $C_{1j}^2, C_{2j}^1, j = 0,1$ из равенств (2.52), упростим результат и приходим к следующей с.л.а.у. относительно последних переменных, равносильной в связке с (2.52) к системе (2.44):

$$m_{k0}^2 C_{10}^2 + m_{k1}^2 C_{11}^2 + n_{k0}^1 C_{20}^1 + n_{k1}^1 C_{21}^1 = l_k^3, \quad k = \overline{1,4}, \quad (2.53)$$

где $m_{k0}^2 = b_{k0} \frac{e_1}{d_1} + b_{k2}$, $m_{k1}^2 = \frac{e_1}{d_1} [b_{k0}(k_1 + r_1) - b_{k1}] - b_{k3}$, n_{k0}^1, n_{k1}^1 - известные числа из случая 1, а $l_k^3 = \varepsilon_k - b_{k0}B_1 - b_{k1}\overline{B}_1 - b_{k6}A_2 + b_{k7}\overline{A}_2, k = \overline{1,4}$.

Пусть детерминант $\Delta_{21} = \left| \begin{matrix} m_{k0}^2 & m_{k1}^2 & n_{k0}^1 & n_{k1}^1 \\ k = \overline{1,4} \end{matrix} \right|$ не равен нулю, это значит ранг системы (2.53) - $r = 4$ и её единственное решение дается формулами

$$C_{1j}^2 = \frac{\Delta_{21}^{1j}}{\Delta_{21}}, \quad C_{2j}^1 = \frac{\Delta_{21}^{2j}}{\Delta_{21}}, \quad j = 0,1, \quad (2.54)$$

где определители $\Delta_{21}^{1j}, \Delta_{21}^{2j}$ находятся из определителя Δ_{21} путем замены

столбцов, соответствующих в системе (2.53) переменным $C_{1j}^2, C_{2j}^1, j = 0,1$, столбцом правой части этой системы. Далее, подставляя найденное значение переменных $C_{1j}^2, C_{2j}^1, j = 0,1$ из равенств (2.54) в равенства (2.52), переменные $C_{1j}^1, C_{2j}^2, j = 0,1$ находим так:

$$\begin{aligned} C_{10}^1 &= \frac{e_1}{d_1} \frac{\Delta_{21}^{10}}{\Delta_{21}} + \frac{e_1}{d_1} (k_1 + r_1) \frac{\Delta_{21}^{11}}{\Delta_{21}} + B_1, & C_{11}^1 &= -\frac{e_1}{d_1} \frac{\Delta_{21}^{11}}{\Delta_{21}} + \bar{B}_1, \\ C_{20}^2 &= \frac{d_2}{e_2} \frac{\Delta_{21}^{20}}{\Delta_{21}} + \frac{d_2}{e_2} (k_2 + r_2) \frac{\Delta_{21}^{21}}{\Delta_{21}} + A_2, & C_{21}^2 &= -\frac{d_2}{e_2} \frac{\Delta_{21}^{21}}{\Delta_{21}} + \bar{A}_2. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Значение произвольных постоянных из (2.54) и (2.55) подставляя в формулу (2.11), получим решение задачи 2.2.

Случай 4. В этом случае систему (2.30) записываем в виде

$$\begin{cases} C_{10}^1 = \frac{e_1}{d_1} C_{10}^2 + \frac{e_1}{d_1} (k_1 + r_1) C_{11}^2 + B_1, & C_{11}^1 = -\frac{e_1}{d_1} C_{11}^2 + \bar{B}_1 \\ C_{20}^1 = \frac{e_2}{d_2} C_{20}^2 + \frac{e_2}{d_2} (k_2 + r_2) C_{21}^2 + B_2, & C_{21}^1 = -\frac{e_2}{d_2} C_{21}^2 + \bar{B}_2, \end{cases} \quad (2.56)$$

и присоединим ее к системе (2.44). Используя эти равенства систему (2.44) преобразуем, тогда относительно переменных $C_{1j}^2, C_{2j}^2, j = 0,1$ получим следующую с.л.а.у., эквивалентную к (2.44) вместе с системой (2.56):

$$m_{k0}^2 C_{10}^2 + m_{k1}^2 C_{11}^2 + n_{k0}^2 C_{20}^2 + n_{k1}^2 C_{21}^2 = l_k^4, \quad k = \overline{1,4}, \quad (2.57)$$

где m_{k0}^2, m_{k1}^2 и n_{k0}^2, n_{k1}^2 известные числа, введенные выше, соответственно в случаях 3 и 2, а $l_k^4 = \varepsilon_k - B_1 b_{k0} - \bar{B}_1 b_{k1} - b_{k4} B_2 - b_{k5} \bar{B}_2$. Допустим, что

детерминант $\Delta_{22} = \begin{vmatrix} m_{k0}^2 & m_{k1}^2 & n_{k0}^2 & n_{k1}^2 \\ k = \overline{1,4} \end{vmatrix}$ не равен нулю, тогда ранг системы (2.57) -

$r = 4$ и она имеет единственное решение

$$C_{1j}^2 = \frac{\Delta_{22}^{1j}}{\Delta_{22}}, \quad C_{2j}^2 = \frac{\Delta_{22}^{2j}}{\Delta_{22}}, \quad j = 0,1, \quad (2.58)$$

где определители $\Delta_{22}^{1j}, \Delta_{22}^{2j}$ находятся из определителя Δ_{22} путем замены столбцов, соответствующих в системе (2.57) переменным $C_{1j}^2, C_{2j}^2, j = 0,1$, столбцом правой части этой системы. Используя известное значение переменных $C_{1j}^2, C_{2j}^2, j = 0,1$ из равенств (2.58) с помощью равенств (2.56) находим значение переменных $C_{1j}^1, C_{2j}^1, j = 0,1$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
C_{10}^1 &= \frac{e_1}{d_1} \frac{\Delta_{22}^{10}}{\Delta_{22}} + \frac{e_1}{d_1} (k_1 + r_1) \frac{\Delta_{22}^{11}}{\Delta_{22}} + B_1, & C_{11}^1 &= -\frac{e_1}{d_1} \frac{\Delta_{22}^{11}}{\Delta_{22}} + \bar{B}_1, \\
C_{20}^1 &= \frac{e_2}{d_2} \frac{\Delta_{22}^{20}}{\Delta_{22}} + \frac{e_2}{d_2} (k_2 + r_2) \frac{\Delta_{22}^{21}}{\Delta_{22}} + B_2, & C_{21}^1 &= -\frac{e_2}{d_2} \frac{\Delta_{22}^{21}}{\Delta_{22}} + \bar{B}_2.
\end{aligned} \quad (2.59)$$

Данные из формул (2.58) и (2.59) подставляя в формулу (2.11), получим единственное решение задачи 2.2.

Замечание 2.4. Утверждения, аналогичные утверждениям, приведённым в замечании 2.3 справедливы и в случаях 2 - 4 исследования задачи 2.2.

Замечание 2.5. Из проведённых выше рассуждений следует, что системы (2.45), (2.49), (2.53) и (2.57), взятые вместе с системой (2.30) эквивалентны системе (2.44), (2.30), поэтому все эти пары эквивалентны друг другу.

Таким образом, приходим к следующему заключению о разрешимости задачи 2.2.

Теорема 2.5. Пусть в уравнении (2.1) $n = 2$ и выполняются условия теоремы 2.1.

1) Если детерминант Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{21} или Δ_{22} не равен нулю, то ранг r основной матрицы систем (2.45), (2.49), (2.53) и (2.57) равен рангу ρ их расширенной матрицы, $r = \rho = 4$ и задача 2.2 имеет единственное решение, выражающееся формулой

$$y(x) = Q_{(1),(b)}^{(2)}[p(x), q(x), f(x), C_{10}^1, C_{11}^1; C_{10}^2, C_{11}^2; C_{20}^1, C_{21}^1; C_{20}^2, C_{21}^2], \quad (2.60)$$

где постоянные C_{ij}^1 , C_{ij}^2 , $j = 0, 1, i = 1, 2$ определяются одной из следующих групп формул (2.46), (2.47); (2.50), (2.51); (2.54), (2.55) или (2.58), (2.59).

2) Если детерминант Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{21} или Δ_{22} равен нулю, то $r < 4$. При этом, когда $r = \rho$ каждая из систем (2.45), (2.49), (2.53), (2.57) и поэтому система (2.44), (2.30) имеет бесконечно много решений, их общее решение зависит от $4 - r$ произвольных постоянных, тогда и задача 2.2 имеет бесконечно много решений, выражаемых через решения системы (2.44), (2.30) формулой (2.60), зависящей от $4 - r$ произвольных постоянных, а когда $r \neq \rho$ системы (2.45), (2.49), (2.53), (2.57) несовместны, поэтому система (2.44), (2.30) также несовместна и задача 2.2 не имеет решения.

2.3. Представление общего решения уравнения (2.2) в интегральном виде и его свойства

Разбиваем множество $\Gamma_{(b)}$ на части $\Gamma_{(b)} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ $\Gamma_1 = (b_1, b_2)$, $\Gamma_2 = (b_2, b_3)$ и рассуждая как в разделе 2.1 уравнение (2.2) изучим в промежутках Γ_1 и Γ_2 одновременно. На промежутке Γ_i фиксируем точку $\bar{x}_i^0$ и представим его в виде объединения промежутков $\Gamma_i^1 = (b_i, \bar{x}_i^0]$, $\Gamma_i^2 = [\bar{x}_i^0, b_{i+1})$, $i = 1, 2$. На части Γ_i^1 уравнение (2.2) имеет единственную левую граничную слабо сингулярную точку b_i , поэтому его изучим как в работах [17, 130]. Для этого функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ в точке b_i доопределим по непрерывности и с их помощью вводим новые функции

$$p_i^1(x) = p(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k}, \quad q_i^1(x) = q(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k},$$

$$f_i^1(x) = f(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k},$$

непрерывные на отрезке $\overline{\Gamma_i^1}$. Тогда, на основании теоремы 1.1 [17, с. 4] общее решение уравнения (2.2) и степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ него на промежутке Γ_i^1 , $i = 1, 2$ выражаются следующей единой формулой:

$$A_{(\alpha),(b)}^s y = \exp \left[-u_{p_i^1, b_i}^{\alpha_{i,+}}(x) \right] \left\{ \int_{b_i}^x \left[\sum_{j=0}^{n-s-1} \frac{(x-\xi)^j}{j!} q_i^1(\xi) + \frac{(x-\xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} f_i^1(\xi) \right] \times \right.$$

$$\times (\xi - b_i)^{-\alpha_i} \exp \left[u_{p_i^1, b_i}^{\alpha_{i,+}}(\xi) \right] d\xi + \sum_{j=s}^{n-1} C_{ij}^1 \frac{(x - b_i)^{j-s}}{(j-s)!} \Bigg\} \equiv$$

$$\equiv I_{b_i, s}^{\alpha_{i,+}} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1],$$

$$s = \overline{0, (n-1)}, \quad (I_{b_i, 0}^{\alpha_{i,+}}[\dots] = I_{b_i}^{\alpha_{i,+}}[\dots]), \quad (2.61)$$

где $u_{p_i^1, b_i}^{\alpha_{i,+}}(x) = \int_{b_i}^x \frac{p_i^1(t)}{(t - b_i)^{\alpha_i}} dt$, а $C_{ij}^1, j = \overline{0, (n-1)}$ – произвольные постоянные.

Теперь уравнение (2.2) рассмотрим на промежутке $\Gamma_i^2 = [\bar{x}_i^0, b_{i+1})$, $i = 1, 2$.

Здесь уравнение, как уравнения изученные в работах [17, 130], имеет единственную правую граничную слабо сингулярную точку b_{i+1} и её можно изучить подобно им. Функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ в точке b_{i+1} доопределим с помощью их левого предельного значения и с их помощью вводим функции

$$p_i^2(x) = p(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k}, \quad q_i^2(x) = q(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k},$$

$$f_i^2(x) = f(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k}$$

непрерывные на отрезке $\overline{\Gamma_i^2}$. Тогда, на основании теоремы 2.1 [17, с. 6], общее решение уравнения (2.2) и степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ него на промежутке Γ_i^2 , $i = 1, 2$ записывается в виде

$$A_{(\alpha),(b)}^s y = \exp \left[u_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) \right] \left\{ (-1)^s \sum_{j=s}^{n-1} C_{ij}^2 \frac{(b_{i+1} - x)^{j-s}}{(j-s)!} - \int_x^{b_{i+1}} \left[\sum_{j=0}^{n-s-1} \frac{(x-\xi)^j}{j!} q_i^2(\xi) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(x-\xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} f_i^2(\xi) \right] (b_{i+1} - x)^{-\alpha_{i+1}} \exp \left[-u_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(\xi) \right] d\xi \right\} \equiv \\ \equiv I_{b_{i+1}, s}^{\alpha_{i+1}, -} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2], \quad s = \overline{0, (n-1)} \quad (2.62)$$

где $u_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) = \int_x^{b_{i+1}} \frac{p_i^2(t)}{(b_{i+1} - t)^{\alpha_{i+1}}} dt$, а C_{ij}^2 , $j = \overline{0, (n-1)}$ – произвольные

постоянные.

Формулы (2.61) и (2.62) вместе определяют общее решение уравнения (2.2) и степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от него на промежутке Γ_i , объединяя которых при $i = 1, 2$ получим следующую формулу для общего решения уравнения (2.2) степеней оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от него на $\Gamma_{(b)}$:

$$A_{(\alpha),(b)}^s y = \begin{cases} I_{b_1, s}^{\alpha_1, +} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, C_{1(s+1)}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1] \text{ при } x \in \Gamma_1^1 \\ I_{b_2, s}^{\alpha_2, -} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, C_{1(s+1)}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2] \text{ при } x \in \Gamma_1^2 \\ I_{b_2, s}^{\alpha_2, +} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, C_{2(s+1)}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1] \text{ при } x \in \Gamma_2^1 \\ I_{b_3, s}^{\alpha_3, -} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, C_{2(s+1)}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2] \text{ при } x \in \Gamma_2^2 \end{cases} \equiv$$

$$\equiv \Omega_{(\alpha),(b),s}^{(n)}[p(x), q(x), f(x), C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1; C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2; C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1; C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2], \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (\Omega_{(\alpha),(b),0}^{(n)}[\dots] \equiv \Omega_{(\alpha),(b)}^{(n)}[\dots]) \quad (2.63)$$

Согласно определению решения уравнения (2.2) они и соответствующие степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от них непрерывны в точке $\bar{x}_i^0$, $i = 1, 2$, то есть выполняются равенства $[A_{(\alpha),(b)}^s y]_{x=\bar{x}_i^0+0} = [A_{(\alpha),(b)}^s y]_{x=\bar{x}_i^0-0}$, $s = \overline{0, (n-1)}$, $i = 1, 2$. Поэтому выполняются следующие системы равенств:

$$\begin{aligned} & I_{b_i,s}^{\alpha_i,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1]_{x=\bar{x}_i^0} = \\ & = I_{b_{i+1},s}^{\alpha_{i+1},-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2]_{x=\bar{x}_i^0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Системы (2.64) представляют собой две треугольные с.л.а.у. с n уравнениями и произвольными постоянными C_{1j}^1 (или C_{1j}^2) и C_{2j}^1 (или C_{2j}^2), $j = \overline{0, (n-1)}$, относящихся промежуткам Γ_1 и Γ_2 . Из явного вида формулы (2.63) вытекает, что в каждом из этих случаев основная диагональ матрицы систем (2.64) состоит из положительных элементов. Значит, при их помощи можно однозначно выразить каждую группу произвольных постоянных C_{ij}^1 и C_{ij}^2 , $i = 1, 2$, $j = \overline{0, (n-1)}$, относящихся промежутку Γ_i через другую группу. Пользуясь этим формулу (2.63) можно записать в четырёх равносильных формах, применяя правила 1) - 4) принятие в разделе 2.1 к ней, следовательно, общее решение уравнения (2.2) и степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от него зависят и характеризуются n - произвольными постоянными, которые по разному обозначены в промежутках Γ_i .

Подытоживая, приходим к следующему заключению:

Теорема 2.6. Пусть слабо сингулярные точки уравнения (2.2)

расположены в виде $a = b_1 < b_2 < b_3 = b$, далее $\Gamma_{(b)} = \bigcup_{i=1}^2 \Gamma_i$, $\Gamma_i = (b_i, b_{i+1})$, $i = 1, 2$, а $\bar{x}_i^0$ - фиксированная точка промежутка Γ_i и $\Gamma_i^1 = (b_i, \bar{x}_i^0]$, $\Gamma_i^2 = [\bar{x}_i^0, b_{i+1})$. Пусть функции $p(x), q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $\bar{\Gamma}$, кроме, быть может, точек $b_i, i = 1, 2, 3$. В самих этих точках данные функции могут иметь лишь разрыв первого рода.

Тогда общее решение уравнения (2.2) и степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от него на множестве $\Gamma_{(b)}$ выражается при помощи формулы (2.63), где $C_{ij}^1, C_{ij}^2, j = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2$ - произвольные постоянные, группы из которых относящиеся к промежутку $\Gamma_i, i = 1, 2$, однозначно связаны соответствующей системой алгебраических уравнений (2.64).

Следствие 2.1. Переходя соответствующим образом к пределу в строках формулы (2.63), получим следующие характеристические равенства:

$$[A_{(\alpha),(b)}^s y]_{x=b_1+0} = C_{1s}^1, \quad (2.65)$$

$$[A_{(\alpha),(b)}^s y]_{x=b_2-0} = (-1)^s C_{1s}^2, \quad (2.66)$$

$$[A_{(\alpha),(b)}^s y]_{x=b_2+0} = C_{2s}^1, \quad (2.67)$$

$$[A_{(\alpha),(b)}^s y]_{x=b_3-0} = (-1)^s C_{2s}^2, \quad (2.68)$$

где $s = \overline{0, (n-1)}$.

Если известно решение уравнения (2.2), выражаемое по формуле (2.63), то с помощью этих формул соответствующие ему постоянные находятся однозначно. Этот процесс можно осуществлять четырьмя способами следующим образом: а именно применяя две группы из равенств (2.65) - (2.68), одно относящееся к Γ_1 , другое к Γ_2 , однозначно находим две группы произвольных постоянных, по одному относящихся к этим интервалам, далее подставляя их в соответствующую из систем (2.64), отсюда находим однозначно другие группы постоянных, относящихся к указанным интервалам. Поэтому равенства (2.65) – (2.68) назовём формулами обращения представления (2.63).

Следствие 2.2. Из равенств (2.65) - (2.68) вытекает, что все решения уравнения (2.2), и выражения $A_{(\alpha),(b)}^s, s = \overline{1, (n-1)}$ для них, представленные формулой (2.63), ограничены в окрестности точек $b_i, i = 1, 2, 3$.

2.4. Постановка и исследование граничных для уравнения (2.2) с условиями на слабо сингулярных точках

Сначала рассмотрим и решаем задачи Коши - Рикье.

Задача 2.3. Требуется найти решение уравнения (2.2), подчиняющееся одному из следующих пар групп условий:

$$[A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_1+0} = \bar{a}_{1j}^1, \quad [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_2+0} = \bar{a}_{2j}^1; \quad (2.69)$$

$$[A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_1+0} = \bar{b}_{1j}^1, \quad [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_3-0} = \bar{b}_{2j}^2; \quad (2.70)$$

$$[A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_2-0} = \bar{c}_{1j}^2, \quad [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_2+0} = \bar{c}_{2j}^1; \quad (2.71)$$

$$[A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_2-0} = \bar{d}_{1j}^2, \quad [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_3-0} = \bar{d}_{2j}^2; \quad (2.72)$$

$j = \overline{0, (n-1)}$, где $\bar{a}_{ij}^1, \bar{b}_{ij}^k, \bar{c}_{ij}^k, \bar{d}_{ij}^2, i, k = 1, 2, j = \overline{0, (n-1)}$ - заданные вещественные числа.

Решение задачи 2.3 в общем случае. Пусть, для уравнения (2.2) выполнены все условия теоремы 2.6. Подчиняя представление (2.63) условиям (2.69), применяя равенства (2.65) и (2.67), значение произвольных постоянных C_{1j}^1 и $C_{2j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$ через начальные данные находим однозначно следующим образом:

$$C_{1j}^1 = \bar{a}_{1j}^1, \quad C_{2j}^1 = \bar{a}_{2j}^1, \quad j = \overline{0, (n-1)}. \quad (2.73)$$

Эти значения, подставляя в систему (2.64) относительно произвольных постоянных C_{1j}^2 и $C_{2j}^2, j = \overline{0, (n-1)}$ имеем, соответственно, следующие треугольные с.л.а.у.:

$$\begin{aligned} I_{b_2,j}^{\alpha_2,-} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1j}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2]_{x=\bar{x}_1^0} &= \\ &= I_{b_1,j}^{\alpha_1,+} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), \bar{a}_{1j}^1, \dots, \bar{a}_{1(n-1)}^1]_{x=\bar{x}_1^0}, \\ I_{b_3,j}^{\alpha_3,-} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2j}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2]_{x=\bar{x}_2^0} &= \\ &= I_{b_2,j}^{\alpha_2,+} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), \bar{a}_{2j}^1, \dots, \bar{a}_{2(n-1)}^1]_{x=\bar{x}_2^0}, \quad j = \overline{0, (n-1)} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Из этих систем C_{1j}^2 и $C_{2j}^2, j = \overline{0, (n-1)}$ однозначно выражаются через начальные данные в условиях (2.69). Теперь, значение произвольных постоянных C_{1j}^1, C_{2j}^1 и $C_{1j}^2, C_{2j}^2, j = \overline{0, (n-1)}$, соответственно из равенств (2.73) и систем (2.74) подставляя в формулу (2.63) ($s = 0$), получим единственное решение уравнения (2.2), удовлетворяющее условиям (2.69).

Далее, в других случаях задачи 2.3 действуем аналогичным образом:

при требовании выполнения условий (2.70) применяя равенства (2.65) и (2.68) для нахождения произвольных постоянных C_{1j}^1, C_{2j}^2 имеем формулы:

$$C_{1j}^1 = \bar{b}_{1j}^1, C_{2j}^2 = (-1)^j \bar{b}_{2j}^2, \quad j = \overline{0, (n-1)} \quad (2.75)$$

и подставляя их значения отсюда в систему (2.64), для нахождения постоянных C_{1j}^2, C_{2j}^1 имеем следующие однозначно разрешимые с.л.а.у., соответственно:

$$\begin{aligned} I_{b_{2,j}}^{\alpha_{2,-}} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1j}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2]_{x=\bar{x}_1^0} &= \\ &= I_{b_{1,j}}^{\alpha_{1,+}} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), \bar{b}_{1j}^1, \dots, \bar{b}_{1(n-1)}^1]_{x=\bar{x}_1^0}, \\ I_{b_{2,j}}^{\alpha_{2,+}} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2j}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1]_{x=\bar{x}_2^0} &= \\ &= I_{b_{3,j}}^{\alpha_{3,-}} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), (-1)^j \bar{b}_{2j}^2, \dots, (-1)^{n-1} \bar{b}_{2(n-1)}^2]_{x=\bar{x}_2^0}, j = \overline{0, (n-1)}; \end{aligned} \quad (2.76)$$

при требовании выполнения условий (2.71) в силу равенств (2.66) и (2.67) для нахождения произвольных постоянных C_{1j}^2, C_{2j}^1 имеем формулы:

$$C_{1j}^2 = (-1)^j \bar{c}_{1j}^2, C_{2j}^1 = \bar{c}_{2j}^1, j = \overline{0, (n-1)}, \quad (2.77)$$

и подставляя их значения отсюда в систему (2.64), для нахождения постоянных C_{1j}^1, C_{2j}^2 имеем следующие однозначно разрешимые с.л.а.у., соответственно:

$$\begin{aligned} I_{b_{1,j}}^{\alpha_{1,+}} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1j}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1]_{x=\bar{x}_1^0} &= \\ &= I_{b_{2,j}}^{\alpha_{2,-}} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), (-1)^j \bar{c}_{1j}^2, \dots, (-1)^{n-1} \bar{c}_{1(n-1)}^2]_{x=\bar{x}_1^0}, \\ I_{b_{3,j}}^{\alpha_{3,-}} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2j}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2]_{x=\bar{x}_2^0} &= \\ &= I_{b_{2,j}}^{\alpha_{2,+}} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), \bar{c}_{2j}^1, \dots, \bar{c}_{2(n-1)}^1]_{x=\bar{x}_2^0}, \quad j = \overline{0, (n-1)}; \end{aligned} \quad (2.78)$$

при требовании выполнения условий (2.72) в силу равенств (2.66) и (2.68) для нахождения произвольных постоянных C_{1j}^2, C_{2j}^2 , имеем формулы:

$$C_{1j}^2 = (-1)^j \bar{d}_{1j}^2, \quad C_{2j}^2 = (-1)^j \bar{d}_{2j}^2, \quad j = \overline{0, (n-1)}, \quad (2.79)$$

и подставляя их значения отсюда в систему (2.64), для нахождения постоянных C_{1j}^1, C_{2j}^1 имеем следующие однозначно разрешимые с.л.а.у., соответственно:

$$\begin{aligned} I_{b_{1,j}}^{\alpha_{1,+}} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1j}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1]_{x=\bar{x}_1^0} &= \\ &= I_{b_{2,j}}^{\alpha_{2,-}} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), (-1)^j \bar{d}_{1j}^2, \dots, (-1)^{n-1} \bar{d}_{1(n-1)}^2]_{x=\bar{x}_1^0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I_{b_2, j}^{\alpha_2, +} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2j}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1]_{x=\bar{x}_2^0} = \\
& = I_{b_3, j}^{\alpha_3, -} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), (-1)^j \bar{d}_{2j}^2, \dots, (-1)^{n-1} \bar{d}_{2(n-1)}^2]_{x=\bar{x}_2^0}, j = \overline{0, (n-1)}. \quad (2.80)
\end{aligned}$$

В каждом из этих случаев, также выписываем соответствующее решение уравнения (2.2).

Подытоживая рассуждения, имеем утверждение:

Теорема 2.7. Пусть для уравнения (2.2) выполняются условия теоремы 2.6. Тогда задача 2.3 имеет единственное решение, которое в соответствии с её условиями, получается из формулы (2.63) заменой произвольных постоянных их значением из следующих формул и систем: (2.73), (2.74); (2.75), (2.76); (2.77), (2.78) и (2.79), (2.80).

Решение задачи 2.3 в случае $n = 2$. Отметим, что в случае $n = 2$ с.л.а.у. (2.64) записывается в виде

$$\begin{cases} \bar{d}_i(\bar{\mu}_i + C_{i0}^1 + \bar{k}_i C_{i1}^1) = \bar{e}_i(\bar{\lambda}_i + C_{i0}^2 + \bar{r}_i C_{i1}^2), \\ \bar{d}_i(\bar{\nu}_i + C_{i1}^1) = \bar{e}_i(\bar{\eta}_i - C_{i1}^2) \end{cases}, \quad i = 1, 2, \quad (2.81)$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{d}_i & \equiv \bar{d}_i(\bar{x}_i^0) = \exp \left[-u_{p_i^1, b_i}^{\alpha_i, +}(\bar{x}_i^0) \right], \quad \bar{e}_i \equiv \bar{e}_i(\bar{x}_i^0) = \exp \left[u_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(\bar{x}_i^0) \right], \\
\bar{k}_i & \equiv \bar{k}_i(\bar{x}_i^0) = \bar{x}_i^0 - b_i, \quad \bar{r}_i \equiv \bar{r}_i(\bar{x}_i^0) = b_{i+1} - \bar{x}_i^0, \quad \bar{d}_i, \bar{e}_i, \bar{k}_i, \bar{r}_i > 0, \\
\bar{\mu}_i & \equiv \bar{\mu}_i(\bar{x}_i^0) = \int_{b_i}^{\bar{x}_i^0} [(1 + \bar{x}_i^0 - \xi) q_i^1(\xi) + (\bar{x}_i^0 - \xi) f_i^1(\xi)] (\xi - b_i)^{-\alpha_i} \exp \left[u_{p_i^1, b_i}^{\alpha_i, +}(\xi) \right] d\xi \\
\bar{\lambda}_i & \equiv \bar{\lambda}_i(\bar{x}_i^0) = - \int_{\bar{x}_i^0}^{b_{i+1}} [(1 + \bar{x}_i^0 - \xi) q_i^2(\xi) + (\bar{x}_i^0 - \xi) f_i^2(\xi)] (b_{i+1} - \xi)^{-\alpha_{i+1}} \times \\
& \times \exp \left[-u_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(\xi) \right] d\xi, \\
\bar{\nu}_i & \equiv \bar{\nu}_i(\bar{x}_i^0) = \int_{b_i}^{\bar{x}_i^0} [q_i^1(\xi) + f_i^1(\xi)] (\xi - b_i)^{-\alpha_i} \exp \left[u_{p_i^1, b_i}^{\alpha_i, +}(\xi) \right] d\xi, \\
\bar{\eta}_i & \equiv \bar{\eta}_i(\bar{x}_i^0) = - \int_{\bar{x}_i^0}^{b_{i+1}} [q_i^2(\xi) + f_i^2(\xi)] (b_{i+1} - \xi)^{-\alpha_{i+1}} \exp \left[-u_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(\xi) \right] d\xi,
\end{aligned}$$

-известные числа.

Рассмотрим способ нахождения решения задачи 2.3 с условиями (2.69) при $n = 2$. Представление (2.63) подчиним этим условиям и применяя формулы (2.65), (2.67) для определения произвольных постоянных C_{1j}^1 , C_{2j}^1 , имеем, соответственно, равенства

$$C_{1j}^1 = \bar{a}_{1j}^1, \quad C_{2j}^1 = \bar{a}_{2j}^1, \quad j = 0, 1. \quad (2.82)$$

Найденное значение C_{1j}^1 , C_{2j}^1 подставляем в систему (2.81) и решая полученную систему для C_{1j}^2 , C_{2j}^2 имеем:

$$C_{i0}^2 = \frac{\bar{d}_i}{\bar{e}_i} \bar{a}_{i0}^1 + \frac{\bar{d}_i}{\bar{e}_i} (\bar{k}_i + \bar{r}_i) \bar{a}_{i1}^1 + \bar{A}_i, \quad C_{i1}^2 = -\frac{\bar{d}_i}{\bar{e}_i} \bar{a}_{i1}^1 + \bar{\bar{A}}_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.83)$$

$$\text{где } \bar{A}_i = \frac{\bar{d}_i}{\bar{e}_i} (\bar{\mu}_i + \bar{r}_i \bar{v}_i) - \bar{r}_i \bar{\eta}_i - \bar{\lambda}_i, \quad \bar{\bar{A}}_i = \bar{\eta}_i - \frac{\bar{d}_i}{\bar{e}_i} \bar{v}_i.$$

Значение произвольных постоянных из равенств (2.82) и (2.83) подставляя в формулу (2.63) находим единственное решение уравнения (2.2) при $n = 2$, удовлетворяющее условиям (2.69).

Подобным образом поступим при решении задачи 2.3 с другими условиями. Тогда: в случае условий (2.70) применяя равенства (2.65) и (2.68) для нахождения произвольных постоянных C_{1j}^1 , C_{2j}^2 , имеем формулы:

$$C_{10}^1 = \bar{b}_{10}^1, \quad C_{11}^1 = \bar{b}_{11}^1; \quad C_{20}^2 = \bar{b}_{20}^2, \quad C_{21}^2 = -\bar{b}_{21}^2, \quad (2.84)$$

и подставляя эти пары в соответствующую систему из (2.81) находим произвольные постоянные C_{1j}^2 , C_{2j}^1 следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{10}^2 &= \frac{\bar{d}_1}{\bar{e}_1} \bar{b}_{10}^1 + \frac{\bar{d}_1}{\bar{e}_1} (\bar{k}_1 + \bar{r}_1) \bar{b}_{11}^1 + \bar{A}_1, & C_{11}^2 &= -\frac{\bar{d}_1}{\bar{e}_1} \bar{b}_{11}^1 + \bar{\bar{A}}_1; \\ C_{20}^1 &= \frac{\bar{e}_2}{\bar{d}_2} \bar{b}_{20}^2 - \frac{\bar{e}_2}{\bar{d}_2} (\bar{k}_2 + \bar{r}_2) \bar{b}_{21}^2 + \bar{B}_2, & C_{21}^1 &= \frac{\bar{e}_2}{\bar{d}_2} \bar{b}_{21}^2 + \bar{\bar{B}}_2, \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\text{где } \bar{B}_i = \frac{\bar{e}_i}{\bar{d}_i} (\bar{\lambda}_i - \bar{k}_i \bar{\eta}_i) + \bar{k}_i \bar{v}_i - \bar{\mu}_i, \quad \bar{\bar{B}}_i = \frac{\bar{e}_i}{\bar{d}_i} \bar{\eta}_i - \bar{v}_i;$$

в случае условий (2.71) применяя характеристические равенства (2.66) и (2.67) произвольные постоянные C_{1j}^2 , C_{2j}^1 определим так:

$$C_{10}^2 = \bar{c}_{10}^2, \quad C_{11}^2 = -\bar{c}_{11}^2; \quad C_{20}^1 = \bar{c}_{20}^1, \quad C_{21}^1 = \bar{c}_{21}^1 \quad (2.86)$$

после подставляя их значение в соответствующую систему из (2.81), находим

произвольные постоянные C_{1j}^1, C_{2j}^2 равенствами

$$\begin{aligned} C_{10}^1 &= \frac{\bar{e}_1}{\bar{d}_1} \bar{c}_{10}^2 - \frac{\bar{e}_1}{\bar{d}_1} (\bar{k}_1 + \bar{r}_1) \bar{c}_{11}^2 + \bar{B}_1, & C_{11}^1 &= \frac{\bar{e}_1}{\bar{d}_1} \bar{c}_{11}^2 + \bar{B}_1, \\ C_{20}^2 &= \frac{\bar{d}_2}{\bar{e}_2} \bar{c}_{20}^1 - \frac{\bar{d}_2}{\bar{e}_2} (\bar{k}_1 + \bar{r}_1) \bar{c}_{21}^1 + \bar{A}_2, & C_{21}^2 &= -\frac{\bar{d}_2}{\bar{e}_2} \bar{c}_{21}^1 + \bar{A}_2; \end{aligned} \quad (2.87)$$

в случае условий (2.72) применяя характеристические равенства (2.66) и (2.68) произвольные постоянные C_{1j}^2, C_{2j}^2 определим равенствами:

$$C_{10}^2 = -\bar{d}_{10}^2, \quad C_{11}^2 = -\bar{d}_{11}^2, \quad C_{20}^2 = \bar{d}_{20}^2, \quad C_{21}^2 = -\bar{d}_{21}^2, \quad (2.88)$$

далее, подставим эти значения в систему (2.81) и из полученной системы произвольные постоянные C_{1j}^1, C_{2j}^1 находим так:

$$\begin{aligned} C_{11}^1 &= \frac{\bar{e}_1}{\bar{d}_1} \bar{d}_{10}^2 - \frac{\bar{e}_1}{\bar{d}_1} (\bar{k}_1 + \bar{r}_1) \bar{d}_{11}^2 + \bar{B}_1, & C_{11}^1 &= \frac{\bar{e}_1}{\bar{d}_1} \bar{d}_{11}^2 + \bar{B}_1, \\ C_{20}^1 &= \frac{\bar{e}_2}{\bar{d}_2} \bar{d}_{20}^2 - \frac{\bar{e}_2}{\bar{d}_2} (\bar{k}_2 + \bar{r}_2) \bar{d}_{21}^2 + \bar{B}_2, & C_{21}^1 &= \frac{\bar{e}_2}{\bar{d}_2} \bar{d}_{21}^2 + \bar{B}_2. \end{aligned} \quad (2.89)$$

В каждом из этих случаев также выписываем соответствующее решение задачи 2.3.

Теорема 2.8. Пусть в уравнении (2.2) $n = 2$ и выполняются условия теоремы 2.6. Тогда, оно имеет единственное решение, подчиняющееся группе условий (2.69), (2.70), (2.71) или (2.72), которое выражается формулой

$$y(x) = \Omega_{(\alpha),(b)}^{(2)}[p(x), q(x), f(x), C_{10}^1, C_{11}^1; C_{10}^2, C_{11}^2; C_{20}^1, C_{21}^1; C_{20}^2, C_{21}^2],$$

где постоянные $C_{ij}^1, C_{ij}^2, j = 0, 1, i = 1, 2$ определяются, соответственно, группами формул (2.82), (2.83); (2.84), (2.85); (2.86), (2.87) и (2.88), (2.89).

Задача 2.4 (задача типа линейного сопряжения). Требуется найти решение уравнения (2.2), подчиняющееся следующей системе условий:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_1+0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_2-0} + \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_2+0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_3-0} = \varepsilon_k, \\ & k = \overline{1, 2n}, \end{aligned} \quad (2.90)$$

где b_{kj} и $\varepsilon_k, k = \overline{1, 2n}, j = \overline{0, (4n-1)}$ - заданные действительные числа.

Решение задачи 2.4 в общем случае. Считая выполненными условия теоремы 2.6 представление (2.63) подчиним условиям (2.90). Тогда, применяя характеристические равенства (2.65) - (2.68), относительно $4n$ неизвестных C_{ij}^1 , C_{ij}^2 , $j = \overline{0, (n-1)}$, $i = 1, 2$, получим следующую с.л.а.у. с $2n$ уравнениями:

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} C_{1j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} (-1)^j C_{1j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} C_{2j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} (-1)^j C_{2j}^2 = \varepsilon_k$$

$$k = \overline{1, 2n}, \quad (2.91)$$

К полученным уравнениям присоединим автоматически выполняющиеся для представления (2.63) с.л.а.у. (2.64):

$$I_{bi,s}^{\alpha_i,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1]_{x=\bar{x}_i^0} =$$

$$= I_{bi+1,s}^{\alpha_{i+1},-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2]_{x=\bar{x}_i^0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad i = 1, 2. \quad (2.92)$$

Пользуясь системами (2.92) систему (2.91) четырьмя способами можно преобразовать к эквивалентной ей, вместе с (2.92) с.л.а.у. из $2n$ уравнений, относительно двух групп, состоящих из $2n$ неизвестных C_{ij}^1 , C_{ij}^2 , $j = \overline{0, (n-1)}$, $i = 1, 2$, соответствующих к разным промежуткам Γ_i . Этот процесс осуществляется дословным повторением действий, выполненных при исследовании задачи типа линейного сопряжения 2.2 в разделе 2.2, поэтому получаемые в результате системы обозначим также как и там: с неизвестными C_{1j}^1 и C_{2j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$ через (2.91а); с неизвестными C_{1j}^1 и C_{2j}^2 , $j = \overline{0, (n-1)}$ через (2.91б); с неизвестными C_{1j}^2 и C_{2j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$ через (2.91в); с неизвестными C_{1j}^2 и C_{2j}^2 , $j = \overline{0, (n-1)}$ через (2.91г). Каждая из с.л.а.у. (2.91а), (2.91б), (2.91в) и (2.91г) в паре с (2.92) будет эквивалентной с с.л.а.у. (2.91), (2.92), поэтому все они эквивалентны между собой.

Исследуя системы (2.91а), (2.91б), (2.91в), (2.91г) приходим к следующему общему заключению о разрешимости задачи 2.4:

Теорема 2.9. Пусть для уравнения (2.2) выполнены условия теоремы 2.6, а в системе (2.91а), (2.91б), (2.91в) или (2.91г) основная и расширенная матрицы имеют ранг, соответственно, равный r и ρ .

1) Если $r = \rho = 2n$, тогда задача 2.4 имеет единственное решение, которое получается из формулы (2.63) заменой в нём произвольных постоянных решением одной из систем (2.91а), (2.91б), (2.91в) и (2.91г), рассматриваемой вместе с системой (2.92);

2) Если $r = \rho < 2n$, тогда задача 2.4 имеет бесконечно много решений и её общее решение выражается через решения одной из систем (2.91а), (2.91б), (2.91в) и (2.91г), рассматриваемой вместе с системой (2.92), формулой (2.63), зависящей от $2n - r$ произвольных постоянных;

3) Если $r < 2n$, $r \neq \rho$, тогда каждая из систем (2.91а), (2.91б), (2.91в) (2.91г) вместе с системой (2.92) несовместна, и задача 2.4 не имеет решения.

Решение задачи 2.4 в случае $n = 2$. В этом случае система (2.92) записывается в виде (2.81).

Случай 1. Рассмотрим случай, когда система (2.81) заменяется равносильной системой вида

$$\left\{ C_{i0}^2 = \frac{\bar{d}_i}{\bar{e}_i} [C_{i0}^1 + (\bar{k}_i + \bar{r}_i) C_{i1}^1] + \bar{A}_i, \quad C_{i1}^2 = -\frac{\bar{d}_i}{\bar{e}_i} C_{i1}^1 + \bar{A}_i, \quad i = 1, 2. \right. \quad (2.93)$$

Систему (2.91), которая при $n = 2$ имеет 8 неизвестных, рассмотрим вместе с равенствами (2.93). В этой системе неизвестные C_{i0}^2, C_{i1}^2 заменяем их выражением из равенств (2.93). Тогда получим с.л.а.у., равносильной системе (2.91) вместе с (2.93):

$$\bar{m}_{k0}^1 C_{10}^1 + \bar{m}_{k1}^1 C_{11}^1 + \bar{n}_{k0}^1 C_{20}^1 + \bar{n}_{k1}^1 C_{21}^1 = \bar{l}_k^1, \quad k = \overline{1, 4}, \quad (2.94)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{m}_{k0}^1 &= b_{k0} + b_{k2} \frac{\bar{d}_1}{\bar{e}_1}, & \bar{m}_{k1}^1 &= b_{k1} + \frac{\bar{d}_1}{\bar{e}_1} [b_{k2}(\bar{k}_1 + \bar{r}_1) + b_{k3}], & \bar{n}_{k0}^1 &= b_{k4} + b_{k6} \frac{\bar{d}_2}{\bar{e}_2}, \\ \bar{n}_{k1}^1 &= b_{k5} + \frac{\bar{d}_2}{\bar{e}_2} [b_{k6}(\bar{k}_2 + \bar{r}_2) + b_{k7}], & \bar{l}_k^1 &= \varepsilon_k - b_{k2} \bar{A}_1 + b_{k3} \bar{A}_1 - b_{k6} \bar{A}_2 + b_{k7} \bar{A}_2. \end{aligned}$$

Пусть, в условиях (2.90) числа b_{kj} и ε_k , $k = \overline{1, 4}$, $j = \overline{0, 7}$ такие, что детерминант $\bar{\Delta}_{11} = \left| \begin{matrix} \bar{m}_{k0}^1 & \bar{m}_{k1}^1 & \bar{n}_{k0}^1 & \bar{n}_{k1}^1 \\ k = \overline{1, 4} \end{matrix} \right|$ отличен от нуля. Тогда ранг системы (2.94)

есть $r = 4$ и её единственное решение будет

$$C_{i0}^1 = \frac{\bar{\Delta}_{11}^{i0}}{\bar{\Delta}_{11}}, \quad C_{i1}^1 = \frac{\bar{\Delta}_{11}^{i1}}{\bar{\Delta}_{11}}, \quad i = 1, 2, \quad (2.95)$$

где детерминант $\bar{\Delta}_{11}^{ij}$ получается из детерминанта $\bar{\Delta}_{11}$, если вместо столбца, соответствующего неизвестному C_{ij}^1 , $i = 1, 2$, $j = 0, 1$ поставить столбец правой части системы (2.94). Значение неизвестных C_{ij}^1 из (2.95) поставим в системы (2.93), откуда находим неизвестные C_{ij}^2 , $i = 1, 2$, $j = 0, 1$ так:

$$C_{i0}^2 = \frac{\bar{d}_i \bar{\Delta}_{11}^{i0}}{\bar{e}_i \bar{\Delta}_{11}} + (\bar{k}_i + \bar{r}_i) \frac{\bar{d}_i \bar{\Delta}_{11}^{i1}}{\bar{e}_i \bar{\Delta}_{11}} + \bar{A}_i, \quad C_{i1}^2 = -\frac{\bar{d}_i \bar{\Delta}_{11}^{i1}}{\bar{e}_i \bar{\Delta}_{11}} + \bar{A}_i, \quad i = 1, 2. \quad (2.96)$$

Найденное значение неизвестных из равенств (2.95) и (2.96) поставляя в представление (2.63), получим единственное решение задачи 2.4.

Замечание 2.6. Пусть, детерминант $\bar{\Delta}_{11}$ равно нулю. Тогда ранг основной матрицы системы (2.94) $r < 4$, и оно может, равняться рангу ρ расширенной матрицы или нет. В случае $r = \rho$ система (2.94) имеет бесконечно много решений, определяемых $4 - r$ произвольными постоянными. Тогда и задача 2.4 имеет бесконечно много решений, выражаемых решениями системы (2.94), (2.93) формулой (2.63), зависящей от $4 - r$ произвольных постоянных. В случае $r \neq \rho$ система (2.94) несовместна, поэтому система (2.94), (2.93) также несовместна, а тогда и задача 2.4 не имеет решения.

Случай 2. В этом случае систему (2.81) запишем в виде

$$\begin{cases} C_{10}^2 = \frac{\bar{d}_1}{\bar{e}_1} C_{10}^1 + \frac{\bar{d}_1}{\bar{e}_1} (\bar{k}_1 + \bar{r}_1) C_{11}^1 + \bar{A}_1, & C_{11}^2 = -\frac{\bar{d}_1}{\bar{e}_1} C_{11}^1 + \bar{A}_1, \\ C_{20}^1 = \frac{\bar{e}_2}{\bar{d}_2} C_{20}^2 + \frac{\bar{e}_2}{\bar{d}_2} (\bar{k}_2 + \bar{r}_2) C_{21}^2 + \bar{B}_2, & C_{21}^1 = -\frac{\bar{e}_2}{\bar{d}_2} C_{21}^2 + \bar{B}_2. \end{cases} \quad (2.97)$$

Систему (2.97) присоединим к системе (2.91). В последней системе вместо переменных C_{1j}^2 , C_{2j}^1 , $j = 0, 1$ поставим их выражения из равенств (2.97). Тогда получим следующую с.л.а.у., равносильной в паре с системой (2.97) системе (2.91), (2.97):

$$\bar{m}_{k0}^1 C_{10}^1 + \bar{m}_{k1}^1 C_{11}^1 + \bar{n}_{k0}^2 C_{20}^2 + \bar{n}_{k1}^2 C_{21}^2 = \bar{l}_k^2, \quad k = \overline{1, 4}, \quad (2.98)$$

где $\bar{m}_{k0}^1$, $\bar{m}_{k1}^1$ - известные числа из предыдущего случая 1, а

$$\bar{n}_{k0}^2 = b_{k4} \frac{\bar{e}_2}{\bar{d}_2} + b_{k6}, \quad \bar{n}_{k1}^2 = \frac{\bar{e}_2}{\bar{d}_2} [b_{k4}(\bar{k}_2 + \bar{r}_2) - b_{k5}] - b_{k7},$$

$$\bar{l}_k^2 = \varepsilon_k - \bar{A}_1 b_{k2} + b_{k3} \bar{A}_1 - b_{k4} \bar{B}_2 - b_{k5} \bar{B}_2, \quad k = \overline{1,4}.$$

Пусть детерминант $\bar{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} \bar{m}_{k0}^1 & \bar{m}_{k1}^1 & \bar{n}_{k0}^2 & \bar{n}_{k1}^2 \\ k = \overline{1,4} \end{vmatrix}$ не равно нулю. Тогда ранг системы (2.98) будет, $r = 4$ и единственное её решение дается формулами

$$C_{1j}^1 = \frac{\bar{\Delta}_{12}^{1j}}{\bar{\Delta}_{12}}, \quad C_{2j}^2 = \frac{\bar{\Delta}_{12}^{2j}}{\bar{\Delta}_{12}}, \quad j = 0,1. \quad (2.99)$$

Здесь детерминанты $\bar{\Delta}_{12}^{1j}$, $\bar{\Delta}_{12}^{2j}$, $j = 0,1$ находятся из детерминанта $\bar{\Delta}_{12}$ заменой столбца, соответствующего в системе (2.98) переменным C_{1j}^1 , C_{2j}^2 , $j = 0,1$, столбцом правой части этой системы. Теперь в системе (2.97) неизвестные C_{1j}^1 , C_{2j}^2 , $j = 0,1$ заменим их значением из формул (2.99) и, имеем:

$$\begin{aligned} C_{10}^2 &= \frac{\bar{d}_1}{\bar{e}_1} \frac{\bar{\Delta}_{12}^{10}}{\bar{\Delta}_{12}} + \frac{\bar{d}_1}{\bar{e}_1} \frac{\bar{\Delta}_{12}^{11}}{\bar{\Delta}_{12}} (\bar{k}_1 + \bar{r}_1) + \bar{A}_1, & C_{11}^2 &= -\frac{\bar{d}_1}{\bar{e}_1} \frac{\bar{\Delta}_{12}^{11}}{\bar{\Delta}_{12}} + \bar{A}_1, \\ C_{20}^1 &= \frac{\bar{e}_2}{\bar{d}_2} \frac{\bar{\Delta}_{12}^{20}}{\bar{\Delta}_{12}} + \frac{\bar{e}_2}{\bar{d}_2} \frac{\bar{\Delta}_{12}^{21}}{\bar{\Delta}_{12}} (\bar{k}_2 + \bar{r}_2) + \bar{B}_2, & C_{21}^1 &= -\frac{\bar{e}_2}{\bar{d}_2} \frac{\bar{\Delta}_{12}^{21}}{\bar{\Delta}_{12}} + \bar{B}_2. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Далее, используя данные из равенств (2.99), (2.100), по формуле (2.63) находим решение задачи 2.4.

Случай 3. Систему (2.81) переписав в виде

$$\begin{cases} C_{10}^1 = \frac{\bar{e}_1}{\bar{d}_1} C_{10}^2 + \frac{\bar{e}_1}{\bar{d}_1} (\bar{k}_1 + \bar{r}_1) C_{11}^2 + \bar{B}_1, & C_{11}^1 = -\frac{\bar{e}_1}{\bar{d}_1} C_{11}^2 + \bar{B}_1 \\ C_{20}^2 = \frac{\bar{d}_2}{\bar{e}_2} C_{20}^1 + \frac{\bar{d}_2}{\bar{e}_2} (\bar{k}_2 + \bar{r}_2) C_{21}^1 + \bar{A}_2, & C_{21}^2 = -\frac{\bar{d}_2}{\bar{e}_2} C_{21}^1 + \bar{A}_2, \end{cases} \quad (2.101)$$

рассмотрим ее вместе с системой (2.91). В системе (2.91) переменные C_{1j}^1 , C_{2j}^2 , $j = 0,1$ заменим их значением из равенств (2.101). Тогда получим, равносильную системе (2.91) в связке с (2.101), следующую с.л.а.у. относительно переменных C_{1j}^2 , C_{2j}^1 , $j = 0,1$:

$$\bar{m}_{k0}^2 C_{10}^2 + \bar{m}_{k1}^2 C_{11}^2 + \bar{n}_{k0}^1 C_{20}^1 + \bar{n}_{k1}^1 C_{21}^1 = \bar{l}_k^3, \quad k = \overline{1,4}, \quad (2.102)$$

где $\bar{m}_{k0}^2 = b_{k0} \frac{\bar{e}_1}{\bar{d}_1} + b_{k2}$, $\bar{m}_{k1}^2 = \frac{\bar{e}_1}{\bar{d}_1} [b_{k0}(\bar{k}_1 + \bar{r}_1) - b_{k1}] - b_{k3}$, $\bar{n}_{k0}^1$, $\bar{n}_{k1}^1$ - известные

числа, введенные в случае 1, а $\bar{l}_k^3 = \varepsilon_k - b_{k0}\bar{B}_1 - b_{k1}\bar{\bar{B}}_1 - b_{k6}\bar{A}_2 + b_{k7}\bar{\bar{A}}_2$.

Пусть определитель $\bar{\Delta}_{21} = \begin{vmatrix} \bar{m}_{k0}^2 & \bar{m}_{k1}^2 & \bar{n}_{k0}^1 & \bar{n}_{k1}^1 \\ k = \overline{1,4} \end{vmatrix}$ не равно нулю. Тогда ранг системы (2.102) есть, $r = 4$ и её единственное решение дается формулами

$$C_{1j}^2 = \frac{\bar{\Delta}_{21}^{1j}}{\bar{\Delta}_{21}}, \quad C_{2j}^1 = \frac{\bar{\Delta}_{21}^{2j}}{\bar{\Delta}_{21}}, \quad j = 0,1, \quad (2.103)$$

где определители $\bar{\Delta}_{21}^{1j}$, $\bar{\Delta}_{21}^{2j}$ находятся из определителя $\bar{\Delta}_{21}$ путем замены столбцов, соответствующих в системе (2.102) переменным C_{1j}^2, C_{2j}^1 , $j = 0,1$ столбцом правой части этой системы. Далее, по известным значениям переменных C_{1j}^2, C_{2j}^1 , $j = 0,1$, из равенств (2.101) переменные C_{1j}^1, C_{2j}^2 , $j = 0,1$ находим так:

$$\begin{aligned} C_{10}^1 &= \frac{\bar{e}_1}{\bar{d}_1} \frac{\bar{\Delta}_{21}^{10}}{\bar{\Delta}_{21}} + \frac{\bar{e}_1}{\bar{d}_1} (\bar{k}_1 + \bar{r}_1) \frac{\bar{\Delta}_{21}^{11}}{\bar{\Delta}_{21}} + \bar{B}_1, \quad C_{11}^1 = -\frac{\bar{e}_1}{\bar{d}_1} \frac{\bar{\Delta}_{21}^{11}}{\bar{\Delta}_{21}} + \bar{\bar{B}}_1, \\ C_{20}^2 &= \frac{\bar{d}_2}{\bar{e}_2} \frac{\bar{\Delta}_{21}^{20}}{\bar{\Delta}_{21}} + \frac{\bar{d}_2}{\bar{e}_2} (\bar{k}_2 + \bar{r}_2) \frac{\bar{\Delta}_{21}^{21}}{\bar{\Delta}_{21}} + \bar{A}_2, \quad C_{21}^2 = -\frac{\bar{d}_2}{\bar{e}_2} \frac{\bar{\Delta}_{21}^{21}}{\bar{\Delta}_{21}} + \bar{\bar{A}}_2 \end{aligned} \quad (2.104)$$

Подставляя значение произвольных постоянных из формул (2.103) и (2.104), в представление (2.63), получим решение задачи 2.4.

Случай 4. В этом случае систему (2.81) перепишем в виде

$$\begin{cases} C_{10}^1 = \frac{e_1}{d_1} C_{10}^2 + \frac{e_1}{d_1} (k_1 + r_1) C_{11}^2 + B_1, & C_{11}^1 = -\frac{e_1}{d_1} C_{11}^2 + \bar{B}_1 \\ C_{20}^1 = \frac{e_2}{d_2} C_{20}^2 + \frac{e_2}{d_2} (k_2 + r_2) C_{21}^2 + B_2, & C_{21}^1 = -\frac{e_2}{d_2} C_{21}^2 + \bar{\bar{B}}_2, \end{cases} \quad (2.105)$$

и систему (2.91) рассмотрим вместе с ней. Пользуясь равенствами (2.105), систему (2.91) преобразуем в следующую, равносильную ей вместе с (2.105), с.л.а.у.:

$$\bar{m}_{k0}^2 C_{10}^2 + \bar{m}_{k1}^2 C_{11}^2 + \bar{n}_{k0}^2 C_{20}^2 + \bar{n}_{k1}^2 C_{21}^2 = \bar{l}_k^4, \quad k = \overline{1,4}, \quad (2.106)$$

где $\bar{m}_{k0}^2, \bar{m}_{k1}^2$ и $\bar{n}_{k0}^2, \bar{n}_{k1}^2$ известные числа, введенные, соответственно, в случаях 3 и 2, а $\bar{l}_k^4 = \varepsilon_k - \bar{B}_1 b_{k0} - \bar{\bar{B}}_1 b_{k1} - b_{k4} \bar{B}_2 - b_{k5} \bar{\bar{B}}_2$.

Пусть детерминант $\bar{\Delta}_{22} = \begin{vmatrix} \bar{m}_{k0}^2 & \bar{m}_{k1}^2 & \bar{n}_{k0}^2 & \bar{n}_{k1}^2 \\ k = \overline{1,4} \end{vmatrix}$ не равно нулю. Тогда ранг

системы (2.106) будет $r = 4$ и единственное её решение есть:

$$C_{1j}^2 = \frac{\bar{\Delta}_{22}^{1j}}{\bar{\Delta}_{22}}, \quad C_{2j}^2 = \frac{\bar{\Delta}_{22}^{2j}}{\bar{\Delta}_{22}}, \quad j = 0, 1, \quad (2.107)$$

где определители $\bar{\Delta}_{22}^{1j}$, $\bar{\Delta}_{22}^{2j}$ находятся из определителя $\bar{\Delta}_{22}$ путем замены столбцов, соответствующих в системе (2.106) неизвестным C_{1j}^2 , C_{2j}^2 , $j = 0, 1$, столбцом правой части этой системы. Теперь, используя равенства (2.107) из равенств (2.105), находим значение неизвестных C_{1j}^1 , C_{2j}^1 , $j = 0, 1$ в виде

$$\begin{aligned} C_{10}^1 &= \frac{\bar{e}_1}{\bar{d}_1} \frac{\bar{\Delta}_{22}^{10}}{\bar{\Delta}_{22}} + \frac{\bar{e}_1}{\bar{d}_1} (\bar{k}_1 + \bar{r}_1) \frac{\bar{\Delta}_{22}^{11}}{\bar{\Delta}_{22}} + \bar{B}_1, & C_{11}^1 &= -\frac{\bar{e}_1}{\bar{d}_1} \frac{\bar{\Delta}_{22}^{11}}{\bar{\Delta}_{22}} + \bar{B}_1 \\ C_{20}^1 &= \frac{\bar{e}_2}{\bar{d}_2} \frac{\bar{\Delta}_{22}^{20}}{\bar{\Delta}_{22}} + \frac{\bar{e}_2}{\bar{d}_2} (\bar{k}_2 + \bar{r}_2) \frac{\bar{\Delta}_{22}^{21}}{\bar{\Delta}_{22}} + \bar{B}_2, & C_{21}^1 &= -\frac{\bar{e}_2}{\bar{d}_2} \frac{\bar{\Delta}_{22}^{21}}{\bar{\Delta}_{22}} + \bar{B}_2. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Наконец, внося значение произвольных постоянных по равенствам (2.107), (2.108) в формулу (2.63), получим единственное решение задачи 2.4.

Замечание 2.7. Утверждения, подобные приведённым в замечании 2.6 утверждениям, справедливы и для случаев 2 - 4 решения задачи 2.4.

Замечание 2.8. Из проведённых выше рассуждений следует, что системы (2.94), (2.98), (2.102) и (2.106), взятые вместе с системой (2.81) эквивалентны между собой, так как все они эквивалентны системе (2.91), (2.81).

Таким образом, доказано следующее утверждение о разрешимости задачи 2.4 при $n = 2$:

Теорема 2.10. Пусть в уравнении (2.2) $n = 2$ и выполняются условия теоремы 2.6.

1) Если детерминант $\bar{\Delta}_{11}$, $\bar{\Delta}_{12}$, $\bar{\Delta}_{21}$, или $\bar{\Delta}_{22}$ не равен нулю, то ранг r основной матрицы систем (2.94), (2.98), (2.102) и (2.106) равен рангу ρ их расширенной матрицы, $r = \rho = 4$ и задача 2.4 имеет единственное решение, выражающееся формулой

$$y(x) = \Omega_{(\alpha),(b)}^{(2)}[p(x), q(x), f(x), C_{10}^1, C_{11}^1; C_{10}^2, C_{11}^2; C_{20}^1, C_{21}^1; C_{20}^2, C_{21}^2], \quad (2.109)$$

где постоянные C_{ij}^1 , C_{ij}^2 , $j = 0, 1$, $i = 1, 2$ определяются одной из следующих групп формул (2.95), (2.96); (2.99), (2.100); (2.103), (2.104) или (2.107), (2.108).

2) Если детерминант $\bar{\Delta}_{11}$, $\bar{\Delta}_{12}$, $\bar{\Delta}_{21}$ или $\bar{\Delta}_{22}$ равен нулю, то $r < 4$. При этом,

когда $r = \rho$ каждая из систем (2.94), (2.98), (2.102) и (2.106) и поэтому система (2.91), (2.81) имеет бесконечно много решений, их общее решение зависит от $4 - r$ произвольных постоянных, тогда и задача 2.4 имеет бесконечно много решений, выражаемых через решения системы (2.91), (2.81) формулой (2.109), зависящей от $4 - r$ произвольных постоянных, а когда $r \neq \rho$ системы (2.94), (2.98), (2.102) и (2.106) несовместны, поэтому система (2.91), (2.81) также несовместна и задача 2.4 не имеет решения.

2.5. Пример

Найти общее решение уравнения

$$A_{(1),(b)}^2 y = \frac{f(x)}{|x||x-1||x-2|}, \quad x \in (0; 1) \cup (1; 2) \quad (2.110)$$

$$\text{где } A_{(1),(b)} y \equiv y' + \frac{p(x)}{|x||x-1||x-2|} y - \frac{q(x)}{|x||x-1||x-2|},$$

$$p(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } x \in (0; 1) \\ x+2 & \text{при } x \in (1; 2) \end{cases}, \quad q(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2}(1-x)^3 & \text{при } x \in (0; 1) \\ (2-x)^3 & \text{при } x \in (1; 2) \end{cases},$$

$$f(x) = \begin{cases} -2\sqrt{2}(1-x)^3 & \text{при } x \in (0; 1) \\ -(2-x)^3 & \text{при } x \in (1; 2) \end{cases}$$

и выделить решение, удовлетворяющее следующей системе условий:

$$\begin{cases} [\sqrt{x}y(x)]_{x=+0} + 2[\sqrt{x}A_{(1),(b)}y]_{x=+0} + c[(x-1)^3A_{(1),(b)}y]_{x=1+0} + \\ + d[(2-x)^{-2}A_{(1),(b)}y]_{x=2-0} = 1 \\ -[\sqrt{x}A_{(1),(b)}y]_{x=+0} - [(x-1)^3y(x)]_{x=1+0} + [(x-1)^3A_{(1),(b)}y]_{x=1+0} = 0 \\ -[\sqrt{x}y(x)]_{x=+0} - 2[\sqrt{x}A_{(1),(b)}y]_{x=+0} + [(x-1)^3A_{(1),(b)}y]_{x=1+0} = 0 \\ c[(x-1)^3y(x)]_{x=1+0} + d[(2-x)^{-2}y(x)]_{x=2-0} = -1 \end{cases} \quad (2.111)$$

где $c > 0$, $d > 0$ - известные вещественные числа.

Данное уравнение имеет вид (2.1) с двумя граничными $b_1 = 0$, $b_3 = 2$ и одной внутренней, $b_2 = 1$ сингулярными точками. Условия теоремы 2.1 для него выполняются.

Общее решение уравнения на основании представления (2.11) имеет вид:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}(1-x)^2}{\sqrt{x(2-x)^3}} \left[\sqrt{x(2-x)} - 2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2-x}{x}} + \pi + C_{10}^1 + C_{11}^1 x \right] & \text{при } x \in (0; x_1^0] \\ \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x(2-x)^3}} \left[C_{10}^2 + C_{11}^2(1-x) - 2\sqrt{2} \left(\frac{2-\pi}{2} - \sqrt{x(2-x)} + 2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2-x}{x}} \right) \right] & \text{при } x \in [x_1^0; 1) \\ \frac{x(2-x)^2}{(x-1)^3} \left[x - 2\ln x - \frac{1}{x} + C_{20}^1 + C_{21}^1(x-1) \right] & \text{при } x \in (1; x_2^0] \\ \frac{x(2-x)^2}{2(x-1)^3} \left[C_{20}^2 + C_{21}^2(2-x) - 3 + 2x + \ln \frac{16}{x^4} - \frac{2}{x} \right] & \text{при } x \in [x_2^0; 2). \end{cases} \quad (2.112)$$

Действие оператора $A_{(1),(b)}$ к этой функции приводит нас к следующей формуле:

$$A_{(1),(b)}y = \begin{cases} C_{11}^1 \frac{2\sqrt{2}(1-x)^2}{\sqrt{x(2-x)^3}} & \text{при } x \in (0; x_1^0]; \\ -C_{11}^2 \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x(2-x)^3}} & \text{при } x \in [x_1^0; 1) \\ C_{21}^1 \frac{x(2-x)^2}{(x-1)^3} & \text{при } x \in (1; x_2^0]; \\ -C_{21}^2 \frac{x(2-x)^2}{2(x-1)^3} & \text{при } x \in [x_2^0; 2). \end{cases} \quad (2.113)$$

В формулах (2.112) и (2.113) x_1^0 , $0 < x_1^0 < 1$ и x_2^0 , $1 < x_2^0 < 2$ - фиксированные точки, а C_{ij}^1 , C_{ij}^2 - произвольные постоянные, пары из которых соответствующие значениям $i = 1$ и $i = 2$, однозначно связаны при помощи следующих с.л.а.у.:

$$\begin{cases} d_i(\mu_i + C_{i0}^1 + k_i C_{i1}^1) = e_i(\lambda_i + C_{i0}^2 + r_i C_{i1}^2), \\ d_i C_{i1}^1 = -e_i C_{i1}^2 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \quad (2.114)$$

$$\text{где } d_1 = \frac{2\sqrt{2}(1-x_1^0)^2}{\sqrt{x_1^0(2-x_1^0)^3}}, \quad e_1 = \frac{(1-x_1^0)^2}{\sqrt{x_1^0(2-x_1^0)^3}}, \quad d_2 = \frac{x_2^0(2-x_2^0)^2}{(x_2^0-1)^3}, \quad e_2 = \frac{x_2^0(2-x_2^0)^2}{2(x_2^0-1)^3},$$

$$\mu_1 = \sqrt{x_1^0(2-x_1^0)} - 2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2-x_1^0}{x_1^0}} + \pi, \quad \lambda_1 = -2\sqrt{2} \left(\frac{2-\pi}{2} - \sqrt{x_1^0(2-x_1^0)} + 2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2-x_1^0}{x_1^0}} \right),$$

$$\mu_2 = x_2^0 - 2\ln x_2^0 - \frac{1}{x_2^0}, \quad \lambda_2 = -3 + 2x_2^0 + \ln \frac{16}{x_2^{04}} - \frac{2}{x_2^0},$$

$$k_1 = x_1^0, \quad r_1 = 1 - x_1^0, \quad k_2 = x_2^0 - 1, \quad r_2 = 2 - x_2^0.$$

Выделим решение, удовлетворяющее условиям (2.111). Представления

(2.112) и (2.113) подчиняя условиям (2.111) приходим к следующей с.л.а.у. для нахождения произвольных постоянных:

$$\begin{cases} C_{10}^1 + 2C_{11}^1 + cC_{21}^1 - dC_{21}^2 = 1 \\ -C_{11}^1 - C_{20}^1 + C_{21}^1 = 0 \\ -C_{10}^1 - 2C_{11}^1 + C_{21}^1 = 0 \\ cC_{20}^1 + dC_{20}^2 = -1 \end{cases} \quad (2.115)$$

Здесь неизвестные C_{20}^2 , C_{21}^2 заменяем следующими их выражениями через неизвестные C_{20}^1 , C_{21}^1 из систем (2.114):

$$\begin{cases} C_{10}^2 = \frac{d_1}{e_1} [C_{10}^1 + (k_1 + r_1)C_{11}^1] + A_1, C_{11}^2 = -\frac{d_1}{e_1} C_{11}^1 \\ C_{20}^2 = \frac{d_2}{e_2} [C_{20}^1 + (k_2 + r_2)C_{21}^1] + A_2, C_{21}^2 = -\frac{d_2}{e_2} C_{21}^1, \end{cases} \quad (2.116)$$

где $A_i = \frac{d_i}{e_i} \mu_i - \lambda_i$. Тогда относительно неизвестных C_{i0}^1 , C_{i1}^1 , $i = 1, 2$ имеем систему:

$$\begin{cases} C_{10}^1 + 2C_{11}^1 + \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right) C_{21}^1 = 1 \\ -C_{11}^1 - C_{20}^1 + C_{21}^1 = 0 \\ -C_{10}^1 - 2C_{11}^1 + C_{21}^1 = 0 \\ \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right) C_{20}^1 + d \frac{d_2}{e_2} (k_2 + r_2) C_{21}^1 = -1 - dA_2. \end{cases} \quad (2.117)$$

Определитель системы (2.117) есть $\Delta_{11} = \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right) + \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right)^2 > 0$, поэтому она имеет единственное решение

$$\begin{aligned} C_{10}^1 &= -\frac{2 + 3c + 5d \frac{d_2}{e_2} + 2dA_2 \left(1 + c + d \frac{d_2}{e_2}\right)}{c + d \frac{d_2}{e_2} + \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right)^2}, \\ C_{11}^1 &= \frac{1 + 2c + 3d \frac{d_2}{e_2} + dA_2 \left(1 + c + d \frac{d_2}{e_2}\right)}{c + d \frac{d_2}{e_2} + \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right)^2}, \\ C_{20}^1 &= -\frac{1 + c + 2d \frac{d_2}{e_2} + dA_2 \left(1 + c + d \frac{d_2}{e_2}\right)}{c + d \frac{d_2}{e_2} + \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right)^2}, \quad C_{21}^1 = \frac{1}{1 + c + d \frac{d_2}{e_2}}, \end{aligned} \quad (2.118)$$

по которому из равенств (2.116) находим другие неизвестные, входящие в

систему (2.115) так:

$$\begin{aligned}
C_{10}^2 &= -\frac{d_1}{e_1} \frac{1 + c + 2d \frac{d_2}{e_2} + dA_2 \left(1 + c + d \frac{d_2}{e_2}\right)}{c + d \frac{d_2}{e_2} + \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right)^2} + A_1, \\
C_{11}^2 &= -\frac{d_1}{e_1} \frac{1 + 2c + 3d \frac{d_2}{e_2} + dA_2 \left(1 + c + d \frac{d_2}{e_2}\right)}{c + d \frac{d_2}{e_2} + \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right)^2}, \\
C_{20}^2 &= -\frac{d_2}{e_2} \frac{1 + d \frac{d_2}{e_2} + dA_2 \left(1 + c + d \frac{d_2}{e_2}\right)}{c + d \frac{d_2}{e_2} + \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right)^2} + A_2, \quad C_{21}^2 = -\frac{d_2}{e_2} \frac{1}{1 + c + d \frac{d_2}{e_2}}. \quad (2.119)
\end{aligned}$$

Подставляя значение произвольных постоянных из равенств (2.118) и (2.119) в формулу (2.112), получим единственное решение уравнения (2.110), удовлетворяющее условиям (2.111).

ГЛАВА 3. ОБЫКНОВЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА С ТРЕМЯ ВНУТРЕННИМИ СВЕРХСИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ

В этой главе уравнение

$$A_{(\alpha),(b)}^n y = f(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i}, \quad x \in \Gamma_{(b)} = \Gamma \setminus (b), \quad \Gamma = (a, b) \quad (3.1)$$

изучается в случае, когда особые точки $\{b_1, b_2, b_3\} = (b)$ расположены в виде $a < b_1 < b_2 < b_3 < b$, а числа $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = (\alpha)$ подчиняются неравенству $\alpha_i > 1$.

Глава 3 состоит из двух разделов. В разделе 3.1 решается вопрос получения интегрального представления общего решения уравнения (3.1) на множестве $\Gamma_{(b)}$ и изучения его характеристических свойств, а также поведения решений в окрестности сверхсингулярных точек.

В разделе 3.2 полученное представление общего решения уравнения (3.1) и установленные для него характеристические равенства применяются для выяснения постановки граничных задач Коши-Рикье и типа линейного сопряжения с условиями в сверхсингулярных точках, их исследования и нахождение решения в явном виде.

Приведённые в главе результаты опубликованы в работах [4-A], [12-A] [13-A].

3.1. Представление общего решения уравнения (3.1) в интегральном виде и изучение его свойств

Введём обозначения $\Gamma_0 = (a, b_1)$, $\Gamma_1 = (b_1, b_2)$, $\Gamma_2 = (b_2, b_3)$, $\Gamma_3 = (b_3, b)$ и представим множество $\Gamma_{(b)}$ в виде $\Gamma_{(b)} = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Для изучения уравнения (3.1) на множестве $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ поступаем так же, как в разделе 2.1 главы 2 и уравнение рассмотрим одновременно в обеих интервалах.

На интервале Γ_i , $i = 1, 2$ фиксируем произвольную точку x_i^0 и интервал представим как сумму промежутков $\Gamma_i^1 = (b_i, x_i^0]$, $\Gamma_i^2 = [x_i^0, b_{i+1})$, $i = 1, 2$. При рассмотрении уравнения (3.1) на промежутке Γ_i^1 функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ в точке b_i доопределим с помощью их правого предельного значения и с их помощью вводим новые функции равенствами

$$p_i^1(x) = p(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k}, \quad q_i^1(x) = q(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k},$$

$$f_i^1(x) = f(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k}.$$

Эти функции будут непрерывными на отрезке $\overline{\Gamma_i^1}$. Тогда уравнение (3.1) можно рассмотреть, подобно работе [16], как уравнение левая часть которого получена в результате n - кратной итерации дифференциального оператора

$$y' + p_i^1(x)(x - b_i)^{-\alpha_i}y - q_i^1(x)(x - b_i)^{-\alpha_i}$$

с левой сверхсингулярной точкой b_i и с правой частью $f_i^1(x)(x - b_i)^{-\alpha_i}$.

Предположим функцию $p(x)$ таковой, что функция $p_i^1(x)$, определяемая с ее помощью, в точке $x = b_i$ удовлетворяет условию

$$|p_i^1(x) - p_i^1(b_i + 0)| \leq L_i^1(x - b_i)^{l_i^1}, \quad L_i^1 > 0, \quad l_i^1 > \alpha_i - 1, \quad \text{при } x \rightarrow b_i + 0, \quad (3.2)$$

а также имеет место неравенство $p(b_i + 0) > 0$, что равносильно неравенству

$$p_i^1(b_i + 0) = p(b_i + 0) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |b_i - b_k|^{-\alpha_k} > 0.$$

Тогда на основании теоремы 1.1 из работы [16, с. 713], общее решение уравнения (3.1) и степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от него на Γ_i^1 записываются единой формулой вида

$$A_{(\alpha),(b)}^s y = \exp \left[p_i^1(b_i + 0) \omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(x) - w_{p_i^1, b_i}^{\alpha_i, +}(x) \right] \left\{ \int_{b_i}^x \left[\sum_{j=0}^{n-s-1} \frac{(x - \xi)^j}{j!} q_i^1(\xi) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(x - \xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} f_i^1(\xi) \right] (\xi - b_i)^{-\alpha_i} \exp \left[w_{p_i^1, b_i}^{\alpha_i, +}(\xi) - p_i^1(b_i + 0) \omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(\xi) \right] d\xi + \right.$$

$$+ \sum_{j=s}^{n-1} C_{ij}^1 \frac{(x - b_i)^{j-s}}{(j-s)!} \Bigg\} \equiv K_{b_i, s}^{\alpha_i, +} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1],$$

$$s = \overline{0, (n-1)}, \quad (K_{b_i, 0}^{\alpha_i, +} [\dots] \equiv K_{b_i}^{\alpha_i, +} [\dots]), \quad (3.3)$$

где

$$w_{p_i^1, b_i}^{\alpha_i, +}(x) = \int_{b_i}^x \frac{p_i^1(t) - p_i^1(b_i + 0)}{(t - b_i)^{\alpha_i}} dt, \quad \omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(x) = [(\alpha_i - 1)(x - b_i)^{\alpha_i - 1}]^{-1}, \text{ а } C_{ij}^1,$$

$j = \overline{0, (n-1)}$ - произвольные постоянные.

Пусть, для одного или обоих значений $i = 1, 2$ вместо неравенства $p(b_i + 0) > 0$ выполняется неравенство $p(b_i + 0) < 0$, а функции $q(x)$ и $f(x)$ при $x \rightarrow b_i + 0$ стремятся к нулю и подчиняются следующему, соответствующему асимптотическому равенству:

$$\exp \left[-p_i^1(b_i + 0) \omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(x) \right] q(x) = o[(x - b_i)^{\beta_i^1}],$$

$$\exp \left[-p_i^1(b_i + 0) \omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(x) \right] f(x) = o[(x - b_i)^{\gamma_i^1}], \quad \beta_i^1, \gamma_i^1 > \alpha_i - 1 \quad (3.4)$$

при $x \rightarrow b_i + 0$.

Тогда для тех же значений $i = 1, 2$ вместо условия $p_i^1(b_i + 0) > 0$ выполняется соответствующее условие $p_i^1(b_i + 0) < 0$, а функции $q_i^1(x)$ и $f_i^1(x)$ при $x \rightarrow b_i + 0$ стремятся к нулю и подчиняются следующему, соответствующему асимптотическому равенству:

$$\exp \left[-p_i^1(b_i + 0) \omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(x) \right] q_i^1(x) = o[(x - b_i)^{\beta_i^1}],$$

$$\exp \left[-p_i^1(b_i + 0) \omega_{b_i}^{\alpha_i, +}(x) \right] f_i^1(x) = o[(x - b_i)^{\gamma_i^1}],$$

$\beta_i^1, \gamma_i^1 > \alpha_i - 1$ при $x \rightarrow b_i + 0$, что обеспечивает существование интегралов внутри фигурных скобок в формуле (3.3). Тогда, подобно [19, с. 59], подтверждается, что в рассматриваемых случаях общее решение уравнения (3.1) и степени оператора $A_{(\alpha), (b)}$ опять выражаются формулой (3.3).

При рассмотрении уравнения (3.1) на промежутке $\Gamma_i^2 = [x_i^0, b_{i+1})$, $i = 1, 2$ функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ в точке b_{i+1} доопределим с помощью их левого предельного значения. Тогда левую часть уравнения можно считать состоящим

из n - кратной итерации оператора

$$y' + p_i^2(x)(b_{i+1} - x)^{-\alpha_i}y - q_i^2(x)(b_{i+1} - x)^{-\alpha_i},$$

а правую часть из функции $f_i^2(x)(b_{i+1} - x)^{-\alpha_i}$, где функции $p_i^2(x)$, $q_i^2(x)$, $f_i^2(x)$ находятся с помощью функций $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ следующими равенствами:

$$p_i^2(x) = p(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k}, \quad q_i^2(x) = q(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k},$$

$$f_i^2(x) = f(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k},$$

и будут непрерывными на $\overline{\Gamma_i^2}$ функциями. Поэтому данное уравнение можно изучить, как в работе [16], в виде уравнения с единственной правой граничной сверхсингулярной точкой b_{i+1} .

Пусть, функция $p(x)$ такова, что определяемая с ее помощью функция $p_i^2(x)$ в точке b_{i+1} удовлетворяет условию типа Гельдера вида

$$|p_i^2(b_{i+1} - 0) - p_i^2(x)| \leq L_i^2(b_{i+1} - x)^{l_i^2}, \quad L_i^2 > 0, \quad l_i^2 > \alpha_{i+1} - 1, \quad (3.5)$$

при $x \rightarrow b_{i+1} - 0$,

а также выполняется неравенство $p(b_{i+1} - 0) < 0$, равносильное неравенству

$$p_i^2(b_{i+1} - 0) = p(b_{i+1} - 0) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |b_{i+1} - b_k|^{-\alpha_k} < 0.$$

В таком случае общее решение уравнения (3.1) и степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от него на промежутке Γ_i^2 , на основании теоремы 2.1 работы [16, с. 715], можно записать в виде

$$A_{(\alpha),(b)}^s y = \exp \left[-p_i^2(b_{i+1} - 0) \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) - w_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) \right] \left\{ (-1)^s \sum_{j=s}^{n-1} C_{ij}^2 \frac{(b_{i+1} - x)^{j-s}}{(j-s)!} - \right.$$

$$\left. - \int_x^{b_{i+1}} \left[\sum_{j=0}^{n-s-1} \frac{(x - \xi)^j}{j!} q_i^2(\xi) + \frac{(x - \xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} f_i^2(\xi) \right] (b_{i+1} - \xi)^{-\alpha_{i+1}} \times \right.$$

$$\times \exp \left[p_i^2(b_{i+1} - 0) \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(\xi) + w_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(\xi) \right] d\xi \Bigg\} \equiv$$

$$\equiv K_{b_{i+1}, s}^{\alpha_{i+1}, -} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2], \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (3.6)$$

где

$$w_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) = \int_x^{b_{i+1}} \frac{p_i^2(b_{i+1} - 0) - p_i^2(t)}{(b_{i+1} - t)^{\alpha_{i+1}}} dt, \quad \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) = [(\alpha_{i+1} - 1)(b_{i+1} - x)^{\alpha_{i+1}-1}]^{-1},$$

а $C_{ij}^2, j = \overline{0, (n-1)}$ - произвольные постоянные.

Непосредственное рассмотрение формулы (3.6) показывает, что она выражает общее решение уравнения (3.1) и степени оператора $A_{(\alpha), (b)}$ от него и в случаях, когда, для одного или обоих значений $i = 1, 2$ вместо условия $p(b_{i+1} - 0) < 0$ выполняется соответствующее условие $p(b_{i+1} - 0) > 0$, а функции $q(x)$ и $f(x)$ при $x \rightarrow b_{i+1} - 0$ стремятся к нулю и подчиняются, соответственно, асимптотическому равенству:

$$\exp \left[p_i^2(b_{i+1} - 0) \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) \right] q(x) = o[(b_{i+1} - x)^{\beta_i^2}],$$

$$\exp \left[p_i^2(b_{i+1} - 0) \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) \right] f(x) = o[(b_{i+1} - x)^{\gamma_i^2}], \quad (3.7)$$

$\beta_i^2, \gamma_i^2 > \alpha_{i+1} - 1$ при $x \rightarrow b_{i+1} - 0$.

Действительно, тогда для тех же значений $i = 1, 2$ вместо условия $p_i^2(b_{i+1} - 0) < 0$ выполняется условие $p_i^2(b_{i+1} - 0) > 0$, а функции $q_i^2(x)$ и $f_i^2(x)$ при $x \rightarrow b_{i+1} - 0$ стремятся к нулю и подчиняются, соответственно асимптотическим равенствам:

$$\exp \left[p_i^2(b_{i+1} - 0) \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) \right] q_i^2(x) = o[(b_{i+1} - x)^{\beta_i^2}],$$

$$\exp \left[p_i^2(b_{i+1} - 0) \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) \right] f_i^2(x) = o[(b_{i+1} - x)^{\gamma_i^2}],$$

$\beta_i^2, \gamma_i^2 > \alpha_{i+1} - 1$ при $x \rightarrow b_{i+1} - 0$, чем обеспечивается существование интегралов внутри фигурных скобок в формуле (3.6). Из этого, как в [19, с. 66], следует верность сделанного предположения.

На интервале Γ_0 , как и в Γ_i^2 , уравнение (3.1) имеет правую граничную сверхсингулярную точку b_1 , поэтому здесь для его общего решения и степеней

оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от этой функции получим следующую формулу, аналогичную формуле (3.6):

$$\begin{aligned}
A_{(\alpha),(b)}^s y &= \exp \left[-p_0^2(b_1 - 0) \omega_{b_1}^{\alpha_1, -}(x) - w_{p_0^2, b_1}^{\alpha_1, -}(x) \right] \left\{ (-1)^s \sum_{j=s}^{n-1} C_{0j}^2 \frac{(b_1 - x)^{j-s}}{(j-s)!} - \right. \\
&\quad \left. - \int_x^{b_1} \left[\sum_{j=0}^{n-s-1} \frac{(x - \xi)^j}{j!} q_0^2(\xi) + \frac{(x - \xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} f_0^2(\xi) \right] (b_1 - \xi)^{-\alpha_1} \times \right. \\
&\quad \left. \times \exp \left[p_0^2(b_1 - 0) \omega_{b_1}^{\alpha_1, -}(\xi) + w_{p_0^2, b_1}^{\alpha_1, -}(\xi) \right] d\xi \right\} \equiv \\
&\equiv K_{b_1, s}^{\alpha_1, -} [p_0^2(x), q_0^2(x), f_0^2(x), C_{0s}^2, C_{0(s+1)}^2, \dots, C_{0(n-1)}^2], \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (3.8)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
p_0^2(x) &= p(x) \prod_{k=2}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k}, \quad q_0^2(x) = q(x) \prod_{k=2}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k}, \\
f_0^2(x) &= f(x) \prod_{k=2}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k}, \quad w_{p_0^2, b_1}^{\alpha_1, -}(x) = \int_x^{b_1} \frac{p_0^2(b_1 - 0) - p_0^2(t)}{(b_1 - t)^{\alpha_1}} dt, \\
\omega_{b_1}^{\alpha_1, -}(x) &= [(\alpha_1 - 1)(b_1 - x)^{\alpha_1 - 1}]^{-1}, \quad \text{а} \quad C_{0j}^2, \quad j = \overline{0, (n-1)} \quad - \quad \text{произвольные} \\
&\text{постоянные.}
\end{aligned}$$

Для справедливости формулы (3.8) функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ в точке b_1 доопределим с помощью их левого предельного значения и потребуем, чтобы функция $p_0^2(x)$, определяемая при помощи $p(x)$, в точке b_1 удовлетворяла условию вида

$$|p_0^2(b_1 - 0) - p_0^2(x)| \leq L_0^2(b_1 - x)^{l_0^2}, \quad L_0^2 - \text{const.} > 0, \quad l_0^2 > \alpha_1 - 1 \quad \text{при} \quad x \rightarrow b_1 - 0,$$

и выполнялось неравенство $p(b_1 - 0) < 0$ из которого следует неравенство

$$p_0^2(b_1 - 0) = p(b_1 - 0) \prod_{k=2}^3 |b_1 - b_k|^{-\alpha_k} < 0.$$

Если взамен неравенства $p(b_1 - 0) < 0$ выполняется неравенство $p(b_1 - 0) > 0$, то для сходимости интегралов в формуле (3.8) дополнительно будем требовать, чтобы функции $q(x)$ и $f(x)$ при $x \rightarrow b_1 - 0$ стремились к нулю и удовлетворяли,

соответственно, асимптотическому равенству:

$$\exp[p_0^2(b_1 - 0)\omega_{b_1}^{\alpha_1, -}(x)] q(x) = o[(b_1 - x)^{\beta_0^2}],$$

$$\exp[p_0^2(b_1 - 0)\omega_{b_1}^{\alpha_1, -}(x)] f(x) = o[(b_1 - x)^{\gamma_0^2}],$$

$\beta_0^2, \gamma_0^2 > \alpha_1 - 1$ при $x \rightarrow b_1 - 0$.

Тогда выполняется неравенство $p_0^2(b_1 - 0) > 0$ и функции $q_0^2(x)$ и $f_0^2(x)$ при $x \rightarrow b_1 - 0$ будут стремиться к нулю и удовлетворяют, соответственно, асимптотическому равенству:

$$\exp[p_0^2(b_1 - 0)\omega_{b_1}^{\alpha_1, -}(x)] q_0^2(x) = o[(b_1 - x)^{\beta_0^2}],$$

$$\exp[p_0^2(b_1 - 0)\omega_{b_1}^{\alpha_1, -}(x)] f_0^2(x) = o[(b_1 - x)^{\gamma_0^2}],$$

$\beta_0^2, \gamma_0^2 > \alpha_1 - 1$ при $x \rightarrow b_1 - 0$.

В таком случае общее решение уравнения (3.1) на Γ_0 и степени оператора $A_{(\alpha), (b)}$ от него опять выражаются формулой (3.8).

Теперь уравнение (3.1) рассмотрим на интервале Γ_3 и коэффициенты $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ в точке b_3 доопределим с помощью их правого предельного значения. Здесь уравнение, аналогично случаю промежутка Γ_i^1 , имеет единственную левую граничную сверхсингулярную точку. Поэтому, для его общего решения и степеней оператора от него имеет место следующее интегральное представление, аналогичное представлению (3.3):

$$\begin{aligned} A_{(\alpha), (b)}^s y = & \exp \left[p_3^1(b_3 + 0)\omega_{b_3}^{\alpha_3, +}(x) - w_{p_3^1, b_3}^{\alpha_3, +}(x) \right] \left\{ \int_{b_3}^x \left[\sum_{j=0}^{n-s-1} \frac{(x-\xi)^j}{j!} q_3^1(\xi) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(x-\xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} f_3^1(\xi) \right] (\xi - b_3)^{-\alpha_3} \exp \left[w_{p_3^1, b_3}^{\alpha_3, +}(\xi) - p_3^1(b_3 + 0)\omega_{b_3}^{\alpha_3, +}(\xi) \right] d\xi + \right. \\ & \left. + \sum_{j=s}^{n-1} C_{3j}^1 \frac{(x-b_3)^{j-s}}{(j-s)!} \right\} \equiv K_{b_3, s}^{\alpha_3, +} [p_3^1(x), q_3^1(x), f_3^1(x), C_{3s}^1, C_{3(s+1)}^1, \dots, C_{3(n-1)}^1], \\ & s = \overline{0, (n-1)}, \quad (K_{b_3, 0}^{\alpha_3, +} [\dots] \equiv K_{b_3}^{\alpha_3, +} [\dots]), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$p_3^1(x) = p(x) \prod_{k=1}^2 |x - b_k|^{-\alpha_k}, \quad q_3^1(x) = q(x) \prod_{k=1}^2 |x - b_k|^{-\alpha_k},$$

$$f_3^1(x) = f(x) \prod_{k=1}^2 |x - b_k|^{-\alpha_k}, \quad w_{p_3^1, b_3}^{\alpha_3, +}(x) = \int_{b_3}^x \frac{p_3^1(t) - p_3^1(b_3 + 0)}{(t - b_3)^{\alpha_3}} dt,$$

$\omega_{b_3}^{\alpha_3, +}(x) = [(\alpha_3 - 1)(x - b_3)^{\alpha_3 - 1}]^{-1}$, а $C_{3j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$ - произвольные постоянные.

Формула (3.9) справедлива, если функция $p(x)$ такова, что функция $p_3^1(x)$ в точке $x = b_3$ подчиняется условию

$$|p_3^1(x) - p_3^1(b_3 + 0)| \leq L_3^1(x - b_3)^{l_3^1}, \quad L_3^1 > 0, \quad l_3^1 > \alpha_3 - 1 \quad \text{при } x \rightarrow b_3 + 0,$$

и выполняется неравенство $p_3^1(b_3 + 0) = p(b_3 + 0) \prod_{k=1}^2 |b_3 - b_k|^{-\alpha_k} > 0$,

равносильное условию $p(b_3 + 0) > 0$.

Формула (3.9) представляет общее решение уравнения (3.1) и степени оператора от него на промежутке Γ_3 и в случае, когда вместо условия $p_3^1(b_3 + 0) > 0$ выполняется условие $p_3^1(b_3 + 0) < 0$, если функции $q_3^1(x)$ и $f_3^1(x)$ при $x \rightarrow b_3 + 0$ стремятся к нулю и подчиняются следующему, соответственно, асимптотическому условию:

$$\exp[-p_3^1(b_3 + 0)\omega_{b_3}^{\alpha_3, +}(x)] q_3^1(x) = o[(x - b_3)^{\beta_3^1}],$$

$$\exp[-p_3^1(b_3 + 0)\omega_{b_3}^{\alpha_3, +}(x)] f_3^1(x) = o[(x - b_3)^{\gamma_3^1}],$$

$\beta_3^1, \gamma_3^1 > \alpha_3 - 1$. Эти требования выполняются если для функции $p(x)$ имеет место неравенство $p(b_3 + 0) < 0$ и функции $q(x)$ и $f(x)$ при $x \rightarrow b_3 + 0$ стремятся к нулю и, удовлетворяют асимптотическому равенству

$$\exp[-p_3^1(b_3 + 0)\omega_{b_3}^{\alpha_3, +}(x)] q(x) = o[(x - b_3)^{\beta_3^1}],$$

$$\exp[-p_3^1(b_3 + 0)\omega_{b_3}^{\alpha_3, +}(x)] f(x) = o[(x - b_3)^{\gamma_3^1}], \quad \beta_3^1, \gamma_3^1 > \alpha_3 - 1.$$

Совокупность формул (3.3), (3.6), $i = 1, 2$, (3.8), (3.9), то есть

$$\begin{aligned}
A_{(\alpha),(b)}^s y = & \begin{cases} K_{b_1,s}^{\alpha_1,-} [p_0^2(x), q_0^2(x), f_0^2(x), C_{0s}^2, C_{0(s+1)}^2, \dots, C_{0(n-1)}^2] \text{ при } x \in \Gamma_0 \\ K_{b_1,s}^{\alpha_1,+} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, C_{1(s+1)}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1] \text{ при } x \in \Gamma_1^1 \\ K_{b_2,s}^{\alpha_2,-} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, C_{1(s+1)}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2] \text{ при } x \in \Gamma_1^2 \\ K_{b_2,s}^{\alpha_2,+} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, C_{2(s+1)}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1] \text{ при } x \in \Gamma_2^1 \\ K_{b_3,s}^{\alpha_3,-} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, C_{2(s+1)}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2] \text{ при } x \in \Gamma_2^2 \\ K_{b_3,s}^{\alpha_3,+} [p_3^1(x), q_3^1(x), f_3^1(x), C_{3s}^1, C_{3(s+1)}^1, \dots, C_{3(n-1)}^1] \text{ при } x \in \Gamma_3 \end{cases} \equiv \\
\equiv & U_{(\alpha),(b),s}^{(n)} [p(x), q(x), f(x), C_{0s}^2, \dots, C_{0(n-1)}^2; C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1; C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2; C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1; \\
& C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2; C_{3s}^1, \dots, C_{3(n-1)}^1], \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (U_{(\alpha),(b),0}^{(n)} \equiv U_{(\alpha),(b)}^{(n)}) \quad (3.10)
\end{aligned}$$

определяет общее решение уравнения (3.1) и степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от этой функции на $\Gamma_{(b)}$ если мы, в соответствии с определением решения уравнения (3.1), обеспечим непрерывность функций $A_{(\alpha),(b)}^s y$, $s = \overline{0, (n-1)}$ в точках x_i^0 , $i = 1, 2$, то есть потребуем выполнение равенств $[A_{(\alpha),(b)}^s y]_{x=x_i^0+0} = [A_{(\alpha),(b)}^s y]_{x=x_i^0-0}$, $i = 1, 2$. Это приводит нас к следующим двум с.л.а.у., имеющих треугольную форму:

$$\begin{aligned}
& K_{b_{i,s}}^{\alpha_i,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1]_{x=x_i^0} = \\
& = K_{b_{i+1,s}}^{\alpha_{i+1},-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2]_{x=x_i^0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad i = 1, 2, \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Каждая из систем (3.11) относительно одной группы произвольных постоянных C_{ij}^1 и C_{ij}^2 , $j = \overline{0, (n-1)}$ относящихся к промежутку Γ_i , $i = 1, 2$ имеет единственное решение, если другую группу считать известной. Потому что, в этих системах основная матрица, соответствующая каждой из этих групп переменных, имеет строго положительную главную диагональ. Так что с помощью систем (3.11) каждую из выше названных групп произвольных постоянных можно выразить однозначно через другую, соответствующую группу. Это позволяет рассмотреть формулу (3.10) в четырёх равносильных формах, в зависимости от расположения и взаимосвязи произвольных постоянных в её второй-четвёртой строках, в соответствии со следующими правилами:

а). Произвольные постоянные C_{1j}^1 и C_{2j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$, расположенные во

второй и четвёртой строках формулы (3.10) считаются основными, а постоянные C_{1j}^2 и $C_{2j}^2, j = \overline{0, (n-1)}$, расположенные в третьей и пятой строках, определяются с их помощью из соответствующей системы (3.11);

б). Произвольные постоянные C_{1j}^1 и $C_{2j}^2, j = \overline{0, (n-1)}$, расположенные во второй и пятой строках формулы (3.10) считаются основными, а постоянные C_{1j}^2 и $C_{2j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$, расположенные в третьей и четвёртой строках, определяются с их помощью из соответствующей системы (3.11);

в). Произвольные постоянные C_{1j}^2 и $C_{2j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$, расположенные в третьей и четвёртой строках формулы (3.10) считаются основными, а постоянные C_{1j}^1 и $C_{2j}^2, j = \overline{0, (n-1)}$, расположенные во второй и пятой строках, определяются с их помощью из соответствующей системы (3.11);

г). Произвольные постоянные C_{1j}^2 и $C_{2j}^2, j = \overline{0, (n-1)}$, расположенные в третьей и пятой строках формулы (3.10) считаются основными, а постоянные C_{1j}^1 и $C_{2j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$, расположенные во второй и четвёртой строках, определяются с их помощью из соответствующей системы (3.11).

Во всех этих случаях представление (3.10), выражающее общее решение уравнения (3.1) зависит от n - произвольных постоянных, различным образом обозначенных в промежутках $\Gamma_i, i = 0, 1, 2, 3$.

Из проведенных выше рассуждений вытекает, что формула (3.10) выражает общее решение уравнения (3.1) и степени оператора $A_{(\alpha), (b)}$ от него при любых комбинациях знаков чисел $p(b_i + 0), i = 1, 2, 3$ и $p(b_{i+1} - 0), i = 0, 1, 2$, если функции $q(x)$ и $f(x)$ подчиняются следующим дополнительным требованиям: в случае $p(b_i + 0) < 0$ при $x \rightarrow b_i + 0$ обращаются в нуль и подчиняются соответственно условию (3.4) при $i = 1, 2, 3$, а в случае $p(b_{i+1} - 0) > 0$ при $x \rightarrow b_{i+1} - 0$ обращаются в нуль и подчиняются условиям (3.7) при $i = 0, 1, 2$.

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Теорема 3.1. Пусть сверхсингулярные точки уравнения (3.1)

расположены в виде $a < b_1 < b_2 < b_3 = b$, далее $\Gamma_{(b)} = \bigcup_{i=0}^3 \Gamma_i$, $\Gamma_0 = (a, b_1)$,

$\Gamma_i = (b_i, b_{i+1})$, $i = 1, 2$, $\Gamma_3 = (b_3, b)$, а x_i^0 - обозначает фиксированную точку интервала Γ_i , $i = 1, 2$, которая разделяет этот интервал на промежутки $\Gamma_i^1 = (b_i, x_i^0]$, $\Gamma_i^2 = [x_i^0, b_{i+1})$. Пусть выполняются следующие условия:

1) функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $\overline{\Gamma}$, за исключением, быть может, точек b_i , $i = 1, 2, 3$, а в самих этих точках они могут иметь лишь разрыв первого рода;

2) функции $p_i^1(x)$, $i = 1, 2, 3$, определяемые при помощи функции $p(x)$ удовлетворяют, соответственно, условию (3.2);

3) функции $p_i^2(x)$, $i = 0, 1, 2$, определяемые при помощи функции $p(x)$ удовлетворяют соответственно, условию (3.5);

4) выполняется следующая комбинация знаков чисел $p(b_i + 0) > 0$, $p(b_i - 0) < 0$, $i = 1, 2, 3$;

5) может иметь место любая другая комбинация знаков чисел $p(b_i + 0)$, $i = 1, 2, 3$, $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 0, 1, 2$. При этом требуется, чтобы функции $q(x)$ и $f(x)$, в случае $p(b_i + 0) < 0$ при $x \rightarrow b_i + 0$ обращались в нуль и подчинялись, соответственно, условию (3.4), а в случае $p(b_{i+1} - 0) > 0$ при $x \rightarrow b_{i+1} - 0$ обращались в нуль и подчинялись, соответственно условию (3.7).

Тогда общее решение уравнения (3.1) и степени оператора $A_{(\alpha), (b)}$ от него на множестве $\Gamma_{(b)}$ выражается при помощи формулы (3.10), где C_{ij}^1 , $i = 1, 2, 3$, C_{ij}^2 , $i = 0, 1, 2$, $j = \overline{0, (n-1)}$ - произвольные постоянные, группы из которых соответствующие промежутку Γ_i , $i = 1, 2$ однозначно связаны соответствующей треугольной с.л.а.у. (3.11).

Замечание 3.1. Непосредственная проверка показывает, что по известному решению уравнения (3.1), выражаемому по формуле (3.10) соответствующие ему постоянные находятся однозначно с помощью следующих равенств, которые, подобно [16], называем характеристическими:

$$\{\exp[p_0^2(b_1 - 0)\omega_{b_1}^{\alpha_{1,-}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y\}_{x=b_1-0} = (-1)^s C_{0s}^2, \quad (3.12)$$

$$\{\exp[-p_1^1(b_1 + 0)\omega_{b_1}^{\alpha_{1,+}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y\}_{x=b_1+0} = C_{1s}^1, \quad (3.13)$$

$$\{\exp[p_1^2(b_2 - 0)\omega_{b_2}^{\alpha_{2,-}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y\}_{x=b_2-0} = (-1)^s C_{1s}^2, \quad (3.14)$$

$$\{\exp[-p_2^1(b_2 + 0)\omega_{b_2}^{\alpha_{2,+}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y\}_{x=b_2+0} = C_{2s}^1, \quad (3.15)$$

$$\{\exp[p_2^2(b_3 - 0)\omega_{b_3}^{\alpha_{3,-}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y\}_{x=b_3-0} = (-1)^s C_{2s}^2, \quad (3.16)$$

$$\{\exp[-p_3^1(b_3 + 0)\omega_{b_3}^{\alpha_{3,+}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y\}_{x=b_3+0} = C_{3s}^1, \quad (3.17)$$

где $s = \overline{0, (n-1)}$.

Процесс нахождения постоянных $C_{ij}^1, C_{ij}^2, i = 1, 2, j = \overline{0, (n-1)}$ можно проделать и следующим способом, которым воспользуемся в дальнейшем: взяв две группы из равенств (3.12) - (3.17), одно относящееся к Γ_1 , другое к Γ_2 , однозначно находим две группы произвольных постоянных, по одному относящиеся к этим интервалам, далее подставляя их в соответствующую из систем (3.11) находим однозначно другие группы постоянных, относящиеся к указанным интервалам. Характеристические равенства (3.12) - (3.17) являются формулами обращения представления (3.10).

Замечание 3.2. Выполняя оценочные вычисления, подобные [87, с. 130-133], заключаем, что все решения уравнения (3.1), выражаемые формулой (3.10) в окрестности сверхсингулярных точек ведут себя также как экспоненциальная функция и точно это характеризуется знаками предельных значений функции $p(x)$ в этих точках. При $x \rightarrow b_i + 0, i = 1, 2, 3$, если $p(b_i + 0) > 0$, то все решения уравнения стремятся к бесконечности и удовлетворяют асимптотическому равенству $y(x) = O\{\exp[p_i^1(b_i + 0)\omega_{b_i}^{\alpha_{i,+}}(x)]\}$, если же $p(b_i + 0) < 0$, то все решения стремятся к нулю с поведением $y(x) = o\{\exp[p_i^1(b_i + 0)\omega_{b_i}^{\alpha_{i,+}}(x)]\}$. При $x \rightarrow b_{i+1} - 0, i = 0, 1, 2$, если $p(b_{i+1} - 0) < 0$, то все решения уравнения стремятся к бесконечности с асимптотическим поведением $y(x) = O\{\exp[-p_i^2(b_{i+1} - 0)\omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1,-}}(x)]\}$, если же $p(b_{i+1} - 0) > 0$, то все они

стремятся к нулю с поведением $y(x) = o \left\{ \exp \left[-p_i^2 (b_{i+1} - 0) \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1}, -}(x) \right] \right\}$.

Из проведенных рассуждений вытекает, что общая картина поведения решений уравнения (3.1) в окрестности сверхсингулярных точек характеризуется комбинацией знаков шести чисел $p(b_i + 0)$, $i = 1, 2, 3$ и $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 0, 1, 2$.

3.2. Постановка и исследование граничных для уравнения (3.1) с условиями в сверхсингулярных точках

Начинаем с рассмотрения задач Коши - Рикье.

Задача 3.1. Найти решение уравнения (3.1), удовлетворяющее двум группам условий вида

$$\begin{aligned} \left\{ \exp[p_0^2 (b_1 - 0) \omega_{b_1}^{\alpha_{1,-}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y \right\}_{x=b_1-0} &= a_{0s}^2, \\ \left\{ \exp[-p_3^1 (b_3 + 0) \omega_{b_3}^{\alpha_{3,+}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y \right\}_{x=b_3+0} &= d_{3s}^1; \end{aligned} \quad (3.18)$$

а также одному из следующих двух групп условий:

$$\begin{aligned} \left\{ \exp[-p_1^1 (b_1 + 0) \omega_{b_1}^{\alpha_{1,+}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y \right\}_{x=b_1+0} &= a_{1s}^1, \\ \left\{ \exp[-p_2^1 (b_2 + 0) \omega_{b_2}^{\alpha_{2,+}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y \right\}_{x=b_2+0} &= a_{2s}^1; \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \exp[-p_1^1 (b_1 + 0) \omega_{b_1}^{\alpha_{1,+}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y \right\}_{x=b_1+0} &= b_{1s}^1, \\ \left\{ \exp[p_2^2 (b_3 - 0) \omega_{b_3}^{\alpha_{3,-}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y \right\}_{x=b_3-0} &= b_{2s}^2; \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \exp[p_1^2 (b_2 - 0) \omega_{b_2}^{\alpha_{2,-}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y \right\}_{x=b_2-0} &= c_{1s}^2, \\ \left\{ \exp[-p_2^1 (b_2 + 0) \omega_{b_2}^{\alpha_{2,+}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y \right\}_{x=b_2+0} &= c_{2s}^1; \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \exp[p_1^2 (b_2 - 0) \omega_{b_2}^{\alpha_{2,-}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y \right\}_{x=b_2-0} &= d_{1s}^2, \\ \left\{ \exp[p_2^2 (b_3 - 0) \omega_{b_3}^{\alpha_{3,-}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y \right\}_{x=b_3-0} &= d_{2s}^2; \end{aligned} \quad (3.22)$$

где $s = \overline{0, (n-1)}$, а $a_{0s}^2, a_{is}^1, b_{is}^k, c_{is}^k, d_{is}^2, d_{3s}^1$, $i, k = 1, 2$, - заданные вещественные числа.

Решение задачи 3.1 в общем случае. Пусть для уравнения (3.1)

выполнены все условия теоремы 3.1. Формулу (3.10) подчиним условиям (3.18). Тогда на основании характеристических равенств (3.12) и (3.17) значение произвольных постоянных C_{0s}^2 и C_{3s}^1 однозначно находим следующими равенствами:

$$C_{0s}^2 = a_{0s}^2, \quad C_{3s}^1 = d_{3s}^1, \quad s = \overline{0, (n-1)}. \quad (3.23)$$

Далее формулу (3.10) подставляем в условия (3.19). Тогда в силу характеристических равенств (3.13) и (3.15) имеем:

$$C_{1s}^1 = a_{1s}^1, \quad C_{2s}^1 = a_{2s}^1, \quad s = \overline{0, (n-1)}. \quad (3.24)$$

Теперь в системах (3.11) постоянные C_{1s}^1 и C_{2s}^1 , $s = \overline{0, (n-1)}$ заменим их значениями из последних равенств. Тогда приходим к следующим определённым треугольным с.л.а.у.:

$$\begin{aligned} K_{b_{2,s}}^{\alpha_{2,-}} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0} = \\ = K_{b_{1,s}}^{\alpha_{1,+}} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), a_{1s}^1, \dots, a_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0}, \\ K_{b_{3,s}}^{\alpha_{3,-}} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0} = \\ = K_{b_{2,s}}^{\alpha_{2,+}} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), a_{2s}^1, \dots, a_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

относительно произвольных постоянных C_{1s}^2 и C_{2s}^2 , $s = \overline{0, (n-1)}$, соответственно, из которых последние определяются однозначно.

Значение постоянных $C_{0s}^2, C_{3s}^1, C_{1s}^1, C_{2s}^1$, $s = \overline{0, (n-1)}$ из равенств (3.23), (3.24), а C_{1s}^2, C_{2s}^2 из систем (3.25), соответственно, подставляя в формулу (3.10), получим единственное решение задачи 3.1 с условиями (3.18), (3.19).

Для нахождения решения задачи 3.1 по другим условиям поступаем аналогичным образом. Тогда:

в случае условий (3.18), (3.20) опять имеем равенства (3.23) для нахождения C_{0s}^2, C_{3s}^1 , $s = \overline{0, (n-1)}$, а в силу равенств (3.13), (3.16) произвольные постоянные C_{1s}^1, C_{2s}^2 находим равенствами:

$$C_{1s}^1 = b_{1s}^1, \quad C_{2s}^2 = (-1)^s b_{2s}^2, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (3.26)$$

и подставляя найденные значения из равенств (3.26) в соответствующую систему (3.11), для нахождения постоянных C_{1s}^2, C_{2s}^1 приходим к следующим

определённым треугольным с.л.а.у.:

$$\begin{aligned}
& K_{b_{2,s}}^{\alpha_{2,-}} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0} = \\
& = K_{b_{1,s}}^{\alpha_{1,+}} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), b_{1s}^1, \dots, b_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0}, \\
& K_{b_{2,s}}^{\alpha_{2,+}} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0} = \\
& = K_{b_{3,s}}^{\alpha_{3,-}} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), (-1)^s b_{2s}^2, \dots, (-1)^{n-1} b_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0}, s = \overline{0, (n-1)}; \quad (3.27)
\end{aligned}$$

в случае условий (3.18), (3.21) имеем равенства (3.23), а на основании характеристических равенств (3.14) и (3.15) произвольные постоянные C_{1s}^2, C_{2s}^1 находим так:

$$C_{1s}^2 = (-1)^s c_{1s}^2, \quad C_{2s}^1 = c_{2s}^1, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (3.28)$$

и подставляя последние значения в соответствующую систему (3.11), получим следующие определённые с.л.а.у. для определения C_{1s}^1, C_{2s}^2 , соответственно:

$$\begin{aligned}
& K_{b_{1,s}}^{\alpha_{1,+}} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0} = \\
& = K_{b_{2,s}}^{\alpha_{2,-}} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), (-1)^s c_{1s}^2, \dots, (-1)^{n-1} c_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0}, \\
& K_{b_{3,s}}^{\alpha_{3,-}} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0} = \\
& = K_{b_{2,s}}^{\alpha_{2,+}} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), c_{2s}^1, c_{2(s+1)}^1, \dots, c_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}; \quad (3.29)
\end{aligned}$$

в случае условий (3.18), (3.22) кроме формул (3.23) на основании характеристических формул (3.14), (3.16) для определения произвольных постоянных C_{1s}^2, C_{2s}^2 получим равенства

$$C_{1s}^2 = (-1)^s d_{1s}^2, \quad C_{2s}^2 = (-1)^s d_{2s}^2, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (3.30)$$

и подставляя эти их значения в соответствующую систему из (3.11), для нахождения постоянных C_{1s}^1, C_{2s}^1 имеем следующие определённые с.л.а.у.:

$$\begin{aligned}
& K_{b_{1,s}}^{\alpha_{1,+}} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0} = \\
& = K_{b_{2,s}}^{\alpha_{2,-}} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), (-1)^s d_{1s}^2, \dots, (-1)^{n-1} d_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0}, \\
& K_{b_{2,s}}^{\alpha_{2,+}} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0} = \\
& = K_{b_{3,s}}^{\alpha_{3,-}} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), (-1)^s d_{2s}^2, \dots, (-1)^{n-1} d_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0}, s = \overline{0, (n-1)}. \quad (3.31)
\end{aligned}$$

В каждом из этих случаев, также выписываем соответствующее решение

уравнения (3.1) по формуле (3.10).

В случае задачи 3.1 с условиями (3.18), (3.22) докажем единственность полученного выше решения $y(x) = y_1(x)$ задачи Коши - Рикье другим способом.

Предположим, что существует другое решение $y_2(x)$ данной задачи, отличное от функции $y_1(x)$. Тогда, на основании доказываемых математической индукцией тождеств

$$A_{(\alpha),(b)}^s y_1 - A_{(\alpha),(b)}^s y_2 = B_{(\alpha),(b)}^s v, \quad s = \overline{0, n}, \quad (3.32)$$

$$B_{(\alpha),(b)} v \equiv v' + p(x) \left(\prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i} \right) v,$$

функция $v(x) = y_1(x) - y_2(x)$ будет решением задачи

$$B_{(\alpha),(b)}^n v = 0, \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \exp[p_0^2(b_1 - 0)\omega_{b_1}^{\alpha_1,-}(x)] B_{(\alpha),(b)}^s y \right\}_{x=b_1-0} &= 0, & \left\{ \exp[-p_3^1(b_3 + 0)\omega_{b_3}^{\alpha_3,+}(x)] B_{(\alpha),(b)}^s y \right\}_{x=b_3+0}, \\ \left\{ \exp[p_1^2(b_2 - 0)\omega_{b_2}^{\alpha_2,-}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y \right\}_{x=b_2-0} &= 0, & \left\{ \exp[p_2^2(b_3 - 0)\omega_{b_3}^{\alpha_3,-}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y \right\}_{x=b_3-0}, \\ s &= \overline{0, (n-1)}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

Задача (3.33), (3.34) является частным случаем задачи 3.1 с условиями (3.18), (3.22). Проведя её решение, имеем $v(x) \equiv 0$, отсюда $y_1(x) \equiv y_2(x)$, что значит, задача 3.1 с условиями (3.18), (3.22) кроме $y_1(x)$ других решений не имеет.

Отметим, что использованный способ можно применить и ко всем задачам, рассматриваемым в настоящем исследовании.

Следовательно, имеет место утверждение:

Теорема 3.2. Пусть для уравнения (3.1) выполняются все условия теоремы 3.1. Тогда задача 3.1 имеет единственное решение, которое, в зависимости от её условий, получается из формулы (3.10) заменой в нём произвольных постоянных их значением, соответственно, из следующих формул и систем: (3.23), (3.24), (3.25); (3.23), (3.26), (3.27); (3.23), (3.28), (3.29) и (3.23), (3.30), (3.31).

Решение задачи 3.1 в случае $n = 2$. Рассмотрим подробно решение задачи и в каждом случае условий приводим окончательную формулу.

Отметим, что в случае $n = 2$ системы (3.11) записываются в виде

$$\begin{cases} d_i(\mu_i + C_{i0}^1 + k_i C_{i1}^1) = e_i(\lambda_i + C_{i0}^2 + r_i C_{i1}^2), \\ d_i(v_i + C_{i1}^1) = e_i(\eta_i - C_{i1}^2) \end{cases}, \quad i = 1, 2, \quad (3.35)$$

где

$$k_i \equiv k_i(x_i^0) = x_i^0 - b_i, \quad r_i \equiv r_i(x_i^0) = b_{i+1} - x_i^0,$$

$$d_i \equiv d_i(x_i^0) = \exp \left[p_i^1(b_i + 0) \omega_{b_i}^{\alpha_{i,+}}(x_i^0) - w_{p_i^1, b_i}^{\alpha_{i,+}}(x_i^0) \right],$$

$$e_i \equiv e_i(x_i^0) = \exp \left[-p_i^2(b_{i+1} - 0) \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1,-}}(x_i^0) - w_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1,-}}(x_i^0) \right], \quad k_i, r_i, d_i, e_i > 0,$$

$$\begin{aligned} \mu_i \equiv \mu_i(x_i^0) &= \int_{b_i}^{x_i^0} [(1 + x_i^0 - \xi) q_i^1(\xi) + (x_i^0 - \xi) f_i^1(\xi)] (\xi - b_i)^{-\alpha_i} \times \\ &\quad \times \exp \left[w_{p_i^1, b_i}^{\alpha_{i,+}}(\xi) - p_i^1(b_i + 0) \omega_{b_i}^{\alpha_{i,+}}(\xi) \right] d\xi, \\ \lambda_i \equiv \lambda_i(x_i^0) &= - \int_{x_i^0}^{b_{i+1}} [(1 + x_i^0 - \xi) q_i^2(\xi) + (x_i^0 - \xi) f_i^2(\xi)] (b_{i+1} - \xi)^{-\alpha_{i+1}} \times \\ &\quad \times \exp \left[p_i^2(b_{i+1} - 0) \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1,-}}(\xi) + w_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1,-}}(\xi) \right] d\xi, \\ v_i \equiv v_i(x_i^0) &= \int_{b_i}^{x_i^0} [q_i^1(\xi) + f_i^1(\xi)] (\xi - b_i)^{-\alpha_i} \exp \left[w_{p_i^1, b_i}^{\alpha_{i,+}}(\xi) - p_i^1(b_i + 0) \omega_{b_i}^{\alpha_{i,+}}(\xi) \right] d\xi, \\ \eta_i \equiv \eta_i(x_i^0) &= - \int_{x_i^0}^{b_{i+1}} [q_i^2(\xi) + f_i^2(\xi)] (b_{i+1} - \xi)^{-\alpha_{i+1}} \times \\ &\quad \times \exp \left[p_i^2(b_{i+1} - 0) \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1,-}}(\xi) + w_{p_i^2, b_{i+1}}^{\alpha_{i+1,-}}(\xi) \right] d\xi \end{aligned}$$

- определённые вещественные числа.

Формулу (3.10) при $n = 2$ подчиним условиям (3.18), (3.19). Тогда на основании характеристических равенств (3.12) и (3.17) значение произвольных постоянных C_{0s}^2 и C_{3s}^1 однозначно находим так:

$$C_{0s}^2 = a_{0s}^2, \quad C_{3s}^1 = d_{3s}^1, \quad s = 0, 1, \quad (3.36)$$

а применяя характеристические равенства (3.13) и (3.15) имеем:

$$C_{1s}^1 = a_{1s}^1, \quad C_{2s}^1 = a_{2s}^1, \quad s = 0, 1, \quad (3.37)$$

Значение C_{1s}^1 , C_{2s}^1 из последних равенств подставляем в системы (3.35),

соответственно, и из полученных систем находим произвольные постоянные C_{1s}^2 ,

C_{2s}^2 так:

$$C_{i0}^2 = \frac{d_i}{e_i} a_{i0}^1 + \frac{d_i}{e_i} (k_i + r_i) a_{i1}^1 + A_i, \quad C_{i1}^2 = -\frac{d_i}{e_i} a_{i1}^1 + \bar{A}_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.38)$$

где $A_i = \frac{d_i}{e_i} (\mu_i + r_i v_i) - r_i \eta_i - \lambda_i$, $\bar{A}_i = \eta_i - \frac{d_i}{e_i} v_i$.

Найденные значения произвольных постоянных из равенств (3.36), (3.37), (3.38) подставляем в формулу (3.10) и находим единственное решение задачи 3.1 с условиями (3.18), (3.19).

Подобным образом действуем при нахождении решения уравнения (3.1), подчиняющееся другим условиям задачи 3.1. Тогда:

в случае условий (3.18), (3.20) приходим к равенствам (3.36) для нахождения произвольных постоянных C_{0s}^2, C_{3s}^1 , а в силу характеристических равенств (3.13) и (3.16) к следующим равенствам для определения постоянных C_{1s}^1, C_{2s}^2 :

$$C_{10}^1 = b_{10}^1, \quad C_{11}^1 = b_{11}^1; \quad C_{20}^2 = b_{20}^2, \quad C_{21}^2 = -b_{21}^2. \quad (3.39)$$

Подставляем эти пары в соответствующую систему из (3.35), тогда для нахождения произвольных постоянных C_{1s}^2, C_{2s}^1 имеем равенства:

$$\begin{aligned} C_{10}^2 &= \frac{d_1}{e_1} b_{10}^1 + \frac{d_1}{e_1} (k_1 + r_1) b_{11}^1 + A_1, \quad C_{11}^2 = -\frac{d_1}{e_1} b_{11}^1 + \bar{A}_1; \\ C_{20}^1 &= \frac{e_2}{d_2} b_{20}^2 - \frac{e_2}{d_2} (k_2 + r_2) b_{21}^2 + B_2, \quad C_{21}^1 = \frac{e_2}{d_2} b_{21}^2 + \bar{B}_2, \end{aligned} \quad (3.40)$$

где $B_i = \frac{e_i}{d_i} (\lambda_i - k_i \eta_i) + k_i v_i - \mu_i$, $\bar{B}_i = \frac{e_i}{d_i} \eta_i - v_i$;

в случае в случае условий (3.18), (3.21), получим формулы (3.36), а в силу характеристических равенств (3.14) и (3.15) произвольные постоянные C_{1s}^2, C_{2s}^1 находим так:

$$C_{10}^2 = c_{10}^2, \quad C_{11}^2 = -c_{11}^2; \quad C_{20}^1 = c_{20}^1, \quad C_{21}^1 = c_{21}^1, \quad (3.41)$$

после подставляя их значение в соответствующую систему из (3.35), находим произвольные постоянные C_{1s}^1, C_{2s}^2 равенствами

$$C_{10}^1 = \frac{e_1}{d_1} c_{10}^2 - \frac{e_1}{d_1} (k_1 + r_1) c_{11}^2 + B_1, \quad C_{11}^1 = \frac{e_1}{d_1} c_{11}^2 + \bar{B}_1;$$

$$C_{20}^2 = \frac{d_2}{e_2} c_{20}^1 + \frac{d_2}{e_2} (k_2 + r_2) c_{21}^1 + A_2, \quad C_{21}^2 = \frac{d_2}{e_2} c_{21}^1 + \bar{A}_2; \quad (3.42)$$

в случае условий (3.18), (3.22) в силу характеристических равенств (3.12), (3.17), (3.14) и (3.16), соответственно, приходим к равенствам (3.36), а также

$$C_{10}^2 = d_{10}^2, \quad C_{11}^2 = -d_{11}^2; \quad C_{20}^2 = d_{20}^2, \quad C_{21}^2 = -d_{21}^2, \quad (3.43)$$

далее, поставим эти значения C_{1s}^2, C_{2s}^2 в соответствующую систему из (3.35), откуда произвольные постоянные C_{1s}^1, C_{2s}^1 определим следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{10}^1 &= \frac{e_1}{d_1} d_{10}^2 - \frac{e_1}{d_1} (k_1 + r_1) d_{11}^2 + B_1, \quad C_{11}^1 = \frac{e_1}{d_1} d_{11}^2 + \bar{B}_1; \\ C_{20}^2 &= \frac{e_2}{d_2} d_{20}^2 - \frac{e_2}{d_2} (k_2 + r_2) d_{21}^2 + B_2, \quad C_{21}^2 = \frac{e_2}{d_2} d_{21}^2 + \bar{B}_2. \end{aligned} \quad (3.44)$$

В каждом из этих случаев также выписываем соответствующее единственное решение задачи 3.1.

Таким образом, доказано утверждение.

Теорема 3.3. Пусть в уравнении (3.1) $n = 2$ и выполняются условия теоремы 3.1. Тогда задача 3.1 имеет единственное решение, которое в зависимости от ее условий, выражается формулой

$$y(x) = U_{(\alpha),(b)}^{(2)}[p(x), q(x), f(x), C_{00}^2, C_{01}^2; C_{10}^1, C_{11}^1; C_{10}^2, C_{11}^2; C_{20}^1, C_{21}^1; C_{20}^2, C_{21}^2; C_{30}^1, C_{31}^1],$$

где постоянные $C_{0j}^2, C_{ij}^1, C_{ij}^2, i = 1, 2, C_{3j}^1, j = 0, 1$ определяются формулой (3.36) совместно с группами формул (3.37), (3.38); (3.39), (3.40); (3.41), (3.42) и (3.43), (3.44), соответственно.

Задача 3.2 (типа линейного сопряжения). Найти решение уравнения (3.1) таким образом, чтобы выполнялась следующая система условий:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} \{ \exp[p_0^2(b_1 - 0) \omega_{b_1}^{\alpha_1, -}(x)] A_{(\alpha),(b)}^j y \}_{x=b_1-0} + \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} \{ \exp[-p_1^1(b_1 + 0) \omega_{b_1}^{\alpha_1, +}(x)] A_{(\alpha),(b)}^j y \}_{x=b_1+0} + \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} \{ \exp[p_1^2(b_2 - 0) \omega_{b_2}^{\alpha_2, -}(x)] A_{(\alpha),(b)}^j y \}_{x=b_2-0} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} \{ \exp[-p_2^1(b_2 + 0) \omega_{b_2}^{\alpha_2,+}(x)] A_{(\alpha),(b)}^j y \}_{x=b_2+0} + \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(4n+j)} \{ \exp[p_2^2(b_3 - 0) \omega_{b_3}^{\alpha_3,-}(x)] A_{(\alpha),(b)}^j y \}_{x=b_3-0} + \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(5n+j)} \{ \exp[-p_3^1(b_3 + 0) \omega_{b_3}^{\alpha_3,+}(x)] A_{(\alpha),(b)}^j y \}_{x=b_3+0} = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1,4n}, \quad (3.45)
\end{aligned}$$

где b_{kj} и ε_k , $j = \overline{0, (6n-1)}$ - заданные вещественные числа.

Исследование задачи 3.2. в общем случае. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Представление (3.10) общего решения уравнения (3.1) подчиним условиям (3.45). Тогда в силу характеристических равенств (3.12) - (3.17) получим следующую с.л.а.у. с $4n$ уравнениями и $6n$ неизвестными C_{0j}^2 , C_{ij}^1 , C_{ij}^2 , $i = 1, 2$, C_{3j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} (-1)^j C_{0j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} C_{1j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} (-1)^j C_{1j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} C_{2j}^1 + \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(4n+j)} (-1)^j C_{2j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(5n+j)} C_{3j}^1 = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1,4n}. \quad (3.46)
\end{aligned}$$

К системе (3.46) присоединим имеющие место для представления (3.10) определённые треугольные с.л.а.у. (3.11):

$$\begin{aligned}
& K_{b_{i,s}}^{\alpha_{i,+}} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1]_{x=x_i^0} = \\
& = K_{b_{i+1,s}}^{\alpha_{i+1,-}} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2]_{x=x_i^0}, s = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Используя их систему (3.46) можно преобразовать в с.л.а.у. из $4n$ уравнений с $4n$ неизвестными, равносильной ей вместе с (3.11). Сделать это можно следующими четырьмя способами в соответствии с правилами а) - г), приведёнными в пункте 3.1:

а) неизвестные C_{1j}^2 и C_{2j}^2 , $j = \overline{0, (n-1)}$ выразим через неизвестные C_{1j}^1 и C_{2j}^1 из систем (3.11). Тогда после некоторых упрощений система (3.46) приводится к с.л.а.у. с $4n$ уравнениями и неизвестными C_{0j}^2 , C_{ij}^1 , $i = 1, 2$,

$C_{3j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$, которую обозначим как (3.46а);

б) неизвестные C_{1j}^2 и $C_{2j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$ выразим через неизвестные C_{1j}^1 и C_{2j}^2 из систем (3.11). Тогда система (3.46) преобразуется в с.л.а.у. с $4n$ уравнениями и неизвестными $C_{0j}^2, C_{1j}^1, C_{2j}^2, C_{3j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$, которую обозначим как (3.46б);

в) неизвестные C_{1j}^1 и $C_{2j}^2, j = \overline{0, (n-1)}$, выразим через неизвестные C_{1j}^2 и C_{2j}^1 из систем (3.11). Тогда система (3.46) преобразуется в с.л.а.у. с $4n$ уравнениями и неизвестными $C_{0j}^2, C_{1j}^2, C_{2j}^1, C_{3j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$, которую обозначим как (3.46в);

г) неизвестные C_{1j}^1 и $C_{2j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$, выразим через неизвестные C_{1j}^2 и C_{2j}^2 из систем (3.11). Тогда система (3.46) преобразуется в с.л.а.у. с $4n$ уравнениями и неизвестными $C_{0j}^2, C_{1j}^2, C_{2j}^2, C_{3j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$, которую обозначим как (3.46г).

Из этих рассуждений вытекает, что каждая из систем (3.46а), (3.46б), (3.46в), (3.46г), вместе с системой (3.11) является следствием системы (3.46), (3.11) и обратно, поэтому они эквивалентны. Значит, эквивалентны между собой и системы (3.46а), (3.46б), (3.46в), (3.46г) в связке с системой (3.11).

Таким образом, исследование разрешимости задачи 3.2 приводиться к изучению систем (3.46а), (3.46б), (3.46в), (3.46г), исследуем которое, например, изучая систему (3.46а) [52].

Пусть в условиях задачи 3.2 числа b_{kj} и $\varepsilon_k, k = \overline{1, 4n}, j = \overline{0, (6n-1)}$ такие, что в системе (3.46а):

1) ранг основной матрицы есть $r = 4n$, тогда система определённа, это число будет и рангом расширенной матрицы. Решая её, находим неизвестные $C_{0j}^2, C_{ij}^1, i = 1, 2, C_{3j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$. Далее в системах (3.11) неизвестные $C_{ij}^1, i = 1, 2$ заменяем найденными их числовыми значениями. Из полученной системы однозначно находим значение неизвестных C_{1j}^2 и $C_{2j}^2, j = \overline{0, (n-1)}$. Таким

образом, все неизвестные, входящие в систему (3.46) однозначно определяются, подставляя значение которых в представление (3.10) находим единственное решение $y(x)$ задачи 3.2.

2) ранг основной матрицы есть $r < 4n$ и равен рангу расширенной матрицы. Тогда система (3.46а) совместна, точнее она, также и система (3.11) имеет бесконечное число решений, зависящих от $4n - r$ произвольных постоянных. В этом случае задача 3.2 имеет бесконечное множество решений.

3) ранг основной матрицы $r < 4n$ и не равен рангу расширенной матрицы. Тогда система (3.46а) несовместна и задача 3.2 не имеет решения.

Покажем единственность полученного в случае 1) решения задачи подробными рассуждениями. Для этого предположим существования другого, отличного от $y(x)$, решения $y^*(x)$ задачи. Функция $y^*(x)$ тоже охватывается представлением (3.10). Постоянные соответствующие ей по формулам (3.12) - (3.17) обозначим с теми же индексами, как и выше, только с дополнительным значком *, то есть как $C_{0j}^{2*}, C_{ij}^{1*}, C_{ij}^{2*}, i = 1, 2, C_{3j}^{1*}, j = \overline{0, (n-1)}$. Эти числа обращают в тождества систему (3.46) и из них постоянные $C_{ij}^{1*}, C_{ij}^{2*}, i = 1, 2$ связаны при помощи систем (3.11). Отсюда следует, что постоянные $C_{0j}^{2*}, C_{ij}^{1*}, i = 1, 2, C_{3j}^{1*}, j = \overline{0, (n-1)}$ образуют решение системы (3.46а) и поэтому совпадают с числами $C_{0j}^2, C_{ij}^1, i = 1, 2, C_{3j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$. Тогда, в силу систем (3.11) и числа C_{ij}^{2*} тоже совпадают с числами C_{ij}^2 . Итак, функции $y^*(x)$ в представлении (3.10) соответствуют те же постоянные, которые определяют функцию $y(x)$. Значит, $y^*(x) \equiv y(x)$ и задача 3.2 не имеет другого решения, кроме $y(x)$.

Обобщая приходим к следующему заключению о разрешимости задачи 3.2:

Теорема 3.4. Пусть относительно уравнения (3.1) выполняются условия теоремы 3.1, а в системе (3.46а), (3.46б), (3.46в) или (3.46г) основная и расширенная матрицы имеют ранг, соответственно, равный r и ρ .

1) Если $r = \rho = 4n$, тогда задача 3.2 имеет единственное решение, которое получается из формулы (3.10) заменой в нём произвольных постоянных решением одной из систем (3.46а) (3.46б), (3.46в) и (3.46г), рассматриваемой вместе с системой (3.11);

2) Если $r = \rho < 4n$, тогда задача 3.2 имеет бесконечно много решений и её общее решение выражается через решения одной из систем (3.46а), (3.46б), (3.46в) и (3.46г), рассматриваемой вместе с системой (3.11), формулой (3.10), зависящей от $4n - r$ произвольных постоянных;

3) Если $r < 4n$, $r \neq \rho$, тогда каждая из систем (3.46а), (3.46б), (3.46в) (3.46г) вместе с системой (3.11) несовместна, и задача 3.2 не имеет решения.

Исследование задачи 3.2. в случае $n = 2$. Продолжим исследование задачи 3.2, чтобы получить более конкретные результаты.

Отметим, что в случае $n = 2$ с.л.а.у. (3.11) записываются в виде (3.35).

Случай 1. Из системы (3.35) неизвестные C_{ij}^2 выразим при помощи неизвестных C_{ij}^1 , $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, то есть

$$\begin{cases} C_{i0}^2 = \frac{d_i}{e_i} [C_{i0}^1 + (k_i + r_i)C_{i1}^1] + A_i, & C_{i1}^2 = -\frac{d_i}{e_i} C_{i1}^1 + \overline{A_i}, \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (3.47)$$

Результат подставляем в с.л.а.у. (3.46), которая в случае $n = 2$ состоит из 8 уравнений с 12 неизвестными, имеет вид

$$\begin{aligned} & b_{k0}C_{00}^2 - b_{k1}C_{01}^2 + b_{k2}C_{10}^1 + b_{k3}C_{11}^1 + b_{k4}C_{10}^2 - b_{k5}C_{11}^2 + b_{k6}C_{20}^1 + b_{k7}C_{21}^1 + \\ & + b_{k8}C_{20}^2 - b_{k9}C_{21}^2 + b_{k10}C_{30}^1 + b_{k11}C_{31}^1 = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, 8} \end{aligned} \quad (3.48)$$

и после некоторых преобразований, получим следующую с.л.а.у. из восьми уравнений и неизвестных C_{0j}^2 , C_{ij}^1 , $i = 1, 2$, C_{3j}^1 , $j = 0, 1$:

$$\begin{aligned} & b_{k0}C_{00}^2 - b_{k1}C_{01}^2 + m_{k0}^1C_{10}^1 + m_{k1}^1C_{11}^1 + n_{k0}^1C_{20}^1 + n_{k1}^1C_{21}^1 + \\ & + b_{k10}C_{30}^1 + b_{k11}C_{31}^1 = l_k^1, \quad k = \overline{1, 8} \end{aligned} \quad (3.49)$$

где

$$\begin{aligned} m_{k0}^1 &= b_{k2} + b_{k4} \frac{d_1}{e_1}, \quad m_{k1}^1 = b_{k3} + \frac{d_1}{e_1} [b_{k4}(k_1 + r_1) + b_{k5}], \quad n_{k0}^1 = b_{k6} + b_{k8} \frac{d_2}{e_2}, \\ n_{k1}^1 &= b_{k7} + \frac{d_2}{e_2} [b_{k8}(k_2 + r_2) + b_{k9}], \quad l_k^1 = \varepsilon_k - b_{k4}A_1 + b_{k5}\overline{A_1} - b_{k8}A_2 + b_{k9}\overline{A_2} \end{aligned}$$

- известные вещественные числа.

Пусть детерминант системы (3.49)

$$\Delta_{11} = \left| \begin{array}{cccccc} b_{k0} - b_{k1} & m_{k0}^1 & m_{k1}^1 & n_{k0}^1 & n_{k1}^1 & b_{k10} & b_{k11} \\ k = \overline{1,8} \end{array} \right|$$

отличен от нуля. Тогда ранг системы (3.49) $r = 8$ и единственное ее решение выражается равенствами

$$C_{00}^2 = \frac{\Delta_{11}^{00}}{\Delta_{11}}, \quad C_{01}^2 = \frac{\Delta_{11}^{01}}{\Delta_{11}}, \quad C_{i0}^1 = \frac{\Delta_{11}^{i0}}{\Delta_{11}}, \quad C_{i1}^1 = \frac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.50)$$

где Δ_{11}^{0j} , Δ_{11}^{ij} - есть детерминант, который получается из основного детерминанта Δ_{11} , если вместо столбца, соответствующего неизвестному C_{0j}^2 , C_{ij}^1 , $i = 1, 2, 3$, $j = 0, 1$ поставить столбец правой части системы (3.49). Теперь по известному значению переменных C_{ij}^1 из системы (3.47) находим значение неизвестных C_{ij}^2 , $i = 1, 2$, $j = 0, 1$. Имеем:

$$C_{i0}^2 = \frac{d_i}{e_i} \frac{\Delta_{11}^{i0}}{\Delta_{11}} + (k_i + r_i) \frac{d_i}{e_i} \frac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}} + A_i, \quad C_{i1}^2 = -\frac{d_i}{e_i} \frac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}} + \bar{A}_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.51)$$

Итак, все 12 неизвестные, входящие в систему (3.48) однозначно определены.

Их значение из равенств (3.50) и (3.51) подставляя в представление (3.11), получим единственное решение задачи 3.2.

Замечание 3.3. Если $\Delta_{11} = 0$, то возможны два варианта: основная и расширенная матрицы системы (3.49) имеют равный ранг, $r < 8$, тогда система совместна, она и система (3.47) имеют бесконечное множество решений. В этом случае задача 3.2 имеет бесконечное множество решений, выражаемых через решения системы (3.49), (3.47), формулой (3.10), зависящей от $8 - r$ произвольных постоянных; основная матрица системы (3.49) имеет ранг $r < 8$ не равный рангу расширенной матрицы, тогда эта система несовместна и, следовательно, задача 3.2 не имеет решения.

Случай 2. Систему (3.35) запишем в следующем равносильном виде:

$$\begin{cases} C_{10}^2 = \frac{d_1}{e_1} C_{10}^1 + \frac{d_1}{e_1} (k_1 + r_1) C_{11}^1 + A_1, & C_{11}^2 = -\frac{d_1}{e_1} C_{11}^1 + \bar{A}_1 \\ C_{20}^1 = \frac{e_2}{d_2} C_{20}^2 + \frac{e_2}{d_2} (k_2 + r_2) C_{21}^2 + B_2, & C_{21}^1 = -\frac{e_2}{d_2} C_{21}^2 + \bar{B}_2. \end{cases} \quad (3.52)$$

В системе (3.48) вместо неизвестных $C_{10}^2, C_{11}^2, C_{20}^1, C_{21}^1$ поставим их выражения из равенств (3.52). Тогда получим с.л.а.у. с неизвестными $C_{0j}^2, C_{1j}^1, C_{2j}^2, C_{3j}^1, j = 0,1$ вида:

$$\begin{aligned} b_{k0}C_{00}^2 - b_{k1}C_{01}^2 + m_{k0}^1C_{10}^1 + m_{k1}^1C_{11}^1 + n_{k0}^2C_{20}^2 + n_{k1}^2C_{21}^2 + \\ + b_{k10}C_{30}^1 + b_{k11}C_{31}^1 = l_k^2, \quad k = \overline{1,8}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

где m_{k0}^1, m_{k1}^1 - известные вещественные числа из случая 1, а

$$n_{k0}^2 = b_{k6}\frac{e_2}{d_2} + b_{k8}, \quad n_{k1}^2 = \frac{e_2}{d_2}[b_{k6}(k_2 + r_2) - b_{k7}] - b_{k9},$$

$$l_k^2 = \varepsilon_k - A_1b_{k4} + b_{k5}\overline{A}_1 - b_{k6}B_2 - b_{k7}\overline{B}_2.$$

Пусть определитель $\Delta_{12} = \begin{vmatrix} b_{k0} & -b_{k1} & m_{k0}^1 & m_{k1}^1 & n_{k0}^2 & n_{k1}^2 & b_{k10} & b_{k11} \\ k = \overline{1,8} \end{vmatrix}$ отличен от

нуля. Тогда ранг системы (3.53) $r = 8$, она определена и решение выражается формулами

$$C_{0j}^2 = \frac{\Delta_{12}^{0j}}{\Delta_{12}}, \quad C_{1j}^1 = \frac{\Delta_{12}^{1j}}{\Delta_{12}}, \quad C_{2j}^2 = \frac{\Delta_{12}^{2j}}{\Delta_{12}}, \quad C_{3j}^1 = \frac{\Delta_{12}^{3j}}{\Delta_{12}}, \quad j = 0,1. \quad (3.54)$$

Здесь детерминанты $\Delta_{12}^{0j}, \Delta_{12}^{1j}, \Delta_{12}^{2j}, \Delta_{12}^{3j}, j = 0,1$ находятся из детерминанта Δ_{12} заменой столбца, соответствующего неизвестному $C_{0j}^2, C_{1j}^1, C_{2j}^2, C_{3j}^1, j = 0,1$ в системе (3.53), столбцом правой части этой системы.

Найденное значение переменных $C_{1j}^1, C_{2j}^2, j = 0,1$ из формул (3.54), подставляя в равенства (3.52) находим значение остальных неизвестных так:

$$\begin{aligned} C_{10}^2 &= \frac{d_1}{e_1}\frac{\Delta_{12}^{10}}{\Delta_{12}} + \frac{d_1}{e_1}\frac{\Delta_{12}^{11}}{\Delta_{12}}(k_1 + r_1) + A_1, & C_{11}^2 &= -\frac{d_1}{e_1}\frac{\Delta_{12}^{11}}{\Delta_{12}} + \overline{A}_1, \\ C_{20}^1 &= \frac{e_2}{d_2}\frac{\Delta_{12}^{20}}{\Delta_{12}} + \frac{e_2}{d_2}\frac{\Delta_{12}^{21}}{\Delta_{12}}(k_2 + r_2) + B_2, & C_{21}^1 &= -\frac{e_2}{d_2}\frac{\Delta_{12}^{21}}{\Delta_{12}} + \overline{B}_2. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Значения произвольных постоянных из формул (3.54) и (3.55) внося в представление (3.10), получим единственное решение задачи 3.2.

Случай 3. Систему (3.35) разрешим относительно переменных $C_{1j}^1, C_{2j}^2,$

$j = 0,1$. Имеем:

$$\begin{cases} C_{10}^1 = \frac{e_1}{d_1}C_{10}^2 + \frac{e_1}{d_1}(k_1 + r_1)C_{11}^2 + B_1, & C_{11}^1 = -\frac{e_1}{d_1}C_{11}^2 + \overline{B}_1 \\ C_{20}^2 = \frac{d_2}{e_2}C_{20}^1 + \frac{d_2}{e_2}(k_2 + r_2)C_{21}^1 + A_2, & C_{21}^2 = -\frac{d_2}{e_2}C_{21}^1 + \overline{A}_2. \end{cases} \quad (3.56)$$

Полученные значения вносим систему (3.48), тогда получим следующую с.л.а.у. относительно неизвестных $C_{0j}^2, C_{1j}^2, C_{2j}^1, C_{3j}^1, j = 0,1$:

$$b_{k0}C_{00}^2 - b_{k1}C_{01}^2 + m_{k0}^2C_{10}^2 + m_{k1}^2C_{11}^2 + n_{k0}^1C_{20}^1 + n_{k1}^1C_{21}^1 + b_{k10}C_{30}^1 + b_{k11}C_{31}^1 = l_k^3, \\ k = \overline{1,8}, \quad (3.57)$$

где $m_{k0}^2 = b_{k2} \frac{e_1}{d_1} + b_{k4}$, $m_{k1}^2 = \frac{e_1}{d_1} [b_{k2}(k_1 + r_1) - b_{k3}] - b_{k5}$, n_{k0}^1, n_{k1}^1

- обозначают известные числа, введенные в случае 1, а

$$l_k^3 = \varepsilon_k - b_{k2}B_1 - b_{k3}\overline{B}_1 - b_{k8}A_2 + b_{k9}\overline{A}_2.$$

Пусть детерминант $\Delta_{21} = \begin{vmatrix} b_{k0} & -b_{k1} & m_{k0}^2 & m_{k1}^2 & n_{k0}^1 & n_{k1}^1 & b_{k10} & b_{k11} \\ k = \overline{1,8} \end{vmatrix}$ не равен нулю.

Тогда ранг системы (3.57) есть, $r = 8$ и единственное её решение дается формулами

$$C_{0j}^2 = \frac{\Delta_{21}^{0j}}{\Delta_{21}}, \quad C_{1j}^2 = \frac{\Delta_{21}^{1j}}{\Delta_{21}}, \quad C_{2j}^1 = \frac{\Delta_{21}^{2j}}{\Delta_{21}}, \quad C_{3j}^1 = \frac{\Delta_{21}^{3j}}{\Delta_{21}}, \quad j = 0,1, \quad (3.58)$$

где определители $\Delta_{21}^{0j}, \Delta_{21}^{1j}, \Delta_{21}^{2j}, \Delta_{21}^{3j}$ находятся из определителя Δ_{21} путем замены столбцов, соответствующих в системе (3.57) неизвестным $C_{0j}^2, C_{1j}^2, C_{2j}^1, C_{3j}^1, j = 0,1$, столбцом правой части этой системы. Подставляя найденное значение неизвестных C_{1j}^2, C_{2j}^1 в равенства (3.56), соответствующее значение неизвестных $C_{1j}^1, C_{2j}^2, j = 0,1$ находим так:

$$C_{10}^1 = \frac{e_1}{d_1} \frac{\Delta_{21}^{10}}{\Delta_{21}} + \frac{e_1}{d_1} (k_1 + r_1) \frac{\Delta_{21}^{11}}{\Delta_{21}} + B_1, \quad C_{11}^1 = -\frac{e_1}{d_1} \frac{\Delta_{21}^{11}}{\Delta_{21}} + \overline{B}_1, \\ C_{20}^2 = \frac{d_2}{e_2} \frac{\Delta_{21}^{20}}{\Delta_{21}} + \frac{d_2}{e_2} (k_2 + r_2) \frac{\Delta_{21}^{21}}{\Delta_{21}} + A_2, \quad C_{21}^2 = -\frac{d_2}{e_2} \frac{\Delta_{21}^{21}}{\Delta_{21}} + \overline{A}_2. \quad (3.59)$$

Данные из формул (3.58) и (3.59) внося в формулу (3.10), получим решение задачи типа линейного сопряжения 3.2.

Случай 4. Теперь систему (3.35) записываем в виде

$$\begin{cases} C_{10}^1 = \frac{e_1}{d_1} C_{10}^2 + \frac{e_1}{d_1} (k_1 + r_1) C_{11}^2 + B_1, & C_{11}^1 = -\frac{e_1}{d_1} C_{11}^2 + \overline{B}_1 \\ C_{20}^1 = \frac{e_2}{d_2} C_{20}^2 + \frac{e_2}{d_2} (k_2 + r_2) C_{21}^2 + B_2, & C_{21}^1 = -\frac{e_2}{d_2} C_{21}^2 + \overline{B}_2. \end{cases} \quad (3.60)$$

Используя эти равенства, систему (3.48) преобразуем. Тогда получим

следующую с.л.а.у. относительно неизвестных $C_{0j}^2, C_{1j}^2, C_{2j}^2, C_{3j}^1, j = 0,1$:

$$b_{k0}C_{00}^2 - b_{k1}C_{01}^2 + m_{k0}^2C_{10}^2 + m_{k1}^2C_{11}^2 + n_{k0}^2C_{20}^2 + n_{k1}^2C_{21}^2 + b_{k10}C_{30}^1 + b_{k11}C_{31}^1 = l_k^4, \\ k = \overline{1,8}, \quad (3.61)$$

где m_{k0}^2, m_{k1}^2 и n_{k0}^2, n_{k1}^2 известные числа, введенные в случаях 3 и 2, а

$$l_k^4 = \varepsilon_k - B_1b_{k2} - \overline{B}_1b_{k3} - b_{k6}B_2 - b_{k7}\overline{B}_2.$$

Допустим, что основной детерминант этой системы

$$\Delta_{22} = \left| \begin{array}{cccccc} b_{k0} & -b_{k1} & m_{k0}^2 & m_{k1}^2 & n_{k0}^2 & n_{k1}^2 & b_{k10} & b_{k11} \\ k = \overline{1,8} \end{array} \right|$$

не равен нулю. Тогда единственное решение системы (3.61) находится так:

$$C_{0j}^2 = \frac{\Delta_{22}^{0j}}{\Delta_{22}}, \quad C_{1j}^2 = \frac{\Delta_{22}^{1j}}{\Delta_{22}}, \quad C_{2j}^2 = \frac{\Delta_{22}^{2j}}{\Delta_{22}}, \quad C_{3j}^1 = \frac{\Delta_{22}^{3j}}{\Delta_{22}}, \quad j = 0,1 \quad (3.62)$$

где определители $\Delta_{22}^{0j}, \Delta_{22}^{1j}, \Delta_{22}^{2j}, \Delta_{22}^{3j}$ находятся из определителя Δ_{22} путем замены столбцов, соответствующих в системе (3.61) переменным $C_{0j}^2, C_{1j}^2, C_{2j}^2, C_{3j}^1, j = 0,1$, столбцом правой части этой системы. Внося значения переменных $C_{1j}^2, C_{2j}^2, j = 0,1$ из формул (3.62) в равенства (3.60), находим значение неизвестных $C_{1j}^1, C_{2j}^1, j = 0,1$ следующим образом:

$$C_{10}^1 = \frac{e_1}{d_1} \frac{\Delta_{22}^{10}}{\Delta_{22}} + \frac{e_1}{d_1} (k_1 + r_1) \frac{\Delta_{22}^{11}}{\Delta_{22}} + B_1, \quad C_{11}^1 = -\frac{e_1}{d_1} \frac{\Delta_{22}^{11}}{\Delta_{22}} + \overline{B}_1, \\ C_{20}^1 = \frac{e_2}{d_2} \frac{\Delta_{22}^{20}}{\Delta_{22}} + \frac{e_2}{d_2} (k_2 + r_2) \frac{\Delta_{22}^{21}}{\Delta_{22}} + B_2, \quad C_{21}^1 = -\frac{e_2}{d_2} \frac{\Delta_{22}^{21}}{\Delta_{22}} + \overline{B}_2. \quad (3.63)$$

Далее, как в предыдущих случаях, по формуле (3.10) выписываем решение задачи 3.2.

Замечание 3.4. Утверждения, подобные приведенным в замечании 3.3 утверждениям, верны и для случаев 2 - 4 исследования задачи 3.2.

Замечание 3.5. Из проведённых выше рассуждений следует, что каждая с.л.а.у. (3.49), (3.53), (3.57) и (3.61), взятое вместе с с.л.а.у. (3.35) эквивалентна системе (3.48), (3.35), поэтому они эквивалентны между собой.

Итак, доказана следующая

Теорема 3.5. Пусть в уравнении (3.1) $n = 2$ и выполняются условия теоремы 3.1.

1) Если детерминант Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{21} или Δ_{22} не равен нулю, то ранг r основной матрицы систем (3.49), (3.53), (3.57) и (3.61) равен рангу ρ их расширенной матрицы, $r = \rho = 8$ и задача 3.2 имеет единственное решение, которое выражается формулой

$$y(x) = U_{(\alpha),(b)}^{(2)}[p(x), q(x), f(x), C_{00}^2, C_{01}^2; C_{10}^1, C_{11}^1; C_{10}^2, C_{11}^2; C_{20}^1, C_{21}^1; C_{20}^2, C_{21}^2; C_{30}^1, C_{31}^1], \quad (3.64)$$

где постоянные $C_{0j}^2, C_{ij}^1, C_{ij}^2, i = 1, 2, C_{3j}^1, j = 0, 1$ определяются одной из следующих групп формул: (3.50), (3.51); (3.54), (3.55); (3.58), (3.59); (3.62), (3.63).

2) Если детерминант $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21}$ или Δ_{22} равен нулю, то $r < 8$. При этом, когда $r = \rho$ каждая из систем (3.49), (3.53), (3.57) и (3.61) и поэтому система (3.48), (3.35) имеет бесконечно много решений, их общее решение зависит от $8 - r$ произвольных постоянных, тогда и задача 3.2 имеет бесконечно много решений, выражаемых через решения системы (3.48), (3.35) формулой (3.64), зависящей от $8 - r$ произвольных постоянных, а когда $r \neq \rho$ системы (3.49), (3.53), (3.57), (3.61) несовместны, поэтому система (3.48), (3.35) также несовместна и задача 3.2 не имеет решения.

ГЛАВА 4. ОБЫКНОВЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА С ЛЕВОЙ ГРАНИЧНОЙ СЛАБО СИНГУЛЯРНОЙ И ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ

Полученные в главах 2 и 3 результаты позволяют изучить уравнение (0.1), и в случаях, когда особые точки имеют разный характер сингулярности, то есть когда среди них имеется, слабо сингулярные, сингулярные и сверхсингулярные точки. В таких случаях в окрестности особых точек уравнение (0.1) будет принадлежат к разному типу уравнений, около одних будет слабо сингулярным, около других сингулярным или сверхсингулярным.

В главе 4 уравнение (0.1) изучается в случае, когда особые точки $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ расположены в виде $a = b_1 < b_2 < b_3 < b$ и $(\alpha) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \{\alpha_1, 1, 1\}$, $0 < \alpha_1 < 1$, то есть, когда b_1 является слабо сингулярной точкой, совпадающей с левой граничной точкой интервала $\Gamma = (a, b)$, а b_2, b_3 -сингулярные точки, являющиеся внутренними точками этого интервала. Изучаемое уравнение запишем в виде

$$A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^n y = f(x) |x - b_1|^{-\alpha_1} \prod_{i=2}^3 |x - b_i|^{-1}, x \in \Gamma_{(b)} \quad (4.1)$$

где

$$A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)} y \equiv y' + p(x) |x - b_1|^{-\alpha_1} \left(\prod_{i=2}^3 |x - b_i|^{-1} \right) y - p(x) |x - b_1|^{-\alpha_1} \prod_{i=2}^3 |x - b_i|^{-1}.$$

Глава 4 состоит из двух разделов. В разделе 4.1 главы решается вопрос получения интегрального представления общего решения уравнения (4.1), доказываются характеристические свойства представления, то есть его формулы обращения и представление применяется для изучения поведения решений в окрестности особых точек.

В разделе 4.2 полученное представление общего решения уравнения (4.1) применяется для постановки задач Коши-Рикье, типа линейного сопряжения с

условиями в особых точках, их исследования, а также нахождения решения в явном виде.

В разделе 4.3 главы приводится пример.

Результаты, приведенные в главе 4, опубликованы в работах [5-А], [14-А], [15-А] и [16-А].

4.1. Интегральное представление общего решения уравнения (4.1) и его свойства

Множество $\Gamma_{(b)}$ представим как сумму трех интервалов $\Gamma_1 = (b_1, b_2)$, $\Gamma_2 = (b_2, b_3)$, $\Gamma_3 = (b_3, b)$, то есть $\Gamma_{(b)} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Уравнение (4.1) рассмотрим на интервале Γ_1 , где граничные точки являются особыми точками уравнения. Фиксируем произвольную точку x_1^0 интервала Γ_1 и представим его в виде объединения промежутков $\Gamma_1^1 = (b_1, x_1^0]$, $\Gamma_1^2 = [x_1^0, b_2)$. На промежутке Γ_1^1 точка b_1 является единственной левой граничной слабо сингулярной точкой уравнения (4.1). В этой точке функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ доопределим по непрерывности и с их помощью вводим новые функции равенствами

$$p_1^1(x) = p(x) \prod_{k=2}^3 (b_k - x)^{-1}, \quad q_1^1(x) = q(x) \prod_{k=2}^3 (b_k - x)^{-1},$$

$$f_1^1(x) = f(x) \prod_{k=2}^3 (b_k - x)^{-1},$$

которые будут непрерывными на отрезке $\overline{\Gamma_1^1}$. Тогда по формуле (2.61) главы 2 общее решение уравнения (0.1) на Γ_1^1 и степени оператора $A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}$ от него записываются в виде

$$A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y = \exp \left[-u_{p_1^1, b_1}^{\alpha_1, +}(x) \right] \left\{ \int_{b_1}^x \left[\sum_{j=0}^{n-s-1} \frac{(x-\xi)^j}{j!} q_1^1(\xi) + \frac{(x-\xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} f_1^1(\xi) \right] \times \right.$$

$$\left. \times (\xi - b_1)^{-\alpha_1} \exp \left[-u_{p_1^1, b_1}^{\alpha_1, +}(\xi) \right] d\xi + \sum_{j=s}^{n-1} C_{1j}^1 \frac{(x - b_1)^{j-s}}{(j-s)!} \right\} \equiv$$

$$\equiv I_{b_{1,s}}^{\alpha_1,+} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, C_{1(s+1)}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1], s = \overline{0, (n-1)} \quad (4.2)$$

$$(I_{b_{1,0}}^{\alpha_1,+} [\dots] \equiv I_{b_1}^{\alpha_1,+} [\dots]) \text{ где } u_{p_1^1, b_1}^{\alpha_1,+}(x) = \int_{b_1}^x p_1^1(t)(t - b_1)^{-\alpha_1} dt, \text{ а } C_{1j}^1, j = \overline{0, (n-1)} -$$

произвольные постоянные.

Теперь уравнение (4.1) рассмотрим на промежутке $\Gamma_1^2 = [x_1^0, b_2)$. В этом случае функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ в точке b_2 доопределим с помощью их левого предельного значения и с их помощью вводим новые функции

$$p_1^2(x) = p(x)(x - b_1)^{-\alpha_1}(b_3 - x)^{-1}, \quad q_1^2(x) = q(x)(x - b_1)^{-\alpha_1}(b_3 - x)^{-1}, \\ f_1^2(x) = f(x)(x - b_1)^{-\alpha_1}(b_3 - x)^{-1}, \text{ непрерывные на } \overline{\Gamma_1^2} \text{ и, уравнение (4.1)}$$

изучим, как в разделе 2.1, как уравнение, имеющее единственную правую граничную сингулярную точку b_2 .

Предположим функцию $p(x)$ таковой, что функция $p_1^2(x)$ в точке b_2 удовлетворяет условию Гельдера, то есть

$$|p_1^2(b_2 - 0) - p_1^2(x)| \leq H_1^2(b_2 - x)^{h_1^2}, \quad H_1^2 > 0, \quad 0 < h_1^2 \leq 1, \quad (4.3)$$

при $x \rightarrow b_2 - 0$ и выполняется неравенство $p(b_2 - 0) < 0$, из которого следует неравенство $p_1^2(b_2 - 0) = p(b_2 - 0)(b_2 - b_1)^{-\alpha_1}(b_3 - b_2)^{-1} < 0$. Тогда на основании формулы (2.9) главы 2, для общего решения уравнения (4.1) и степеней оператора $A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}$ от него на промежутке Γ_1^2 имеет место следующая формула:

$$A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y = (b_2 - x)^{p_1^2(b_2 - 0)} \exp \left[-w_{p_1^2, b_2}^{1,-}(x) \right] \left\{ (-1)^s \sum_{j=s}^{n-1} C_{1j}^2 \frac{(b_2 - x)^{j-s}}{(j-s)!} - \right. \\ \left. - \int_x^{b_2} \left[\sum_{j=0}^{n-s-1} \frac{(x - \xi)^j}{j!} q_1^2(\xi) + \frac{(x - \xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} f_1^2(\xi) \right] (b_2 - \xi)^{-p_1^2(b_2 - 0) - 1} \exp \left[w_{p_1^2, b_2}^{1,-}(\xi) \right] d\xi \right\} \equiv \\ \equiv K_{b_{2,s}}^{1,-} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, C_{1(s+1)}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2], \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (4.4)$$

$$(K_{b_{2,0}}^{1,-} [\dots] \equiv K_{b_2}^{1,-} [\dots]), \text{ где } w_{p_1^2, b_2}^{1,-}(x) = \int_x^{b_2} \frac{p_1^2(b_2 - 0) - p_1^2(t)}{b_2 - t} dt, \text{ а } C_{1j}^2,$$

$j = \overline{0, (n-1)}$ - произвольные постоянные.

Формула (4.4) выражает общее решение уравнения (4.1) и степени оператора $A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}$ от него и тогда, когда взамен условия $p_1^2(b_2 - 0) < 0$ выполняется условие $p_1^2(b_2 - 0) > 0$, а функции $q_1^2(x)$ и $f_1^2(x)$ при $x \rightarrow b_2 - 0$ стремятся к нулю и подчиняются, соответственно асимптотическому равенству: $q_1^2(x) = o[(b_2 - x)^{\beta_1^2}]$, $f_1^2(x) = o[(b_2 - x)^{\gamma_1^2}]$, $\beta_1^2, \gamma_1^2 > p_1^2(b_2 - 0)$. Функции $p_1^2(x)$, $q_1^2(x)$ и $f_1^2(x)$, как следует из их определения, подчиняются этим требованиям, если взамен неравенства $p(b_2 - 0) < 0$ имеет место неравенство $p(b_2 - 0) > 0$ и функции $q(x)$ и $f(x)$ подчиняются, соответственно, асимптотическому равенству

$$q(x) = o[(b_2 - x)^{\beta_1^2}], \quad f(x) = o[(b_2 - x)^{\gamma_1^2}], \quad \beta_1^2, \gamma_1^2 > p_1^2(b_2 - 0) \quad (4.5)$$

при $x \rightarrow b_2 - 0$.

Формулы (4.2) и (4.4) совместно определяют общее решение уравнения (4.1) и степени оператора $A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}$ от этой функции на интервале Γ_1 , если они удовлетворяют требованию определения решения уравнения в точке x_1^0 , то есть, если выполняются предельные равенства

$$\begin{aligned} I_{b_1, s}^{\alpha_1, +} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, C_{1(s+1)}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0-0} = \\ = K_{b_2, s}^{1, -} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, C_{1(s+1)}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0+0}, \quad s = \overline{0, (n-1)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

совместно образующие неоднородную с.л.а.у треугольной формы относительно каждой группы произвольных постоянных $C_{1j}^1, C_{1j}^2, j = \overline{0, (n-1)}$. Из явного вида выражений, стоящих в левой и правой частях системы (4.6), следует, что в обеих этих случаях её основная и расширенная матрицы имеют ранг равный n . Следовательно, каждая группа из произвольных постоянных C_{1j}^1 и C_{1j}^2 , может быть выражена через другую однозначно из системы (4.6).

Уравнение (4.1) рассмотрим на интервале Γ_2 , где обе граничные точки являются его сингулярными точками. В этом случае функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ в точках b_2 и b_3 доопределим по непрерывности, соответственно, с помощью их правого и левого предельного значения. Тогда повторяя рассуждения, проведённые для одноименного интервала в разделе 2.1 главы 2, получим

следующую формулу для общего решения уравнения (4.1) и степеней оператора $A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}$ от него:

$$A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y = \begin{cases} K_{b_2, s}^{1, +} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, C_{2(s+1)}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1] & \text{при } x \in \Gamma_2^1 \\ K_{b_3, s}^{1, -} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, C_{2(s+1)}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2] & \text{при } x \in \Gamma_2^2 \end{cases}$$

$$s = \overline{0, (n-1)}, \quad (4.7)$$

где

$$K_{b_2, s}^{1, +} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, C_{2(s+1)}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1] \equiv (x - b_2)^{-p_2^1(b_2+0)} \exp \left[-w_{p_2^1, b_2}^{1, +}(x) \right] \times$$

$$\times \left\{ \int_{b_2}^x \left[\sum_{j=0}^{n-s-1} \frac{(x-\xi)^j}{j!} q_2^1(\xi) + \frac{(x-\xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} f_2^1(\xi) \right] (\xi - b_2)^{p_2^1(b_2+0)-1} \exp \left[w_{p_2^1, b_2}^{1, +}(\xi) \right] d\xi + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=s}^{n-1} C_{2j}^1 \frac{(x-b_2)^{j-s}}{(j-s)!} \right\},$$

$$K_{b_3, s}^{1, -} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, C_{2(s+1)}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2] \equiv (b_3 - x)^{p_2^2(b_3-0)} \exp \left[-w_{p_2^2, b_3}^{1, -}(x) \right] \times$$

$$\times \left\{ (-1)^s \sum_{j=s}^{n-1} C_{2j}^2 \frac{(b_3-x)^{j-s}}{(j-s)!} - \int_x^{b_3} \left[\sum_{j=0}^{n-s-1} \frac{(x-\xi)^j}{j!} q_2^2(\xi) + \frac{(x-\xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} f_2^2(\xi) \right] \times \right.$$

$$\left. \times (b_3 - \xi)^{-p_2^2(b_3-0)-1} \exp \left[w_{p_2^2, b_3}^{1, -}(\xi) \right] d\xi \right\}, \quad w_{p_2^1, b_2}^{1, +}(x) = \int_{b_2}^x \frac{p_2^1(t) - p_2^1(b_2+0)}{t - b_2} dt,$$

$$w_{p_2^2, b_3}^{1, -}(x) = \int_x^{b_3} \frac{p_2^2(b_3-0) - p_2^2(t)}{b_3 - t} dt, \quad \Gamma_2 = \Gamma_2^1 \cup \Gamma_2^2, \quad \Gamma_2^1 = (b_2, x_2^0], \quad \Gamma_2^2 = [x_2^0, b_3),$$

x_2^0 - фиксированная точка на Γ_2 , $p_2^i(x)$, $q_2^i(x)$, $f_2^i(x)$, $i = 1, 2$ известные функции, определяемые, соответственно, при помощи функций $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ следующими равенствами:

$$\begin{aligned} p_2^1(x) &= p(x)(x - b_1)^{-\alpha_1}(b_3 - x)^{-1}, & q_2^1(x) &= q(x)(x - b_1)^{-\alpha_1}(b_3 - x)^{-1}, \\ f_2^1(x) &= f(x)(x - b_1)^{-\alpha_1}(b_3 - x)^{-1}, & p_2^2(x) &= p(x)(x - b_1)^{-\alpha_1}(x - b_2)^{-1}, \\ q_2^2(x) &= q(x)(x - b_1)^{-\alpha_1}(x - b_2)^{-1}, & f_2^2(x) &= f(x)(x - b_1)^{-\alpha_1}(x - b_2)^{-1} \end{aligned}$$

которые подчиняются ниже приводимым условиям:

$$p_2^1(b_2+0) = p(b_2+0)(b_2 - b_1)^{-\alpha_1}(b_3 - b_2)^{-1} > 0, \text{ что имеет место в случае } p(b_2+0) > 0, \text{ а функция } p_2^1(x) \text{ в точке } b_2 \text{ удовлетворяет условию Гельдера}$$

$$|p_2^1(x) - p_2^1(b_2+0)| \leq H_2^1(x - b_2)^{h_2^1}, \quad H_2^1 > 0, \quad 0 < h_2^1 \leq 1, \quad \text{при } x \rightarrow b_2+0; \quad (4.8)$$

$p_2^2(b_3 - 0) = p(b_3 - 0)(b_3 - b_1)^{-\alpha_1}(b_3 - b_2)^{-1} < 0$, что имеет место в случае $p(b_3 + 0) < 0$, а функция $p_2^2(x)$ в точке b_3 удовлетворяет условию Гельдера

$$|p_2^2(b_3 - 0) - p_2^2(x)| \leq H_2^2(b_3 - x)^{h_2^2}, \quad H_2^2 > 0, \quad 0 < h_2^2 \leq 1, \quad \text{при } x \rightarrow b_3 - 0 \quad (4.9)$$

а C_{2j}^1 и C_{2j}^2 , $j = \overline{0, (n-1)}$ - произвольные постоянные.

В формуле (4.7), если вместо неравенства $p_2^1(b_2 + 0) > 0$ выполняется неравенство $p_2^1(b_2 + 0) < 0$, что имеет место в случае $p(b_2 + 0) < 0$, то дополнительно требуется, чтобы функции $q(x)$, $f(x)$ стремились к нулю со следующим, соответственно асимптотическим поведением:

$$q(x) = o[(x - b_2)^{\beta_2^1}], \quad f(x) = o[(x - b_2)^{\gamma_2^1}], \quad \beta_2^1, \gamma_2^1 > -p_2^1(b_2 + 0) \quad (4.10)$$

при $x \rightarrow b_2 + 0$,

если же вместо неравенства $p_2^2(b_3 - 0) < 0$ выполняется неравенство $p_2^2(b_3 - 0) > 0$, что имеет место в случае $p(b_3 - 0) > 0$, то требуется, чтобы функции $q(x)$ и $f(x)$ подчинялись, соответственно, асимптотическому равенству

$$q(x) = o[(b_3 - x)^{\beta_2^2}], \quad f(x) = o[(b_3 - x)^{\gamma_2^2}], \quad \beta_2^2, \gamma_2^2 > p_2^2(b_3 - 0) \quad (4.11)$$

при $x \rightarrow b_3 - 0$.

Также нужно учесть, что в формуле (4.7) произвольные постоянные C_{2j}^1 и C_{2j}^2 , $j = \overline{0, (n-1)}$, согласно определению решения уравнения (4.1), связаны следующей с.л.а.у:

$$\begin{aligned} & K_{b_2, s}^{1,+} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, C_{2(s+1)}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0-0} = \\ & = K_{b_3, s}^{1,-} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, C_{2(s+1)}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0+0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

Система (4.12) относительно каждой группы этих произвольных постоянных, если другую группу считать известной, имеет треугольную форму с равным n рангом основной и расширенной матриц. Это даёт возможность с её помощью каждую группу произвольных постоянных C_{2j}^1 , C_{2j}^2 , выразить однозначно через другую.

Теперь уравнение (4.1) рассмотрим на интервале Γ_3 , где уравнение имеет единственную левую граничную сингулярную точку b_3 . В этом случае функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ в точке b_3 доопределим с помощью их правого предельного

значения. Далее, повторяя рассуждения проведённые выше для случая промежутка Γ_2^1 , приходим к следующей формуле для общего решения и степеней оператора $A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}$ от него на промежутке Γ_3 :

$$\begin{aligned} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y &= (x - b_3)^{-p_3^1(b_3+0)} \exp \left[-w_{p_3^1, b_3}^{1,+}(x) \right] \left\{ \int_{b_3}^x \left[\sum_{j=0}^{n-s-1} \frac{(x-\xi)^j}{j!} q_3^1(\xi) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{(x-\xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} f_3^1(\xi) \right] (\xi - b_3)^{p_3^1(b_3+0)-1} \exp \left[w_{p_3^1, b_3}^{1,+}(\xi) \right] d\xi + \sum_{j=s}^{n-1} C_{3j}^1 \frac{(x-b_3)^{j-s}}{(j-s)!} \right\} \equiv \\ &\equiv K_{b_3, s}^{1,+} [p_3^1(x), q_3^1(x), f_3^1(x), C_{3s}^1, C_{3(s+1)}^1, \dots, C_{3(n-1)}^1], s = \overline{0, (n-1)}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$p_3^1(x) = p(x)(x - b_1)^{-\alpha_1}(x - b_2)^{-1}, \quad q_3^1(x) = q(x)(x - b_1)^{-\alpha_1}(x - b_2)^{-1},$$

$f_3^1(x) = f(x)(x - b_1)^{-\alpha_1}(x - b_2)^{-1}$, выполняется неравенство

$p_3^1(b_3 + 0) = p(b_3 + 0)(b_3 - b_1)^{-\alpha_1}(b_3 - b_2)^{-1} > 0$, что имеет место в случае $p(b_3 + 0) > 0$, функция $p_3^1(x)$ в точке b_3 подчиняется условию Гельдера:

$$|p_3^1(x) - p_3^1(b_3 + 0)| \leq H_3^1(x - b_3)^{h_3^1}, \quad H_3^1 > 0, \quad 0 < h_3^1 \leq 1, \quad \text{при } x \rightarrow b_3 + 0, \quad (4.14)$$

$$w_{p_3^1, b_3}^{1,+}(x) = \int_{b_3}^x \frac{p_3^1(t) - p_3^1(b_3 + 0)}{t - b_3} dt, \text{ а } C_{3j}^1, j = \overline{0, (n-1)} - \text{произвольные}$$

постоянные.

Формула (4.13) выражает общее решение уравнения (4.1) и степени оператора $A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}$ от него и в случае, когда вместо условия $p(b_3 + 0) > 0$ выполняется условие $p(b_3 + 0) < 0$ при условии, что функции $q(x), f(x)$ стремятся к нулю со следующим, соответственно, асимптотическим поведением:

$$q(x) = o[(x - b_3)^{\beta_3^1}], \quad f(x) = o[(x - b_3)^{\gamma_3^1}], \quad \beta_3^1, \gamma_3^1 > -p_3^1(b_3 + 0), \quad (4.15)$$

при $x \rightarrow b_3 + 0$.

Формулы (4.2), (4.4), (4.7), (4.13) в совокупности выражают общее решение уравнения (4.1) и степени оператора $A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}$ от него на множестве $\Gamma_{(b)}$,

которое записывается в виде

$$A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y = \begin{cases} I_{b_1, s}^{\alpha_1, +} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, C_{1(s+1)}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1] & \text{при } x \in \Gamma_1^1 \\ K_{b_2, s}^{1, -} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, C_{1(s+1)}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2] & \text{при } x \in \Gamma_1^2 \\ K_{b_2, s}^{1, +} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, C_{2(s+1)}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1] & \text{при } x \in \Gamma_2^1 \\ K_{b_3, s}^{1, -} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, C_{2(s+1)}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2] & \text{при } x \in \Gamma_2^2 \\ K_{b_3, s}^{1, +} [p_3^1(x), q_3^1(x), f_3^1(x), C_{3s}^1, C_{3(s+1)}^1, \dots, C_{3(n-1)}^1] & \text{при } x \in \Gamma_3 \end{cases} \equiv$$

$$\equiv V_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b), s}^{(n)} [p(x), q(x), f(x), C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1; C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2; C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1; C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2; C_{3s}^1, C_{3(s+1)}^1, \dots, C_{3(n-1)}^1], \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad \left(V_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b), 0}^{(n)} [\dots] \equiv V_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^{(n)} [\dots] \right) \quad (4.16)$$

Рассуждения, дословно повторяющие доказательства, проведённые в пунктах 1) - 4) раздела 2.1 главы 2, позволяют рассмотреть формулу (4.16) в четырёх равносильных формах в зависимости от расположения произвольных постоянных в первой, второй и третьей, четвёртой парах её строк, используя их связь, выражаемую с.л.а.у. (4.6) и (4.12). Также заключаем, что формула (4.16) для общего решения уравнения (4.1) и степеней оператора $A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}$ от него остаётся верной при всевозможных сочетаниях знаков чисел $p(b_i - 0)$ и $p(b_i + 0)$, $i = 2, 3$. При этом нужно дополнительно требовать, чтобы функции $q(x)$ и $f(x)$ стремились к нулю, когда $x \rightarrow b_i - 0$ и подчинялись, соответственно, условиям (4.5) и (4.11), в случае $p(b_i - 0) > 0$, $i = 2, 3$; стремились к нулю при $x \rightarrow b_i + 0$ и удовлетворяли, соответственно, асимптотическим равенствам (4.10) и (4.15), в случае $p(b_i + 0) < 0$, $i = 2, 3$.

Таким образом, доказано следующее итоговое утверждение:

Теорема 4.1. Пусть, в уравнении (4.1) слабо сингулярная точка b_1 и сингулярные точки b_2 и b_3 расположены в виде $a = b_1 < b_2 < b_3 < b$. Далее

$$\Gamma_{(b)} = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i, \quad \Gamma_i = (b_i, b_{i+1}), \quad i = 1, 2, \quad \Gamma_3 = (b_3, b), \quad \text{а } x_i^0 - \text{обозначает}$$

фиксированную точку интервала Γ_i , которая разделяет этот интервал на промежутки $\Gamma_i^1 = (b_i, x_i^0]$, $\Gamma_i^2 = [x_i^0, b_{i+1})$. Пусть выполняются следующие условия:

1) функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $\bar{\Gamma}$, за исключением,

быть может, точек b_i , $i = 1, 2, 3$. В самых этих последних точках они могут иметь лишь разрыв первого рода;

2) функции $p_i^1(x)$, $i = 2, 3$, $p_i^2(x)$, $i = 1, 2$ определяемые с помощью функции $p(x)$ в особых точках удовлетворяют условию Гельдера (4.8), (4.14), (4.3) и (4.9) соответственно;

3) имеет место следующее сочетание знаков чисел $p(b_i \pm 0)$:

$$p(b_i + 0) > 0, \quad p(b_i - 0) < 0, \quad i = 2, 3;$$

4) может выполняться любая другая комбинация знаков чисел $p(b_i \pm 0)$, $i = 2, 3$. При этом, если для одного или обоих значений $i = 2, 3$ взамен условия $p(b_i + 0) > 0$ выполняется условие $p(b_i + 0) < 0$, тогда требуется, чтобы функции $q(x)$ и $f(x)$ при $x \rightarrow b_i + 0$ стремились к нулю и удовлетворяли, соответственно, условиям (4.10), (4.15). Если же для одного или обоих значений $i = 2, 3$ взамен условия $p(b_i - 0) < 0$ выполняется условие $p(b_i - 0) > 0$, то требуется, чтобы эти функции при $x \rightarrow b_i - 0$ обращались в нуль и подчинялись, соответственно, условиям (4.5), (4.11).

Тогда общее решение уравнения (4.1) и степени оператора $A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}$ на множестве $\Gamma_{(b)}$ выражается при помощи формулы (4.16), где C_{ij}^1 , C_{ij}^2 , $i = 1, 2$, C_{3j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$ - произвольные постоянные, группы из которых относящиеся к промежутку Γ_i , $i = 1, 2$, однозначно связаны, соответственно, с.л.а.у. (4.6) и (4.12).

Следствие 4.1. Непосредственными вычислениями на основании формулы (4.16) получим следующие равенства:

$$[A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_1+0} = C_{1s}^1, \quad (4.17)$$

$$[(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_2-0} = (-1)^s C_{1s}^2, \quad (4.18)$$

$$[(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_2+0} = C_{2s}^1, \quad (4.19)$$

$$[(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_3-0} = (-1)^s C_{2s}^2, \quad (4.20)$$

$$[(x - b_3)^{p_3^1(b_3+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_3+0} = C_{3s}^1, \quad (4.21)$$

где $s = \overline{0, (n-1)}$. Эти равенства дают возможность однозначно найти значение произвольных постоянных, соответствующее известному решению уравнения (4.1), которое выражается с помощью формулы (4.16), то есть служат формулами обращения для этого представления.

Нахождение значения произвольных постоянных, входящих в первые четыре строки формулы (4.16) можно провести с использованием систем (4.6), (4.12) и следующими четырьмя способами, которые понадобятся нам при постановке и решении граничных задач. Берём две группы из четырёх первых равенств (4.17) - (4.21), одно относящееся к Γ_1 , другое к Γ_2 , и однозначно находим две группы произвольных постоянных, по одному относящиеся к этим интервалам, далее подставляем их в системы (4.6), (4.12) и находим однозначно другие группы постоянных, относящиеся к указанным интервалам.

Следствие 4.2. Из представления (4.16) вытекает, что все решения уравнения (4.1) и степени оператора $A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}$ от него в окрестности слабо-сингулярной точки b_1 остаются ограниченными, а в окрестности сингулярных точек b_i , $i = 2, 3$ их поведение зависит от знака предельных чисел $p(b_i \pm 0)$. Также как в разделе 2.1 главы 2, справедливы следующие выводы:

когда $x \rightarrow b_i + 0$, в случае $p(b_i + 0) > 0$, все решения уравнения и степени оператора от них стремятся к бесконечности и подчиняются асимптотическому равенству $y(x) = O[(x - b_i)^{-p_i^1(b_i+0)}]$, в случае же $p(b_i + 0) < 0$, стремятся к нулю с поведением $y(x) = o[(x - b_i)^{-p_i^1(b_i+0)}]$;

когда $x \rightarrow b_i - 0$, в случае $p(b_i - 0) < 0$, все решения данного уравнения и степени оператора от них стремятся к бесконечности и подчиняются асимптотическому равенству $y(x) = O[(b_i - x)^{p_i^2(b_i-0)}]$, в случае же $p(b_{i+1} - 0) > 0$, стремятся к нулю с поведением $y(x) = o[(b_i - x)^{p_i^2(b_i-0)}]$.

Каждое из этих заключений может выполняться для одного или обоих значений $i = 2, 3$ или чередоваться произвольным порядком, так что общая картина поведения решений уравнения (4.1) в окрестности сингулярных точек характеризуется сочетанием знаков четырех чисел $p(b_i \pm 0)$.

4.2. Постановка и исследование граничных для уравнения (4.1) с условиями в слабо сингулярной и сингулярной точках

Начнём с задачи Коши - Рикье.

Задача 4.1. Требуется найти решение уравнения (4.1), подчиняющееся одному из следующих пар групп условий:

$$[A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_1+0} = a_{1s}^1, \quad [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_2+0} = a_{2s}^1, \quad (4.22)$$

$$[A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_1+0} = b_{1s}^1, \quad [(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_3-0} = b_{2s}^2, \quad (4.23)$$

$$[(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_2-0} = c_{1s}^2,$$

$$[(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_2+0} = c_{2s}^1, \quad (4.24)$$

$$[(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_2-0} = d_{1s}^2,$$

$$[(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_3-0} = d_{2s}^2, \quad (4.25)$$

а так же группе условий вида

$$[(x - b_3)^{p_3^1(b_3+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_3+0} = d_{3s}^1, \quad (4.26)$$

$s = \overline{0, (n-1)}$, где a_{is}^1 , b_{is}^k , c_{is}^k , d_{is}^2 , $i, k = 1, 2$, d_{3s}^1 - заданные вещественные числа.

Решение задачи 4.1 в общем случае. Пусть, для уравнения (4.1) выполнены все условия теоремы 4.1. Представление (4.16) подчиним одной паре групп условий (4.22) - (4.25) и условиям (4.26). Тогда во всех этих случаях при требовании выполнения условий (4.26), применяя характеристические равенства (4.21), произвольные постоянные C_{3s}^1 находим так:

$$C_{3s}^1 = d_{3s}^1, \quad s = \overline{0, (n-1)}. \quad (4.27)$$

Далее:

при требовании выполнения условий (4.22) в силу характеристических равенств (4.17) и (4.19) произвольные постоянные C_{1s}^1 и C_{2s}^1 , однозначно находим следующим образом:

$$C_{1s}^1 = a_{1s}^1, \quad C_{2s}^1 = a_{2s}^1, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (4.28)$$

Полученные значения подставляем в системы (4.6), (4.12), соответственно. Тогда, получим следующие определенные треугольные с.л.а.у.:

$$\begin{aligned}
K_{b_{2,s}}^{1,-} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0} &= \\
&= I_{b_{1,s}}^{\alpha_{1,+}} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), a_{1s}^1, \dots, a_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0}, \\
K_{b_{3,s}}^{1,-} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0} &= \\
&= K_{b_{2,s}}^{1,+} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), a_{2s}^1, a_{2(s+1)}^1, \dots, a_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0}, s = \overline{0, (n-1)}, \quad (4.29)
\end{aligned}$$

относительно произвольных постоянных C_{1s}^2 и C_{2s}^2 , соответственно, из которых последние определяем однозначно;

при требовании выполнения условий (4.23) в силу характеристических равенств (4.17), (4.20) произвольные постоянные C_{1s}^1 , C_{2s}^2 находим равенствами:

$$C_{1s}^1 = b_{1s}^1, \quad C_{2s}^2 = (-1)^s b_{2s}^2, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (4.30)$$

и подставляя эти значения в системы (4.6), (4.12), получим следующие определенные треугольные с.л.а.у.:

$$\begin{aligned}
K_{b_{2,s}}^{1,-} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0} &= \\
&= I_{b_{1,s}}^{\alpha_{1,+}} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), b_{1s}^1, \dots, b_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0}, \\
K_{b_{2,s}}^{1,+} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0} &= \\
&= K_{b_{3,s}}^{1,-} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), (-1)^s b_{2s}^2, \dots, (-1)^{n-1} b_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0}, s = \overline{0, (n-1)}, \quad (4.31)
\end{aligned}$$

относительно постоянных C_{1s}^2 , C_{2s}^1 , из которых последние находим однозначно;

при требовании выполнения условий (4.24) в силу равенств (4.18) и (4.19) произвольные постоянные C_{1s}^2 , C_{2s}^1 находим так:

$$C_{1s}^2 = (-1)^s c_{1s}^2, \quad C_{2s}^1 = c_{2s}^1, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (4.32)$$

и подставляя эти значения в системы (4.6), (4.12), получим следующие определенные треугольные с.л.а.у.:

$$\begin{aligned}
I_{b_{1,s}}^{\alpha_{1,+}} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0} &= \\
&= K_{b_{2,s}}^{1,-} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), (-1)^s c_{1s}^2, \dots, (-1)^{n-1} c_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0}, \\
K_{b_{3,s}}^{1,-} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0} &=
\end{aligned}$$

$$= K_{b_2,s}^{1,+} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), c_{2s}^1, \dots, c_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (4.33)$$

относительно C_{1s}^1, C_{2s}^2 , соответственно, из которых последние находим однозначно;

при требовании выполнения условий (4.25) в силу характеристических равенств (4.18) и (4.20) произвольные постоянные C_{1s}^2, C_{2s}^2 находим равенствами

$$C_{1s}^2 = (-1)^s d_{1s}^2, \quad C_{2s}^2 = (-1)^s d_{2s}^2, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad (4.34)$$

и подставляя их значения в системы (4.6), (4.12), получим следующие определенные треугольные с.л.а.у.:

$$\begin{aligned} & I_{b_1,s}^{\alpha_1,+} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0} = \\ & = K_{b_2,s}^{1,-} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), (-1)^s d_{1s}^2, \dots, (-1)^{n-1} d_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0}, \\ & K_{b_2,s}^{1,+} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0} = \\ & = K_{b_3,s}^{1,-} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), (-1)^s d_{2s}^2, \dots, (-1)^{n-1} d_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

относительно произвольных постоянных C_{1s}^1, C_{2s}^1 , соответственно, из которых последние находим однозначно.

Наконец, в каждом из рассмотренных случаев, с помощью найденных значений произвольных постоянных, по формуле (4.16) выписываем единственное решение задачи 4.1.

Подытоживая рассуждения, имеем утверждение:

Теорема 4.2. Пусть для уравнения (4.1) выполняются условия теоремы 4.1. Тогда задача 4.1 имеет единственное решение, которое, в зависимости от её условий, получается из формулы (4.16) заменой произвольных постоянных их значением, соответственно, из формулы (4.27), а также следующих формул и систем: (4.28), (4.29); (4.30), (4.31); (4.32), (4.33); (4.34), (4.35).

Решение задачи 4.1 в случае $n = 2$. Отметим, что в случае $n = 2$ системы (4.6), (4.12) можно записать в едином виде

$$\begin{cases} d_i(\mu_i + C_{i0}^1 + k_i C_{i1}^1) = e_i(\lambda_i + C_{i0}^2 + r_i C_{i1}^2) \\ d_i(v_i + C_{i1}^1) = e_i(\eta_i - C_{i1}^2) \end{cases}, \quad i = 1, 2, \quad (4.36)$$

где

$$\begin{aligned}
d_1 &\equiv d_1(x_1^0) = \exp \left[-u_{p_1^1, b_1}^{\alpha_1, +}(x_1^0) \right], \quad d_2 \equiv d_2(x_2^0) = (x_2^0 - b_2)^{-p_2^1(b_2+0)} \exp \left[-w_{p_2^1, b_2}^{1, +}(x_2^0) \right], \\
e_i &\equiv e_i(x_i^0) = (b_{i+1} - x_i^0)^{p_i^2(b_{i+1}-0)} \exp \left[-w_{p_i^2, b_{i+1}}^{1, -}(x_i^0) \right], \quad k_i \equiv k_i(x_i^0) = x_i^0 - b_i, \\
r_i &\equiv r_i(x_i^0) = b_{i+1} - x_i^0, \quad d_i, \quad e_i, \quad k_i, \quad r_i > 0, \\
\mu_1 &\equiv \mu_1(x_1^0) = \int_{b_1}^{x_1^0} [(1 + x_1^0 - \xi)q_1^1(\xi) + (x_1^0 - \xi)f_1^1(\xi)] (\xi - b_1)^{-\alpha_1} \exp \left[u_{p_1^1, b_1}^{\alpha_1, +}(\xi) \right] d\xi, \\
\mu_2 &\equiv \mu_2(x_2^0) = \int_{b_2}^{x_2^0} [(1 + x_2^0 - \xi)q_2^1(\xi) + (x_2^0 - \xi)f_2^1(\xi)] (\xi - b_2)^{p_2^1(b_2+0)-1} \times \\
&\times \exp \left[w_{p_2^1, b_2}^{1, +}(\xi) \right] d\xi, \quad \lambda_i \equiv \lambda_i(x_i^0) = - \int_{x_i^0}^{b_{i+1}} [(1 + x_i^0 - \xi)q_i^2(\xi) + (x_i^0 - \xi)f_i^2(\xi)] \times \\
&\times (b_{i+1} - \xi)^{-p_i^2(b_{i+1}-0)-1} \exp \left[w_{p_i^2, b_{i+1}}^{1, -}(\xi) \right] d\xi, \\
\nu_1 &\equiv \nu_1(x_1^0) = \int_{b_1}^{x_1^0} [q_1^1(\xi) + f_1^1(\xi)] (\xi - b_1)^{-\alpha_1} \exp \left[u_{p_1^1, b_1}^{\alpha_1, +}(\xi) \right] d\xi, \\
\nu_2 &\equiv \nu_2(x_2^0) = \int_{b_2}^{x_2^0} [q_2^1(\xi) + f_2^1(\xi)] (\xi - b_2)^{p_2^1(b_2+0)-1} \exp \left[w_{p_2^1, b_2}^{1, +}(\xi) \right] d\xi, \\
\eta_i &\equiv \eta_i(x_i^0) = - \int_{x_i^0}^{b_{i+1}} [q_i^2(\xi) + f_i^2(\xi)] (b_{i+1} - \xi)^{-p_i^2(b_{i+1}-0)-1} \exp \left[w_{p_i^2, b_{i+1}}^{1, -}(\xi) \right] d\xi,
\end{aligned}$$

- известные числа.

Находим решение уравнения (4.1), удовлетворяющее условиям (4.22), (4.26). Подчиняя представление (4.16) этим условиям, на основании характеристических равенств (4.17), (4.19) и (4.21), произвольные постоянные C_{1j}^1 , C_{2j}^1 и C_{3j}^1 определим равенствами

$$C_{1j}^1 = a_{1j}^1, \quad C_{2j}^1 = a_{2j}^1, \quad j = 0, 1, \quad (4.37)$$

$$C_{3j}^1 = d_{3j}^1, \quad j = 0, 1 \quad (4.38)$$

Найденное значение C_{1j}^1 , C_{2j}^1 подставляем в систему (4.36), тогда относительно произвольных постоянных C_{1j}^2 , C_{2j}^2 , получим систему, из которого имеем

$$C_{i0}^2 = \frac{d_i}{e_i} a_{i0}^1 + \frac{d_i}{e_i} (k_i + r_i) a_{i1}^1 + A_i, \quad C_{i1}^2 = -\frac{d_i}{e_i} a_{i1}^1 + \bar{A}_i, \quad i = 1, 2, \quad (4.39)$$

где $A_i = \frac{d_i}{e_i} (\mu_i + r_i v_i) - r_i \eta_i - \lambda_i$, $\bar{A}_i = \eta_i - \frac{d_i}{e_i} v_i$.

Значение произвольных постоянных из равенств (4.37), (4.38), (4.39) подставляем в формулу (4.16) ($s = 0$) и находим единственное искомое решение уравнения (4.1).

Для нахождения решения задачи 4.1 при других условиях поступим аналогично. Тогда:

в случае условий (4.23), (4.26) на основании равенств (4.17), (4.20) и (4.21) произвольные постоянные C_{1j}^1 , C_{2j}^2 находим так:

$$C_{10}^1 = b_{10}^1, \quad C_{11}^1 = b_{11}^1, \quad C_{20}^2 = b_{20}^2, \quad C_{21}^2 = -b_{21}^2, \quad (4.40)$$

а C_{3j}^1 равенством (4.38). Значение C_{1j}^1 , C_{2j}^2 подставляя в системы (4.36), отсюда произвольные постоянные C_{1j}^2 , C_{2j}^1 находим так:

$$\begin{aligned} C_{10}^2 &= \frac{d_1}{e_1} b_{10}^1 + \frac{d_1}{e_1} (k_1 + r_1) b_{11}^1 + A_1, & C_{11}^2 &= -\frac{d_1}{e_1} b_{11}^1 + \bar{A}_1, \\ C_{20}^1 &= \frac{e_2}{d_2} b_{20}^2 - \frac{e_2}{d_2} (k_2 + r_2) b_{21}^2 + B_2, & C_{21}^1 &= \frac{e_2}{d_2} b_{21}^2 + \bar{B}_2, \end{aligned} \quad (4.41)$$

где $B_i = \frac{e_i}{d_i} (\lambda_i - k_i \eta_i) + k_i v_i - \mu_i$, $\bar{B}_i = \frac{e_i}{d_i} \eta_i - v_i$;

в случае условий (4.24), (4.26) с помощью характеристических равенств (4.18), (4.19) и (4.21) произвольные постоянные C_{1j}^2 , C_{2j}^1 находим так:

$$C_{10}^2 = c_{10}^2, \quad C_{11}^2 = -c_{11}^2; \quad C_{20}^1 = c_{20}^1, \quad C_{21}^1 = c_{21}^1, \quad (4.42)$$

а C_{3j}^1 равенством (4.38). После подставляя значение C_{1j}^2 , C_{2j}^1 из равенств (4.42) в соответствующую систему (4.36), из полученных систем находим произвольные постоянные C_{1j}^1 , C_{2j}^2 следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{10}^1 &= \frac{e_1}{d_1} c_{10}^2 - \frac{e_1}{d_1} (k_1 + r_1) c_{11}^2 + B_1, & C_{11}^1 &= \frac{e_1}{d_1} c_{11}^2 + \bar{B}_1; \\ C_{20}^2 &= \frac{d_2}{e_2} c_{20}^1 + \frac{d_2}{e_2} (k_2 + r_2) c_{21}^1 + A_2, & C_{21}^2 &= -\frac{d_2}{e_2} c_{21}^1 + \bar{A}_2; \end{aligned} \quad (4.43)$$

в случае условий (4.25), (4.26) в силу характеристических равенств (4.18), (4.20) и (4.21), приходим к равенствам

$$C_{10}^2 = d_{10}^2, \quad C_{11}^2 = -d_{11}^2, \quad C_{20}^2 = d_{20}^2, \quad C_{21}^2 = -d_{21}^2, \quad (4.44)$$

и (4.38) для нахождения C_{1j}^2 , C_{2j}^2 , C_{3j}^1 далее, поставим эти значения в системы (4.36), откуда произвольные постоянные C_{1j}^1 , C_{2j}^1 находим так:

$$\begin{aligned} C_{10}^1 &= \frac{e_1}{d_1} d_{10}^2 - \frac{e_1}{d_1} (k_1 + r_1) d_{11}^2 + B_1, & C_{11}^1 &= \frac{e_1}{d_1} d_{11}^2 + \overline{B}_1, \\ C_{20}^1 &= \frac{e_2}{d_2} d_{20}^2 - \frac{e_2}{d_2} (k_2 + r_2) d_{21}^2 + B_2, & C_{21}^1 &= \frac{e_2}{d_2} d_{21}^2 + \overline{B}_2. \end{aligned} \quad (4.45)$$

В каждом из рассмотренных случаев также выписываем соответствующее решение задачи 4.1. Единственность полученного решения задачи 4.1 можно доказать и как в случае задач Коши - Рикье в разделе 2.2 главы 2.

Таким образом, доказано утверждение.

Теорема 4.3. Пусть в уравнении (4.1) $n = 2$ и выполняются условия теоремы 4.1. Тогда задача 4.1 имеет единственное решение, которое в зависимости от ее условий, выражается формулой

$$y(x) = V_{(\alpha),(b)}^{(2)}[p(x), q(x), f(x), C_{10}^1, C_{11}^1; C_{10}^2, C_{11}^2; C_{20}^1, C_{21}^1; C_{20}^2, C_{21}^2; C_{30}^1, C_{31}^1],$$

где постоянные $C_{ij}^1, C_{ij}^2, i = 1, 2, C_{3j}^1, j = 0, 1$ определяются формулой (4.38) и группами формул (4.37), (4.39); (4.40), (4.41); (4.42), (4.43) и (4.44), (4.45), соответственно.

Задача 4.2 (задача типа линейного сопряжения). Найти решение уравнения (4.1), удовлетворяющее следующей системе условий:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} [A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^j y]_{x=b_1+0} + \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} [(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^j y]_{x=b_2-0} + \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^j y]_{x=b_2+0} + \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} [(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^j y]_{x=b_3-0} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(4n+j)} [(x - b_3)^{p_3^1(b_3+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^j y]_{x=b_3+0} = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, 3n}, \quad (4.46)$$

где b_{kj} и $\varepsilon_k, j = \overline{0, (5n-1)}$ - заданные вещественные числа.

Исследование задачи 4.2 в общем случае. Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Тогда представление (4.16) общего решения уравнения (4.1) и степеней оператора $A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}$ от него подчиним условиям (4.46) и, используя характеристические равенства (4.17) - (4.21) получим следующую с.л.а.у.:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} C_{1j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} (-1)^j C_{1j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} C_{2j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} (-1)^j C_{2j}^2 + \\ + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(4n+j)} C_{3j}^1 = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, 3n} \end{aligned} \quad (4.47)$$

с $3n$ уравнениями и $5n$ неизвестными $C_{ij}^1, C_{ij}^2, i = 1, 2, C_{3j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$.

Согласно теореме 4.1 в системе (4.47) группы неизвестных $C_{ij}^1, C_{ij}^2, i = 1, 2$ однозначно связаны следующими с.л.а.у.:

$$\begin{aligned} I_{b_1, s}^{\alpha_1, +} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, C_{1(s+1)}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0-0} = \\ = K_{b_2, s}^{1, -} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, C_{1(s+1)}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0+0}, \\ K_{b_2, s}^{1, +} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, C_{2(s+1)}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0-0} = \\ = K_{b_3, s}^{1, -} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, C_{2(s+1)}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0+0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Используя эту связь, четырьмя способами, систему (4.47) можно преобразовать к эквивалентной системе, состоящей из объединения систем (4.48) и с.л.а.у. с $3n$ уравнениями и неизвестными: две группы из C_{ij}^1, C_{ij}^2 , соответствующих разным значениям $i = 1, 2$ и $C_{3j}^1, j = \overline{0, (n-1)}$. Поясним эти случаи преобразования системы (4.47):

а) неизвестные C_{1j}^2 и $C_{2j}^2, j = \overline{0, (n-1)}$ заменим их выражением через неизвестные C_{1j}^1 и C_{2j}^1 из систем (4.48). Тогда система (4.47) переходит в с.л.а.у. с $3n$ уравнениями и неизвестными $C_{ij}^1, i = 1, 2, 3, j = \overline{0, (n-1)}$, которую

обозначим как (4.47а);

б) неизвестные C_{1j}^2 и C_{2j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$ заменим их выражением через неизвестные C_{1j}^1 и C_{2j}^2 из систем (4.48). Тогда система (4.47) переходит в с.л.а.у. с $3n$ уравнениями и неизвестными C_{1j}^1 , C_{2j}^2 и C_{3j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$. Полученную систему обозначим как (4.47б);

в) неизвестные C_{1j}^1 и C_{2j}^2 , $j = \overline{0, (n-1)}$, заменим их выражением через неизвестные C_{1j}^2 и C_{2j}^1 из систем (4.48). Тогда система (4.47) переходит в с.л.а.у. с $3n$ уравнениями и неизвестными C_{1j}^2 , C_{2j}^1 , C_{3j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$. Полученную систему обозначим как (4.47в);

г) неизвестные C_{1j}^1 и C_{2j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$, заменим их выражением через неизвестные C_{1j}^2 и C_{2j}^2 из систем (4.48). Тогда система (4.47) приводится к с.л.а.у. с $3n$ уравнениями и неизвестными C_{1j}^2 , C_{2j}^2 , C_{3j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$, которую обозначим как (4.47г).

Из выше проведенных рассуждений следует, что каждая из систем (4.47а), (4.47б), (4.47в), (4.47г), вместе с системами (4.48) эквивалентна системе (4.47), (4.48), поэтому все они в связке с (4.48) эквивалентны между собой.

Таким образом, исследование разрешимости задачи 4.2 приводится к исследованию разрешимости системы (4.47а), (4.47б), (4.47в) или (4.47г). Применяя к этим системам общую теорию с. л. а. у. приходим к следующему заключению:

Теорема 4.4. Пусть для уравнения (4.1) выполняются все условия теоремы 4.1, а в системе (4.47а), (4.47б), (4.47в) или (4.47г) основная и расширенная матрицы имеют ранг, соответственно, равный r и ρ .

1) Если $r = \rho = 3n$, тогда задача 4.2 имеет единственное решение, которое получается из формулы (4.16) заменой в нём произвольных постоянных решением одной из систем (4.47а), (4.47б), (4.47в) и (4.47г), рассматриваемой вместе с системой (4.48);

2) Если $r = \rho < 3n$, тогда задача 4.2 имеет бесконечно много решений и

её общее решение выражается через решения одной из систем (4.47а), (4.47б), (4.47в), и (4.47г), рассматриваемой вместе с системой (4.48), формулой (4.16), зависящей от $3n - r$ произвольных постоянных;

3) Если $r < 3n$, $r \neq \rho$, то каждая из систем (4.47а), (4.47б), (4.47в), (4.47г) вместе с системой (4.48) несовместна, и задача 4.2 не имеет решения.

Исследование задачи 4.2 в случае $n = 2$. В случае $n = 2$ системы (4.48) записываются в виде (4.36).

Случай 1. Из систем (4.36) неизвестные C_{ij}^2 выразим при помощи неизвестных C_{ij}^1 , $i = 1, 2$, $j = 0, 1$ так:

$$\left\{ C_{i0}^2 = \frac{d_i}{e_i} [C_{i0}^1 + (k_i + r_i)C_{i1}^1] + A_i, \quad C_{i1}^2 = -\frac{d_i}{e_i} C_{i1}^1 + \bar{A}_i, \quad i = 1, 2. \right. \quad (4.49)$$

Результат подставляем в с.л.а.у. (4.47), которая в случае $n = 2$ имеет вид

$$b_{k0}C_{10}^1 + b_{k1}C_{11}^1 + b_{k2}C_{20}^1 - b_{k3}C_{21}^1 + b_{k4}C_{20}^2 + b_{k5}C_{21}^2 + b_{k6}C_{20}^2 - b_{k7}C_{21}^2 + b_{k8}C_{30}^1 + b_{k9}C_{31}^1 = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, 6}. \quad (4.50)$$

В полученном результате произведем некоторые элементарные преобразования и приходим к следующей с.л.а.у. относительно неизвестных C_{i0}^1 , C_{i1}^1 , $i = 1, 2, 3$:

$$m_{k0}^1 C_{10}^1 + m_{k1}^1 C_{11}^1 + n_{k0}^1 C_{20}^1 + n_{k1}^1 C_{21}^1 + b_{k8}C_{30}^1 + b_{k9}C_{31}^1 = l_k^1, \quad k = \overline{1, 6}, \quad (4.51)$$

где

$$m_{k0}^1 = b_{k0} + b_{k2} \frac{d_1}{e_1}, \quad m_{k1}^1 = b_{k1} + \frac{d_1}{e_1} [b_{k2}(k_1 + r_1) + b_{k3}], \quad n_{k0}^1 = b_{k4} + b_{k6} \frac{d_2}{e_2},$$

$$n_{k1}^1 = b_{k5} + \frac{d_2}{e_2} [b_{k6}(k_2 + r_2) + b_{k7}], \quad l_k^1 = \varepsilon_k - b_{k2}A_1 + b_{k3}\bar{A}_1 - b_{k6}A_2 + b_{k7}\bar{A}_2$$

- известные вещественные числа.

Пусть в условиях (4.46) ($n = 2$) числа b_{kj} и ε_k , $k = \overline{1, 6}$, $j = \overline{0, 9}$ такие, что

определитель $\Delta_{11} = \begin{vmatrix} m_{k0}^1 & m_{k1}^1 & n_{k0}^1 & n_{k1}^1 & b_{k8} & b_{k9} \\ k = \overline{1, 6} \end{vmatrix}$ не равен нулю. Тогда ранг с. л. а. у.

(4.51) $r = 6$ и единственное ее решение дается формулами

$$C_{i0}^1 = \frac{\Delta_{11}^{i0}}{\Delta_{11}}, \quad C_{i1}^1 = \frac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.52)$$

где Δ_{11}^{ij} - есть определитель, который получается из определителя Δ_{11} , если

вместо столбца, соответствующего неизвестному C_{ij}^1 , $i = 1, 2, 3$, $j = 0, 1$ поставить столбец правой части системы (4.51). Теперь значение неизвестных C_{ij}^1 , $i = 1, 2$ из (4.52) поставим в соответствующее равенство (4.49), откуда находим значение неизвестных C_{ij}^2 , $i = 1, 2$, $j = 0, 1$ в виде:

$$C_{i0}^2 = \frac{d_i}{e_i} \frac{\Delta_{11}^{i0}}{\Delta_{11}} + (k_i + r_i) \frac{d_i}{e_i} \frac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}} + A_i, \quad C_{i1}^2 = -\frac{d_i}{e_i} \frac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}} + \bar{A}_i, \quad i = 1, 2. \quad (4.53)$$

Таким образом, все десять неизвестные, входящие в систему (4.50) однозначно определены. Их значение из равенств (4.52) и (4.53) подставляя в представление (4.16), получим единственное решение задачи 4.2.

Случай 2. В этом случае систему (4.36) запишем в равносильном виде:

$$\begin{cases} C_{10}^2 = \frac{d_1}{e_1} C_{10}^1 + \frac{d_1}{e_1} (k_1 + r_1) C_{11}^1 + A_1, & C_{11}^2 = -\frac{d_1}{e_1} C_{11}^1 + \bar{A}_1 \\ C_{20}^1 = \frac{e_2}{d_2} C_{20}^2 + \frac{e_2}{d_2} (k_2 + r_2) C_{21}^2 + B_2, & C_{21}^1 = -\frac{e_2}{d_2} C_{21}^2 + \bar{B}_2. \end{cases} \quad (4.54)$$

Далее, в системе (4.50) неизвестные C_{1j}^2 , C_{2j}^1 , $j = 0, 1$ заменим их выражениями через неизвестные C_{1j}^1 , C_{2j}^2 , $j = 0, 1$ из равенств (4.54). Тогда имеем следующую с.л.а.у. для определения неизвестных C_{1j}^1 , C_{2j}^2 , C_{3j}^1 , $j = 0, 1$:

$$m_{k0}^1 C_{10}^1 + m_{k1}^1 C_{11}^1 + n_{k0}^2 C_{20}^2 + n_{k1}^2 C_{21}^2 + b_{k8} C_{30}^1 + b_{k9} C_{31}^1 = l_k^2, \quad k = \overline{1, 6}, \quad (4.55)$$

где m_{k0}^1 , m_{k1}^1 - известные вещественные числа из случая 1, а

$$n_{k0}^2 = b_{k4} \frac{e_2}{d_2} + b_{k6}, \quad n_{k1}^2 = \frac{e_2}{d_2} [b_{k4} (k_2 + r_2) - b_{k5}] - b_{k7},$$

$$l_k^2 = \varepsilon_k - A_1 b_{k2} + b_{k3} \bar{A}_1 - b_{k4} B_2 - b_{k5} \bar{B}_2.$$

Пусть определитель системы (4.55) $\Delta_{12} = \left| \begin{matrix} m_{k0}^1 & m_{k1}^1 & n_{k0}^2 & n_{k1}^2 & b_{k8} & b_{k9} \\ k = \overline{1, 6} \end{matrix} \right|$

отличен от нуля. Тогда ранг этой системы есть, $r = 6$ и её решение выражается формулами

$$C_{1j}^1 = \frac{\Delta_{12}^{1j}}{\Delta_{12}}, \quad C_{2j}^2 = \frac{\Delta_{12}^{2j}}{\Delta_{12}}, \quad C_{3j}^1 = \frac{\Delta_{12}^{3j}}{\Delta_{12}}, \quad j = 0, 1. \quad (4.56)$$

Здесь определители Δ_{12}^{1j} , Δ_{12}^{2j} , Δ_{12}^{3j} , $j = 0, 1$ находятся из определителя Δ_{12} заменой его столбца, соответствующего в системе (4.55), переменным C_{1j}^1 , C_{2j}^2 , C_{3j}^1 , $j = 0, 1$, столбцом правой части этой системы. Теперь, используя значение

неизвестных $C_{1j}^1, C_{2j}^2, j = 0,1$ из формул (4.56), по формулам (4.54) вычислим значение остальных неизвестных так:

$$\begin{aligned} C_{10}^2 &= \frac{d_1 \Delta_{12}^{10}}{e_1 \Delta_{12}} + \frac{d_1 \Delta_{12}^{11}}{e_1 \Delta_{12}} (k_1 + r_1) + A_1, & C_{11}^2 &= -\frac{d_1 \Delta_{12}^{11}}{e_1 \Delta_{12}} + \bar{A}_1, \\ C_{20}^1 &= \frac{e_2 \Delta_{12}^{20}}{d_2 \Delta_{12}} + \frac{e_2 \Delta_{12}^{21}}{d_2 \Delta_{12}} (k_2 + r_2) + B_2, & C_{21}^1 &= -\frac{e_2 \Delta_{12}^{21}}{d_2 \Delta_{12}} + \bar{B}_2. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Подставляя данные из формул (4.56) и (4.57) в представление (4.16), находим единственное решение задачи 4.2.

Случай 3. Систему (4.36) записываем в следующем, разрешенном относительно переменных $C_{1j}^1, C_{2j}^2, j = 0,1$ виде

$$\begin{cases} C_{10}^1 = \frac{e_1}{d_1} C_{10}^2 + \frac{e_1}{d_1} (k_1 + r_1) C_{11}^2 + B_1, & C_{11}^1 = -\frac{e_1}{d_1} C_{11}^2 + \bar{B}_1 \\ C_{20}^2 = \frac{d_2}{e_2} C_{20}^1 + \frac{d_2}{e_2} (k_2 + r_2) C_{21}^1 + A_2, & C_{21}^2 = -\frac{d_2}{e_2} C_{21}^1 + \bar{A}_2 \end{cases}, \quad (4.58)$$

и их значение из этих равенств подставим в систему (4.50). Тогда приходим к следующей с.л.а.у относительно переменных $C_{1j}^2, C_{2j}^1, C_{3j}^1, j = 0,1$:

$$m_{k0}^2 C_{k0}^2 + m_{k1}^2 C_{k1}^2 + n_{k0}^1 C_{20}^1 + n_{k1}^1 C_{21}^1 + b_{k8} C_{30}^1 + b_{k9} C_{31}^1 = l_k^3, k = \overline{1,6}, \quad (4.59)$$

где $m_{k0}^2 = b_{k0} \frac{e_1}{d_1} + b_{k2}$, $m_{k1}^2 = \frac{e_1}{d_1} [b_{k0}(k_1 + r_1) - b_{k1}] - b_{k3}$, n_{k0}^1, n_{k1}^1 — известные

числа, введенные в случае 1, а $l_k^3 = \varepsilon_k - b_{k0} B_1 - b_{k1} \bar{B}_1 - b_{k6} A_2 + b_{k7} \bar{A}_2$.

Пусть определитель системы (4.59) $\Delta_{21} = \begin{vmatrix} m_{k0}^2 & m_{k1}^2 & n_{k0}^1 & n_{k1}^1 & b_{k8} & b_{k9} \\ k = \overline{1,6} \end{vmatrix}$ не равен

нулю. Тогда ранг этой системы есть, $r = 6$ и ее единственное решение даётся формулами

$$C_{1j}^2 = \frac{\Delta_{21}^{1j}}{\Delta_{21}}, \quad C_{2j}^1 = \frac{\Delta_{21}^{2j}}{\Delta_{21}}, \quad C_{3j}^1 = \frac{\Delta_{21}^{3j}}{\Delta_{21}}, \quad j = 0,1, \quad (4.60)$$

где определители $\Delta_{21}^{1j}, \Delta_{21}^{2j}, \Delta_{21}^{3j}$ находятся из определителя Δ_{21} заменой его столбца, относящегося в системе (4.59), соответственно, неизвестным $C_{1j}^2, C_{2j}^1, C_{3j}^1, j = 0,1$, столбцом правой части этой системы. Теперь подставляя найденное значение $C_{1j}^2, C_{2j}^1, j = 0,1$ из равенств (4.60) в равенства (4.58) неизвестные $C_{1j}^1, C_{2j}^2, j = 0,1$ определим так:

$$\begin{aligned} C_{10}^1 &= \frac{e_1}{d_1} \frac{\Delta_{21}^{10}}{\Delta_{21}} + \frac{e_1}{d_1} (k_1 + r_1) \frac{\Delta_{21}^{11}}{\Delta_{21}} + B_1, \quad C_{11}^1 = -\frac{e_1}{d_1} \frac{\Delta_{21}^{11}}{\Delta_{21}} + \overline{B}_1, \\ C_{20}^2 &= \frac{d_2}{e_2} \frac{\Delta_{21}^{20}}{\Delta_{21}} + \frac{d_2}{e_2} (k_2 + r_2) \frac{\Delta_{21}^{21}}{\Delta_{21}} + A_2, \quad C_{21}^2 = -\frac{d_2}{e_2} \frac{\Delta_{21}^{21}}{\Delta_{21}} + \overline{A}_2. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Далее, как в предыдущих случаях, по формуле (4.16) ($s = 0$) выписываем единственное решение задачи 4.2.

Случай 4. Систему (4.36) перепишем в виде

$$\begin{cases} C_{10}^1 = \frac{e_1}{d_1} C_{10}^2 + \frac{e_1}{d_1} (k_1 + r_1) C_{11}^2 + B_1, & C_{11}^1 = -\frac{e_1}{d_1} C_{11}^2 + \overline{B}_1 \\ C_{20}^1 = \frac{e_2}{d_2} C_{20}^2 + \frac{e_2}{d_2} (k_2 + r_2) C_{21}^2 + B_2, & C_{21}^1 = -\frac{e_2}{d_2} C_{21}^2 + \overline{B}_2 \end{cases}, \quad (4.62)$$

Используя равенства (4.62) систему (4.50) преобразуем и относительно неизвестных $C_{1j}^2, C_{2j}^2, C_{3j}^1, j = 0, 1$ получим с.л.а.у.

$$m_{k0}^2 C_{10}^2 + m_{k1}^2 C_{11}^2 + n_{k0}^2 C_{20}^2 + n_{k1}^2 C_{21}^2 + b_{k8} C_{30}^1 + b_{k9} C_{31}^1 = l_k^4, \quad k = \overline{1, 6}, \quad (4.63)$$

где m_{k0}^2, m_{k1}^2 и n_{k0}^2, n_{k1}^2 известные числа, введенные выше, соответственно в случаях 3 и 2, а $l_k^4 = \varepsilon_k - B_1 b_{k0} - \overline{B}_1 b_{k1} - b_{k4} B_2 - b_{k5} \overline{B}_2$.

Допустим, что определитель с.л.а.у. (4.63) $\Delta_{22} = \begin{vmatrix} m_{k0}^2 & m_{k1}^2 & n_{k0}^2 & n_{k1}^2 & b_{k8} & b_{k9} \\ k = \overline{1, 6} \end{vmatrix}$

отличен от нуля. Тогда ранг этой системы есть, $r = 6$ и её единственное решение будет:

$$C_{1j}^2 = \frac{\Delta_{22}^{1j}}{\Delta_{22}}, \quad C_{2j}^2 = \frac{\Delta_{22}^{2j}}{\Delta_{22}}, \quad C_{3j}^1 = \frac{\Delta_{22}^{3j}}{\Delta_{22}}, \quad j = 0, 1, \quad (4.64)$$

где определители $\Delta_{22}^{1j}, \Delta_{22}^{2j}, \Delta_{22}^{3j}$ находятся из определителя Δ_{22} путем замены его столбцов, соответствующих в системе (4.63) неизвестным $C_{1j}^2, C_{2j}^2, C_{3j}^1, j = 0, 1$, столбцом правой части этой системы. Известное значение переменных $C_{1j}^2, C_{2j}^2, j = 0, 1$ из равенств (4.64) подставим в равенства (4.62) и, находим неизвестные $C_{1j}^1, C_{2j}^1, j = 0, 1$ так:

$$\begin{aligned} C_{10}^1 &= \frac{e_1}{d_1} \frac{\Delta_{22}^{10}}{\Delta_{22}} + \frac{e_1}{d_1} (k_1 + r_1) \frac{\Delta_{22}^{11}}{\Delta_{22}} + B_1, \quad C_{11}^1 = -\frac{e_1}{d_1} \frac{\Delta_{22}^{11}}{\Delta_{22}} + \overline{B}_1, \\ C_{20}^1 &= \frac{e_2}{d_2} \frac{\Delta_{22}^{20}}{\Delta_{22}} + \frac{e_2}{d_2} (k_2 + r_2) \frac{\Delta_{22}^{21}}{\Delta_{22}} + B_2, \quad C_{21}^1 = -\frac{e_2}{d_2} \frac{\Delta_{22}^{21}}{\Delta_{22}} + \overline{B}_2 \end{aligned} \quad (4.65)$$

Далее, аналогично выше, по формуле (4.16) ($s = 0$) выписываем единственное решение задачи 4.2.

Замечание 4.1. Из проведённых выше рассуждений видно, что каждая из систем (4.51), (4.55), (4.59) и (4.63), вместе с системой (4.36) эквивалентна системе (4.50), (4.36), поэтому все они в связке с системой (4.36) эквивалентны между собой.

Замечание 4.2. Для выше рассмотренных случаев 1 - 4 исследования задачи 4.2 справедливы утверждения, подобные утверждениям, приведенным в замечании 3.3 главы 3.

Доказано следующее утверждение:

Теорема 4.5. Пусть для уравнения (4.1) ($n = 2$) выполняются условия теоремы 4.1.

1) Если детерминант Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{21} или Δ_{22} не равен нулю, то ранг r основной матрицы систем (4.51), (4.55), (4.59) и (4.63) равен рангу ρ их расширенной матрицы, $r = \rho = 6$ и задача 4.2 имеет единственное решение, которое выражается формулой

$$y(x) = V_{(a),(b)}^{(2)}[p(x), q(x), f(x), C_{10}^1, C_{11}^1; C_{10}^2, C_{11}^2; C_{20}^1, C_{21}^1; C_{20}^2, C_{21}^2; C_{30}^1, C_{31}^1], \quad (4.66)$$

где постоянные C_{ij}^1 , C_{ij}^2 , $i = 1, 2$, C_{3j}^1 , $j = 0, 1$ определяются одной из следующих групп формул: (4.52), (4.53); (4.56), (4.57); (4.60), (4.61) и (4.64), (4.65).

2) Если детерминант Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{21} или Δ_{22} равен нулю, то $r < 6$. При этом, когда $r = \rho$ каждая из систем (4.51), (4.55), (4.59) и (4.63) и поэтому система (4.50), (4.36) имеет бесконечно много решений, их общее решение зависит от $6 - r$ произвольных постоянных, тогда и задача 4.2 имеет бесконечно много решений, выражаемых через решения системы (4.50), (4.36) формулой (4.66), зависящей от $6 - r$ произвольных постоянных, а когда $r \neq \rho$ системы (4.51), (4.55), (4.59), (4.63) несовместны, поэтому система (4.50), (4.36) также несовместна и задача 4.2 не имеет решения.

4.3. Пример

Рассмотрим уравнение

$$A_{\{\frac{1}{2}, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}}^2 y = \frac{f(x)}{\sqrt{x}|x-1||x-2|}, \quad x \in \Gamma_{\{0, 1, 2\}} = (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \quad (4.67)$$

где

$$A_{\{\frac{1}{2}, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}} y \equiv y' + \frac{p(x)}{\sqrt{x}|x-1||x-2|} y - \frac{q(x)}{\sqrt{x}|x-1||x-2|},$$

$$p(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } x \in (0; 2) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x\sqrt{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} & \text{при } x \in (2; 3) \end{cases},$$

$$q(x) = -f(x) = \begin{cases} \frac{16\sqrt{(1-x)^5(2-x)}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}\right)^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}}{(\sqrt{2}+1)^{3\sqrt{2}}(1+\sqrt{x})^4} & \text{при } x \in (0; 1); \\ \frac{\sqrt{2-x}(1+\sqrt{x})^4}{16} \left[\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{x})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+\sqrt{x})(\sqrt{2}-1)} \right]^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} & \text{при } x \in (1; 2); \\ \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{x}+1} \right)^{\sqrt{2}} (x-2)^{\sqrt{2}+1} & \text{при } x \in (2; 3), \end{cases}$$

0 - левая граничная слабо сингулярная, а 1, 2 - внутренние сингулярные точки. Легко можно проверить, что для уравнения (4.67) выполняются условия теоремы 4.1. Общее решение уравнения (4.67) на основании представления (4.16) определяется формулой, состоящей из следующих пяти строк:

$$y(x) = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} \right)^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{16}{(\sqrt{2}+1)^{3\sqrt{2}}} \left(\pi - 2 \arctg \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) + C_{10}^1 + C_{11}^1 x \right]$$

при $x \in (0, x_1^0]$;

$$y(x) = \frac{16(1-x)^2}{(\sqrt{2}+1)^{3\sqrt{2}}(1+\sqrt{x})^4} \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} \right)^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left[C_{10}^2 + C_{11}^2(1-x) - 2 \arctg \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right]$$

при $x \in [x_1^0, 1)$;

$$y(x) = \frac{(1+\sqrt{x})^4}{16(x-1)^2} \left[\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{x})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+\sqrt{x})(\sqrt{2}-1)} \right]^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left[1 - \sqrt{x(2-x)} + C_{20}^1 + C_{21}^1(x-1) \right]$$

при $x \in (1, x_2^0]$;

$$y(x) = \left(\frac{2\sqrt{4-2x}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}} \right)^{3\sqrt{2}} \left[\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{2}+1)} \right]^2 \left[C_{20}^2 + C_{21}^2(2-x) - \frac{(\sqrt{2}+1)^{4+3\sqrt{2}}}{16(2\sqrt{2})^{3\sqrt{2}}} \sqrt{x(2-x)} \right]$$

при $x \in [x_2^0, 2)$;

$$y(x) = \left(\frac{(\sqrt{2}+1)(x-2)}{\sqrt{x}+1} \right)^{\sqrt{2}} \left[\ln \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{x}+1)} + C_{30}^1 + C_{31}^1(x-2) \right]$$

при $x \in (2, 3)$.

(4.68)

Действие оператора $A_{\{\frac{1}{2}, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}}$ к этой функции приводит нас к следующей формуле состоящей из пяти строк:

$$A_{\{\frac{1}{2}, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}} y = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} \right)^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} C_{11}^1 \quad \text{при } x \in (0; x_1^0];$$

$$A_{\{\frac{1}{2}, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}} y = - \frac{16(1-x)^2}{(\sqrt{2}+1)^{3\sqrt{2}}(1+\sqrt{x})^4} \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} \right)^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} C_{11}^2 \quad \text{при } x \in [x_1^0; 1);$$

$$A_{\{\frac{1}{2}, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}} y = \frac{(1+\sqrt{x})^4}{16(x-1)^2} \left[\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{x})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+\sqrt{x})(\sqrt{2}-1)} \right]^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} C_{21}^1 \quad \text{при } x \in (1; x_2^0];$$

$$A_{\{\frac{1}{2}, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}} y = - \left(\frac{2\sqrt{4-2x}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}} \right)^{3\sqrt{2}} \left[\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{2}+1)} \right]^2 C_{21}^2 \quad \text{при } x \in [x_2^0; 2);$$

$$A_{\{\frac{1}{2}, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}} y = \left(\frac{(\sqrt{2} + 1)(x - 2)}{\sqrt{x} + 1} \right)^{\sqrt{2}} C_{31}^1 \quad \text{при } x \in (2, 3). \quad (4.69)$$

В формулах (4.68) и (4.69) x_1^0 , $0 < x_1^0 < 1$ и x_2^0 , $1 < x_2^0 < 2$ - фиксированные точки, а C_{ij}^1 , C_{ij}^2 и C_{3j}^1 - произвольные постоянные, пары из которых соответствующие значениям $i = 1$ и $i = 2$ однозначно связаны при помощи следующих с.л.а.у.:

$$\begin{cases} d_i(\mu_i + C_{i0}^1 + k_i C_{i1}^1) = e_i(\lambda_i + C_{i0}^2 + r_i C_{i1}^2), & i = 1, 2, \\ d_i C_{i1}^1 = -e_i C_{i1}^2 \end{cases} \quad (4.70)$$

где

$$d_1 = \left(\frac{1 - \sqrt{x_1^0}}{1 + \sqrt{x_1^0}} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{x_1^0}}{\sqrt{2} - \sqrt{x_1^0}} \right)^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}, \quad e_1 = \frac{16(1 - x_1^0)^2}{(\sqrt{2} + 1)^{3\sqrt{2}} \left(1 + \sqrt{x_1^0} \right)^4} \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{x_1^0}}{\sqrt{2} - \sqrt{x_1^0}} \right)^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

$$d_2 = \frac{(1 + \sqrt{x_2^0})^4}{16(x_2^0 - 1)^2} \left[\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{x_2^0})(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} + \sqrt{x_2^0})(\sqrt{2} - 1)} \right]^{\frac{3\sqrt{2}}{2}},$$

$$e_2 = \left(\frac{2\sqrt{4 - 2x_2^0}}{\sqrt{2} + \sqrt{x_2^0}} \right)^{3\sqrt{2}} \left[\frac{(\sqrt{x_2^0} + 1)(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{x_2^0} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \right]^2,$$

$$\mu_1 = \frac{16}{(\sqrt{2} + 1)^{3\sqrt{2}}} \left(\pi - 2 \arctg \sqrt{\frac{1 - x_1^0}{x_1^0}} \right), \quad \lambda_1 = -2 \arctg \sqrt{\frac{1 - x_1^0}{x_1^0}},$$

$$\mu_2 = 1 - \sqrt{x_2^0(2 - x_2^0)}, \quad \lambda_2 = -\frac{(\sqrt{2} + 1)^{4+3\sqrt{2}}}{16(2\sqrt{2})^{3\sqrt{2}}} \sqrt{x_2^0(2 - x_2^0)},$$

$$k_1 = x_1^0, \quad r_1 = 1 - x_1^0, \quad k_2 = x_2^0 - 1, \quad r_2 = 2 - x_2^0.$$

С помощью формул (4.68) и (4.69) находим решение уравнения (4.67), подчиняющееся условиям сопряжения вида:

$$\left\{ \begin{array}{l}
y(+0) + 2 \left[A_{\{\frac{1}{2}, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}} y \right]_{x=+0} + c \left[(x-1)^2 A_{\{\frac{1}{2}, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}} y \right]_{x=1+0} + \\
\quad + d \left[(2-x)^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}} A_{\{\frac{1}{2}, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}} y \right]_{x=2-0} = 1 \\
- \left[A_{\{\frac{1}{2}, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}} y \right]_{x=+0} - [(x-1)^2 y(x)]_{x=1+0} + \left[(x-1)^2 A_{\{\frac{1}{2}, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}} y \right]_{x=1+0} + \\
\quad + [(x-2)^{-\sqrt{2}} y(x)]_{x=2+0} = -1 \\
-y(+0) - 2 \left[A_{\{\frac{1}{2}, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}} y \right]_{x=+0} + \left[(x-1)^2 A_{\{\frac{1}{2}, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}} y \right]_{x=1+0} + \\
\quad + \left[(x-2)^{-\sqrt{2}} A_{\{\frac{1}{2}, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}} y \right]_{x=2+0} = -1 \\
c[(x-1)^2 y(x)]_{x=1+0} + d \left[(2-x)^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}} y(x) \right]_{x=2-0} = -1 \\
-2[(x-2)^{-\sqrt{2}} y(x)]_{x=2+0} + \left[(x-2)^{-\sqrt{2}} A_{\{\frac{1}{2}, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}} y \right]_{x=2+0} = 1 \\
\quad \quad \quad [(x-2)^{-\sqrt{2}} y(x)]_{x=2+0} = -1,
\end{array} \right. \quad (4.71)$$

где $c > 0, d > 0$ - известные числа.

Функцию (4.68) подчиняя условиям (4.71) приходим к следующей с.л.а.у. для нахождения произвольных постоянных:

$$\left\{ \begin{array}{l}
C_{10}^1 + 2C_{11}^1 + cC_{21}^1 - dC_{21}^2 = 1 \\
-C_{11}^1 - C_{20}^1 + C_{21}^1 + C_{30}^1 = -1 \\
-C_{10}^1 - 2C_{11}^1 + C_{21}^1 + C_{31}^1 = -1 \\
\quad \quad \quad cC_{20}^1 + dC_{20}^2 = -1 \\
\quad \quad \quad -2C_{30}^1 + C_{31}^1 = 1 \\
\quad \quad \quad C_{30}^1 = -1
\end{array} \right. \quad (4.72)$$

Из последних двух уравнений системы (4.72) находим

$$C_{30}^1 = C_{31}^1 = -1, \quad (4.73)$$

и, учитывая это, систему (4.72) преобразуем, после неизвестные C_{20}^2, C_{21}^2 заменим следующими их выражениями через неизвестные C_{20}^1, C_{21}^1 из систем (4.70):

$$\left\{ \begin{array}{l}
C_{10}^2 = \frac{d_1}{e_1} [C_{10}^1 + (k_1 + r_1)C_{11}^1] + A_1, C_{11}^2 = -\frac{d_1}{e_1} C_{11}^1 \\
C_{20}^2 = \frac{d_2}{e_2} [C_{20}^1 + (k_2 + r_2)C_{21}^1] + A_2, C_{21}^2 = -\frac{d_2}{e_2} C_{21}^1
\end{array} \right., \quad (4.74)$$

где $A_i = \frac{d_i}{e_i} \mu_i - \lambda_i$.

Тогда относительно неизвестных $C_{i0}^1, C_{i1}^1, i = 1, 2$ имеем систему

$$\begin{cases} C_{10}^1 + 2C_{11}^1 + \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right) C_{21}^1 = 1 \\ -C_{11}^1 - C_{20}^1 + C_{21}^1 = 0 \\ -C_{10}^1 - 2C_{11}^1 + C_{21}^1 = 0 \\ \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right) C_{20}^1 + d \frac{d_2}{e_2} (k_2 + r_2) C_{21}^1 = -1 - dA_2. \end{cases} \quad (4.75)$$

Основной определитель системы (4.75)

$$\Delta_{11} = \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right) + \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right)^2 > 0,$$

поэтому единственное ее решение будет

$$\begin{aligned} C_{10}^1 &= -\frac{2 + 3c + 5d \frac{d_2}{e_2} + 2dA_2 \left(1 + c + d \frac{d_2}{e_2}\right)}{c + d \frac{d_2}{e_2} + \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right)^2}, \\ C_{11}^1 &= \frac{1 + 2c + 3d \frac{d_2}{e_2} + dA_2 \left(1 + c + d \frac{d_2}{e_2}\right)}{c + d \frac{d_2}{e_2} + \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right)^2}, \\ C_{20}^1 &= -\frac{1 + c + 2d \frac{d_2}{e_2} + dA_2 \left(1 + c + d \frac{d_2}{e_2}\right)}{c + d \frac{d_2}{e_2} + \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right)^2}, \\ C_{21}^1 &= \frac{1}{1 + c + d \frac{d_2}{e_2}}, \end{aligned} \quad (4.76)$$

и подставляя значение переменных из равенства (4.76) в равенства (4.74), находим другие неизвестные входящие в систему (4.72) так:

$$\begin{aligned} C_{10}^2 &= -\frac{d_1}{e_1} \frac{1 + c + 2d \frac{d_2}{e_2} + dA_2 \left(1 + c + d \frac{d_2}{e_2}\right)}{c + d \frac{d_2}{e_2} + \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right)^2} + A_1, \\ C_{11}^2 &= -\frac{d_1}{e_1} \frac{1 + 2c + 3d \frac{d_2}{e_2} + dA_2 \left(1 + c + d \frac{d_2}{e_2}\right)}{c + d \frac{d_2}{e_2} + \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right)^2}, \end{aligned}$$

$$C_{20}^2 = -\frac{d_2}{e_2} \frac{1 + d \frac{d_2}{e_2} + dA_2 \left(1 + c + d \frac{d_2}{e_2}\right)}{c + d \frac{d_2}{e_2} + \left(c + d \frac{d_2}{e_2}\right)^2} + A_2,$$

$$C_{21}^2 = -\frac{d_2}{e_2} \frac{1}{1 + c + d \frac{d_2}{e_2}}. \quad (4.77)$$

Таким образом решение уравнения (4.67), удовлетворяющее условиям (4.71), дается формулой (4.68), в которой постоянные определяются формулами (4.73), (4.76) и (4.77).

ГЛАВА 5. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Данная диссертационная работа посвящена исследованию ряда уравнений типа (0.1). В уравнении (0.1) возможны следующие четыре случая расположения особых точек в пределах отрезка $\bar{G}$: $a = b_1 < b_2 < b_3 = b$; $a = b_1 < b_2 < b_3 < b$; $a < b_1 < b_2 < b_3 = b$; $a < b_1 < b_2 < b_3 < b$. Каждому из этих случаев соответствуют 27 возможных систем значений чисел α_i , $i = 1, 2, 3$. По этим признакам уравнение (0.1) охватывает 108 различных обыкновенных дифференциальных уравнений с тремя особыми точками.

Уравнение (0.1) в случае $n = 1$ является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с тремя особыми точками и изучено в монографии Н. Раджабова [130]. В этой работе при различных расположениях точек b_i , $i = 1, 2, 3$, когда все они имеют одинаковый порядок сингулярности, разработан новый способ получения представления общего решения уравнения сведением к изучению линейных уравнений первого порядка с одной граничной особой точкой, исследованы задачи Коши. В работе Н. Раджабова, Е. Шишкиной [85] уравнение (0.1) с тремя внутренними особыми точками одинакового порядка изучено в случае $n = 1$, исследована задача типа линейного сопряжения.

Для других значений n уравнение (0.1) оставался не изученным.

В данной диссертационной работе уравнение (0.1) сначала изучается в базовых случаях, то есть при некоторых расположениях особых точек, когда все они имеют одинаковый порядок сингулярности, затем на этой основе рассматривается один из случаев, когда среди них есть точка другого порядка. Исследование открывает путь к изучению всех остальных случаев уравнения (0.1), когда сингулярные точки разных порядков расположены смешанно.

Рассматриваемые в диссертации уравнения изучаются разработанными Н. Раджабовым (см., например, [130, 132]) и А.Г. Олимовым (см., например, [58 – 60]) способами. Их изучение сводится к изучению уравнений, полученных итерированием линейных обыкновенных дифференциальных

операторов первого порядка с одной граничной особой точкой, рассмотренных в работах Н. Раджабова, А.Г. Олимова и М.Я. Дадоджановой [15 – 19] и полученные в диссертации результаты, основываются на результатах этих работ.

В разделе 2.1 главы 2 изучается уравнение

$$A_{(1),(b)}^n y = f(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-1}, \quad (5.1)$$

$$A_{(1),(b)} y \equiv y' + p(x) \left(\prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-1} \right) y - q(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-1}$$

когда сингулярные точки расположены в виде $a = b_1 < b_2 < b_3 = b$ и $\alpha_i = 1$, $i = 1, 2, 3$. В этом случае делается следующее разбиение множества $\Gamma_{(b)}$:

$$\Gamma_{(b)} = \bigcup_{i=1}^2 \Gamma_i, \text{ где } \Gamma_i = (b_i, b_{i+1}), i = 1, 2, \Gamma_i = \Gamma_i^1 \cup \Gamma_i^2, \Gamma_i^1 = (b_i, x_i^0], \Gamma_i^2 = [x_i^0, b_{i+1}),$$

$i = 1, 2$, а $x_i^0 \in \Gamma_i$ - фиксированная точка и уравнение (5.1) в частичных промежутках рассматривается как уравнение с одной граничной сингулярной точкой и её решение находится как объединение решений полученных четырёх уравнений.

Основным результатом данного раздела является теорема 2.1.

Предполагая, что функции

$$p_i^1(x) = p(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |x - b_k|^{-1}, \quad p_i^2(x) = p(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |x - b_k|^{-1}, \quad i = 1, 2$$

в сингулярных точках подчиняются условию Гельдера, при всевозможных комбинациях знака чисел $p(b_i + 0)$, $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 1, 2$ иногда, требуя стремление функций $q(x)$ и $f(x)$ к нулю в соответствующей точке с определенным асимптотическим порядком (формулы (2.6) и (2.10)), получено интегральное представление общего решения уравнения (5.1) и степеней оператора $A_{(1),(b)}$ от него во множестве $\Gamma_{(b)}$ в виде

$$A_{(1),(b)}^s y \equiv Q_{(1),(b),s}^{(n)} [p(x), q(x), f(x), C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1; C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2;$$

$$C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1; C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2], \quad s = \overline{0, (n-1)} \quad (5.2)$$

в виде четырёх строк, что делается впервые (формула (2.12)). В представлении

$$(5.2) \quad C_{ij}^1, C_{ij}^2, i = 1, 2, j = \overline{0, (n-1)} \quad \text{суть произвольные постоянные,}$$

удовлетворяющие следующим треугольным и определенным с.л.а.у.:

$$\begin{aligned} K_{b_i, s}^{1,+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1]_{x=x_i^0} = \\ = K_{b_{i+1}, s}^{1,-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2]_{x=x_i^0}, \\ s = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Использованием систем (5.3) установлено, что представление (5.2) зависит только от n произвольных постоянных, по расположению которых в строках (см. правила 1) - 4) в разделе 2.1) это представление можно рассмотреть и использовать в четырёх равносильных формах.

Для представления (5.2) установлены следующие характеристические равенства (формулы обращения):

$$\begin{aligned} [(x - b_1)^{p_1^1(b_1+0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_1+0} = C_{1s}^1, \quad [(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_2-0} = (-1)^s C_{1s}^2, \\ [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_2+0} = C_{2s}^1, \quad [(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_3-0} = (-1)^s C_{2s}^2, \\ s = \overline{0, (n-1)} \end{aligned} \quad (5.4)$$

с помощью которых по известному решению уравнения (5.1) соответствующие ему постоянные находятся однозначно.

Изучено поведение решений рассматриваемого уравнения в окрестности сингулярных точек. Показано, что это существенно зависит от функции $p(x)$ и в зависимости от знака предельных чисел $p(b_i + 0)$ и $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 1, 2$ все решения уравнения (5.1) в соответствующей окрестности сингулярных точек стремятся к бесконечности или нулю подобно степенной функции. Получены асимптотические равенства, точно характеризующие поведение решений в окрестности сингулярных точек. Сделан вывод, что общая картина поведения решений уравнения (5.1) в окрестности сингулярных точек характеризуется комбинацией знаков чисел $p(b_i + 0)$, $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 1, 2$ (см. замечание 2.2).

Полученные в разделе 2.1 заключения и оценки подтверждаются результатами других авторов (см., например, [15, 19, 34, 53, 62, 130]).

В разделе 2.2 главы 2 для уравнения (5.1) поставлены и исследованы граничные задачи с условиями в сингулярных точках. Например:

Задача 5.1 (Коши - Рикье). *Найти решение уравнения (5.1) таким образом, чтобы выполнялись следующие группы условий:*

$$[(x - b_1)^{p_1^1(b_1+0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_1+0} = a_{1s}^1, \quad [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{(1),(b)}^s y]_{x=b_2+0} = a_{2s}^1, \\ s = \overline{0, (n-1)} \text{ где } a_{is}^1, i = 1, 2 - \text{заданные вещественные числа.}$$

Особенностью задач Коши - Рикье является то, что в них условия задаются со степенным весом и не во всех сингулярных точках, составляющих границу множества $\Gamma_{(b)}$, что указывает на влияние сингулярности на постановку задач.

Относительно задач Коши - Рикье в общем случае доказано безусловное существование единственного решения и возможность представления его в явном виде (теорема 2.2). В случае $n = 2$ с целью получения более точных результатов и формул ход решения задач проведен подробно, получены явные формулы для их решения (теорема 2.3).

Задачи Коши - Рикье являются обобщением задачи Коши, рассмотренной Н. Раджабовым в работе [130] для линейного уравнения первого порядка и результаты, полученные там охватываются результатами данного исследования.

Задача 5.2 (задача типа линейного сопряжения). *Найти решение уравнения (5.1) так, чтобы выполнялась следующая система условий:*

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} [(x - b_1)^{p_1^1(b_1+0)} A_{(1),(b)}^j y]_{x=b_1+0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} [(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{(1),(b)}^j y]_{x=b_2-0} + \\ + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{(1),(b)}^j y]_{x=b_2+0} + \\ + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} [(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{(1),(b)}^j y]_{x=b_3-0} = \varepsilon_k, \quad (5.5)$$

где $k = \overline{1, 2n}$, b_{kj} и ε_k , $j = \overline{0, (4n-1)}$ - заданные вещественные числа.

На основе представления (5.2) и характеристических равенств (5.4) исследование задачи 5.2 осуществляется переходом, из условий (5.5) к с.л.а.у. с $2n$ уравнениями и $4n$ неизвестными $C_{ij}^1, C_{ij}^2, j = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2$ следующего вида:

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} C_{1j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} (-1)^j C_{1j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} C_{2j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} (-1)^j C_{2j}^2 = \varepsilon_k, \\ k = \overline{1, 2n}, \quad (5.6)$$

к которой автоматически присоединяются системы (5.3). При помощи систем (5.3) система (5.6) четырьмя способами преобразовывается в эквивалентные с.л.а.у., состоящих из системы $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными и систем (5.3), исследуя которых, в терминах чисел b_{kj}, ε_k и рангов матриц, получены заключения о разрешимости, однозначной разрешимости и явном представлении решений задачи 5.2 (теорема 2.4). В случае $n = 2$ с целью получения более конкретных результатов процесс исследования задачи 5.2 выполнен подробно, в терминах чисел b_{kj}, ε_k и детерминантов с.л.а.у., получены выводы о разрешимости, однозначной разрешимости и для решений получены точные формулы (теорема 2.5).

В разделе 2.3 главы 2 изучается уравнение

$$A_{(\alpha), (b)}^n y = f(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i} \quad (5.7) \\ A_{(\alpha), (b)} y \equiv y' + p(x) \left(\prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i} \right) y - q(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i}$$

с граничными b_1, b_3 и внутренней b_2 слабо сингулярными точками.

Основной результат этого раздела приведён в теореме 2.6. При выполнении поставленных основных условий на функции $p(x), q(x), f(x)$ получено интегральное представление общего решения уравнения (5.7) и степеней слабо сингулярного оператора $A_{(\alpha), (b)}$ от него в виде

$$A_{(\alpha), (b)}^s y = \Omega_{(\alpha), (b), s}^{(n)} [p(x), q(x), f(x), C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1; C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2];$$

$$C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1; C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2], \quad s = \overline{0, (n-1)} \quad (5.8)$$

(формула (2.63)), где $C_{ij}^1, C_{ij}^2, i = 1, 2, j = \overline{0, (n-1)}$ есть произвольные постоянные, удовлетворяющие треугольным определенным с.л.а.у.:

$$\begin{aligned} & I_{b_{i,s}}^{\alpha_i, +} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1]_{x=\bar{x}_i^0} = \\ & = I_{b_{i+1,s}}^{\alpha_{i+1}, -} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2]_{x=\bar{x}_i^0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (5.9)$$

Доказаны характеристические равенства (формулы обращения) для представления (5.8) (следствие 2.1):

$$\begin{aligned} [A_{(\alpha), (b)}^s y]_{x=b_1+0} &= C_{1s}^1; \quad [A_{(\alpha), (b)}^s y]_{x=b_2-0} = (-1)^s C_{1s}^2; \\ [A_{(\alpha), (b)}^s y]_{x=b_2+0} &= C_{2s}^1; \quad [A_{(\alpha), (b)}^s y]_{x=b_3-0} = (-1)^s C_{2s}^2; \quad s = \overline{0, (n-1)}. \end{aligned}$$

На основе представления (5.8) и последних равенств показано, что все решения уравнения (5.7) и степени оператора $A_{(\alpha), (b)}$ от них в окрестности слабо сингулярных точек являются ограниченными.

В разделе 2.4 главы 2 для уравнения (5.7) поставлены и исследованы ряд задач Коши - Рикье и задача типа линейного сопряжения с условиями в слабо сингулярных точках. Условия задач сходны условиям задач из предыдущего раздела, только в силу слабо сингулярности уравнения, в них степенной вес отсутствует. Для рассматриваемых задач Коши - Рикье, как в случае задачи 5.1, доказано безусловная однозначная разрешимость и представление решения в явном виде (теоремы 2.7 и 2.8). Исследование задачи линейного сопряжения, как в случае задачи 5.5, сведено к исследованию явно выписываемых с.л.а.у. Далее, в терминах чисел b_{kj} , ε_k и рангов матриц или детерминантов с.л.а.у., получены выводы об ее разрешимости, однозначной разрешимости и представлении решения в явном виде (теоремы 2.9 и 2.10).

В разделе 2.5 рассмотрен конкретный пример к разделам 2.1 и 2.2.

Полученные в главе 2 результаты согласуются с результатами других авторов (см., например, [15, 19, 130]).

В главе 3 уравнение (5.7) рассматривается в случае, когда особые точки расположены в виде $a < b_1 < b_2 < b_3 < b$ и $\alpha_i > 1, i = 1, 2, 3$. В этом случае

делается следующее разбиение множества $\Gamma_{(b)}$: $\Gamma_{(b)} = \bigcup_{i=0}^3 \Gamma_i$, где $\Gamma_0 = (a, b_1)$
 $\Gamma_i = (b_i, b_{i+1})$, $i = 1, 2$, $\Gamma_3 = (b_3, b)$, $\Gamma_i = \Gamma_i^1 \cup \Gamma_i^2$, $\Gamma_i^1 = (b_i, x_i^0]$, $\Gamma_i^2 = [x_i^0, b_{i+1})$,
 $i = 1, 2$, а $x_i^0 \in \Gamma_i$ - фиксированная точка. В разделе 3.1 уравнение (5.7)
 рассматривается в частичных промежутках как уравнение с одной граничной
 сверхсингулярной точкой и её решение находится как объединение решений
 шести полученных уравнений.

Основным результатом данного раздела является теорема 3.1.

В случае, когда функции

$$p_i^1(x) = p(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k}, i = 1, 2, 3 \text{ и } p_i^2(x) = p(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k}, i = 0, 1, 2,$$

определяемые с помощью функции $p(x)$, в сверхсингулярных точках
 подчиняется условию типа Гельдера вида

$|p_i^1(x) - p_i^1(b_i + 0)| \leq L_i^1(x - b_i)^{l_i^1}$, $L_i^1 > 0$, $l_i^1 > \alpha_i - 1$ при $x \rightarrow b_i + 0$,
 $|p_i^2(b_{i+1} - 0) - p_i^2(x)| \leq L_i^2(b_{i+1} - x)^{l_i^2}$, $L_i^2 > 0$, $l_i^2 > \alpha_{i+1} - 1$ при $x \rightarrow b_{i+1} - 0$,
 при любых комбинациях знаков чисел $p(b_i + 0)$, $i = 1, 2, 3$, $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 0, 1, 2$
 в некоторых случаях, требуя стремление функций $q(x)$ и $f(x)$ к нулю в
 соответствующей особой точке с определенным асимптотическим порядком (см.
 формулы (3.5), (3.9)), получено интегральное представление общего решения
 сверхсингулярного уравнения (5.7) и степеней оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от него во
 множестве $\Gamma_{(b)}$ в виде:

$$A_{(\alpha),(b)}^s y \equiv U_{(\alpha),(b),s}^{(n)} [p(x), q(x), f(x), C_{0s}^2, \dots, C_{0(n-1)}^2; C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1; C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2; \\ C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1; C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2; C_{3s}^1, \dots, C_{3(n-1)}^1], \quad s = \overline{0, (n-1)} \quad (5.10)$$

состоящей из шести строк, что делается впервые (формула (3.10)). В формуле
 (5.10) C_{ij}^1 , $i = 1, 2, 3$, C_{ij}^2 , $i = 0, 1, 2$, $j = \overline{0, (n-1)}$ - произвольные постоянные, из
 которых C_{ij}^1 , C_{ij}^2 , $i = 1, 2$, удовлетворяют следующим треугольным
 определенным с.л.а.у.:

$$K_{b_i, s}^{\alpha_{i+1}, +} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1]_{x=x_i^0} = \\ = K_{b_{i+1}, s}^{\alpha_{i+1}, -} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2]_{x=x_i^0}, s = \overline{0, (n-1)}, i = 1, 2. \quad (5.11)$$

На основании систем (5.11) сделано заключение, что общее решение уравнения (5.7) зависит только от n произвольных постоянных и в зависимости от их расположения, её можно рассмотреть в четырёх равносильных формах.

Установлены следующие характеристические равенства (формулы обращения):

$$\begin{aligned} \{\exp[p_0^2(b_1 - 0)\omega_{b_1}^{\alpha_{1,-}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y\}_{x=b_1-0} &= (-1)^s C_{0s}^2, \\ \{\exp[-p_1^1(b_1 + 0)\omega_{b_1}^{\alpha_{1,+}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y\}_{x=b_1+0} &= C_{1s}^1, \\ \{\exp[p_1^2(b_2 - 0)\omega_{b_2}^{\alpha_{2,-}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y\}_{x=b_2-0} &= (-1)^s C_{1s}^2, \\ \{\exp[-p_2^1(b_2 + 0)\omega_{b_2}^{\alpha_{2,+}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y\}_{x=b_2+0} &= C_{2s}^1, \\ \{\exp[p_2^2(b_3 - 0)\omega_{b_3}^{\alpha_{3,-}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y\}_{x=b_3-0} &= (-1)^s C_{2s}^2, \\ \{\exp[-p_3^1(b_3 + 0)\omega_{b_3}^{\alpha_{3,+}}(x)] A_{(\alpha),(b)}^s y\}_{x=b_3+0} &= C_{3s}^1, \quad s = \overline{0, (n-1)} \end{aligned} \quad (5.12)$$

для представления (5.10), которые позволяют по известному решению уравнения (5.7), соответствующие ему постоянные найти однозначно.

Изучено поведение решений данного уравнения в окрестности сверхсингулярных точек. Показано что, это существенно зависит от знака чисел $p(b_i + 0)$, $i = 1, 2, 3$, $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 0, 1, 2$ и все решения уравнения (5.7) в правосторонней и левосторонней окрестности сверхсингулярных точек стремятся к бесконечности или нулю как экспоненциальная функция. Получены асимптотические равенства, точно характеризующие поведение решений в окрестности сверхсингулярных точек. В терминах предельных значений функции $p(x)$ показано, что общая картина поведения решений уравнения (5.7) в окрестности сверхсингулярных точек определяется комбинацией знаков чисел $p(b_i + 0)$, $i = 1, 2, 3$, $p(b_{i+1} - 0)$, $i = 0, 1, 2$ (замечание 3.2).

В разделе 3.2 для уравнения (5.7) поставлены и исследованы задачи с условиями в сверхсингулярных точках. Например:

Задача 5.5 (Коши - Рикье). Найти решение уравнения (5.7), удовлетворяющее четырем группам условий вида:

$$\begin{aligned} \{\exp[p_0^2(b_1 - 0)\omega_{b_1}^{\alpha_1, -}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y\}_{x=b_1-0} &= a_{0s}^2, \\ \{\exp[-p_3^1(b_3 + 0)\omega_{b_3}^{\alpha_3, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y\}_{x=b_3+0} &= d_{3s}^1; \\ \{\exp[-p_1^1(b_1 + 0)\omega_{b_1}^{\alpha_1, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y\}_{x=b_1+0} &= a_{1s}^1, \\ \{\exp[-p_2^1(b_2 + 0)\omega_{b_2}^{\alpha_2, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^s y\}_{x=b_2+0} &= a_{2s}^1; \end{aligned}$$

где $s = \overline{0, (n-1)}$, а a_{0s}^2 , a_{is}^1 , $i = 1, 2$, d_{3s}^1 - заданные вещественные числа.

Особенностью задач Коши - Рикье для уравнения (5.7) является то, что в них условия задаются с экспоненциальным весом.

Для задач Коши - Рикье для уравнения (5.7) в общем случае доказано безусловное существование единственного решения и возможность представления её в явном виде (теорема 3.2). В случае $n = 2$ ход решения поставленных задач выполнен подробно и получены точные формулы для их решения (теорема 3.3).

Задача 5.6. (типа линейного сопряжения). Найти решение уравнения (5.7) таким образом, чтобы выполнялась следующая система условий:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} \{\exp[p_0^2(b_1 - 0)\omega_{b_1}^{\alpha_1, -}(x)] A_{(\alpha), (b)}^j y\}_{x=b_1-0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} \{\exp[-p_1^1(b_1 + 0)\omega_{b_1}^{\alpha_1, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^j y\}_{x=b_1+0} + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} \{\exp[p_1^2(b_2 - 0)\omega_{b_2}^{\alpha_2, -}(x)] A_{(\alpha), (b)}^j y\}_{x=b_2-0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} \{\exp[-p_2^1(b_2 + 0)\omega_{b_2}^{\alpha_2, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^j y\}_{x=b_2+0} + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(4n+j)} \{\exp[p_2^2(b_3 - 0)\omega_{b_3}^{\alpha_3, -}(x)] A_{(\alpha), (b)}^j y\}_{x=b_3-0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(5n+j)} \{\exp[-p_3^1(b_3 + 0)\omega_{b_3}^{\alpha_3, +}(x)] A_{(\alpha), (b)}^j y\}_{x=b_3+0} = \\ &= \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, 4n}, \text{ где } b_{kj} \text{ и } \varepsilon_k, \quad j = \overline{0, (6n-1)} - \text{ заданные вещественные числа,} \end{aligned}$$

исследуется приведением к с.л.а.у. $4n$ уравнений с $6n$ неизвестными вида:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} (-1)^j C_{0j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} C_{1j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} (-1)^j C_{1j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} C_{2j}^1 + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(4n+j)} (-1)^j C_{2j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(5n+j)} C_{3j}^1 = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, 4n}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

к которой добавляются системы (5.11), после чего система (5.13) четырьмя способами заменяется эквивалентным с.л.а.у, состоящей из $4n$ уравнений с $4n$ неизвестными и систем (5.4). На этой основе получены выводы о разрешимости, однозначной разрешимости задачи 5.6, возможность выражения решения в явном виде (теорема 3.4). В случае $n = 2$ выше описанный процесс выполнен подробно, в терминах чисел b_{kj} , ε_k и детерминантов систем получены точные условия о неразрешимости, разрешимости, однозначной разрешимости задачи 5.6 и конкретные формулы для решений (теорема 3.5).

Выводы и оценки, полученные в главе 3 согласуются с результатами ряда других авторов (см., например, [16, 19, 31 – 33, 54, 85, 130]).

В главе 4 уравнение (5.7) изучается в случае, когда особые точки расположены в виде $a = b_1 < b_2 < b_3 < b$ и $0 < \alpha_1 < 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$. Запишем данное уравнение в виде

$$A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^n y = f(x) |x - b_1|^{-\alpha_1} \prod_{i=2}^3 |x - b_i|^{-1}, \quad (5.14)$$

$$A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)} y \equiv y' + p(x) |x - b_1|^{-\alpha_1} \left(\prod_{i=2}^3 |x - b_i|^{-1} \right) y - p(x) |x - b_1|^{-\alpha_1} \prod_{i=2}^3 |x - b_i|^{-1}$$

В этом случае делается следующее разбиение $\Gamma_{(b)}$: $\Gamma_{(b)} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, где $\Gamma_1 = (b_1, b_2)$, $\Gamma_2 = (b_2, b_3)$, $\Gamma_3 = (b_3, b)$, $\Gamma_i = \Gamma_i^1 \cup \Gamma_i^2$, $\Gamma_i^1 = (b_i, x_i^0]$, $\Gamma_i^2 = [x_i^0, b_{i+1})$, $i = 1, 2$, где $x_i^0 \in \Gamma_i$ - фиксированная точка. Уравнение (5.14) на частях $\Gamma_{(b)}$ относится к разному типу, на Γ_i^1 будет слабо сингулярным, а в других частичных промежутках сингулярным.

Основным результатом раздела 4.1 является теорема 4.1.

На основе результатов, полученных в разделах 2.1 и 2.3 главы 2, получено интегральное представление общего решения уравнения (5.14) и степеней оператора $A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}$ от него во множестве $\Gamma_{(b)}$ в следующем виде (формула (4.16)):

$$A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y = V_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b), s}^{(n)} [p(x), q(x), f(x), C_{1s}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1; C_{1s}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2; C_{2s}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1; C_{2s}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2; C_{3s}^1, \dots, C_{3(n-1)}^1], \quad s = \overline{0, (n-1)} \quad (5.15)$$

Формула (5.15) справедлива при всякой комбинации знаков чисел $p(b_i \pm 0)$,

$i = 2, 3$, когда функции $p_i^1(x)$, $i = 2, 3$, $p_i^2(x)$, $i = 1, 2$,

$p_1^2(x) = p(x)(x - b_1)^{-\alpha_1}(b_3 - x)^{-1} = p_2^1(x)$, $p_2^2(x) = p(x)(x - b_1)^{-\alpha_1}(x - b_2)^{-1}$,
 $p_3^1(x) = p(x)(x - b_1)^{-\alpha_1}(x - b_2)^{-1}$ в сингулярных точках подчиняются условию Гельдера, в некоторых случаях функции $q(x)$ и $f(x)$ стремятся к нулю в соответствующей сингулярной точке с определенным асимптотическим порядком. В формуле (5.15) C_{ij}^1 , C_{ij}^2 , $i = 1, 2$, C_{3j}^1 , $j = \overline{0, (n-1)}$ суть произвольные постоянные, группы из которых C_{ij}^1 , C_{ij}^2 , $i = 1, 2$, однозначно связаны, соответственно, следующими треугольными определенными с.л.а.у:

$$\begin{aligned} I_{b_1, s}^{\alpha_1, +} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, C_{1(s+1)}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0-0} &= \\ &= K_{b_2, s}^{1, -} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, C_{1(s+1)}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0+0}, \\ K_{b_2, s}^{1, +} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, C_{2(s+1)}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0-0} &= \\ = K_{b_3, s}^{1, -} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, C_{2(s+1)}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0+0}, \quad s = \overline{0, (n-1)}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Системы (5.16) показывают, что общее решение (5.15) зависит от n произвольных постоянных и в зависимости от их расположения в строках формулы её можно рассмотреть в четырёх равносильных формах.

Установлены характеристические равенства (формулы обращения)

$$\begin{aligned} [A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_1+0} &= C_{1s}^1, \\ [(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_2-0} &= (-1)^s C_{1s}^2, \\ [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_2+0} &= C_{2s}^1, \\ [(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_3-0} &= (-1)^s C_{2s}^2, \\ [(x - b_3)^{p_3^1(b_3+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_3+0} &= C_{3s}^1, \quad s = \overline{0, (n-1)}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

для представления (5.15) с помощью которых, зная решение уравнения (5.14), соответствующие ему постоянные находятся однозначно.

Доказано, что все решения уравнения (5.14) в окрестности слабо сингулярной точки являются ограниченными, а в правосторонней и

левосторонней окрестности сингулярных точек в зависимости от знака чисел $p(b_i \pm 0)$, $i = 2, 3$ стремятся к бесконечности или нулю подобно степенной функции, и общая картина поведения решений определяется комбинацией знаков этих чисел. Получены асимптотические равенства, точно характеризующие поведение решений в окрестности сингулярных точек (см. следствие 4.2).

В разделе 4.2 главы 4 для уравнения (5.14) поставлены и исследованы ряд граничных задач с условиями в слабо сингулярной и сингулярной точках.

Задача 5.7 (Коши - Рикье). Требуется найти решение уравнения (5.14), подчиняющееся следующим группам условий:

$$\begin{aligned} [A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_1+0} &= a_{1s}^1, & [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_2+0} &= a_{2s}^1, \\ [(x - b_3)^{p_3^1(b_3+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^s y]_{x=b_3+0} &= d_{3s}^1, & s &= \overline{0, (n-1)}, \end{aligned}$$

где a_{is}^1 , $i = 1, 2$, d_{3s}^1 - заданные вещественные числа.

Задача 5.8 (типа линейного сопряжения). Найти решение уравнения (5.14) таким образом, чтобы выполнялась следующая система условий:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} [A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^j y]_{x=b_1+0} &+ \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} [(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^j y]_{x=b_2-0} + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} [(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^j y]_{x=b_2+0} + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} [(b_3 - x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^j y]_{x=b_3-0} + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(4n+j)} [(x - b_3)^{p_3^1(b_3+0)} A_{\{\alpha_1, 1, 1\}, (b)}^j y]_{x=b_3+0} = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, 3n}, \end{aligned}$$

где b_{kj} и ε_k , $j = \overline{0, (5n-1)}$ - заданные вещественные числа.

Особенностью граничных задач в рассматриваемом случае состоит в том, что условия в слабо сингулярной точке задаются без веса, а условия в сингулярных точках задаются с некоторым степенным весом.

В общем случае доказано, что задачи Коши - Рикье всегда имеют

единственное решение, которое можно представить в явном виде (теорема 4.2). В случае $n = 2$ ход решения этих задач проведен подробно и получены точные формулы для их единственного решения (теорема 4.3).

Исследование задачи 5.8 четырьмя способами сведено к исследованию с.л.а.у. и в терминах чисел b_{kj} и ε_k , $j = \overline{0, (5n - 1)}$, рангов матриц или определителей систем найдены условия, при выполнении которых задача имеет единственное решение, бесконечно много решений и не имеет решения. В случае $n = 2$ для решений получены точные формулы (теоремы 4.4 и 4.5).

В разделе 4.3 рассмотрен конкретный пример к материалам главы 4.

ВЫВОДЫ

Основные научные результаты диссертации заключаются в следующем:

- получены теоремы о представлении общего решения в интегральном виде для дифференциальных уравнений типа (0.1):
 - с двумя граничными и одной внутренней сингулярной точками [2-A], [3-A];
 - с двумя граничными и одной внутренней слабо сингулярной точками [1-A], [6-A], [8-A];
 - с тремя внутренними сверхсингулярными точками [4-A], [12-A], [13-A];
 - с одной левой граничной слабо сингулярной и двумя внутренними сингулярными точками [5-A], [14-A].
- получены утверждения о возможности рассмотрения полученных представлений общего решения изучаемых уравнений типа (0.1) в четырёх равносильных формах [1-A] – [5-A].
- получены утверждения об обратимости полученных интегральных представлений общего решения и явные формулы обращения [1-A] – [5-A].
- получены заключения о поведении решений рассматриваемых уравнений типа (0.1) в окрестности особых точек [1-A] – [5-A].
- получены теоремы о существовании, единственности и явном

представлении решения задач Коши-Рикье для рассматриваемых уравнений специального типа (0.1) [1-A], [3-A], [4-A], [9-A], [12-A].

- получены теоремы о разрешимости, однозначной разрешимости и явном представлении решения задач типа линейного сопряжения для рассматриваемых уравнений специального типа (0.1) [1-A], [2-A], [5-A], [13-A], [16-A].

Рекомендации к практическому использованию результатов

Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы для дальнейшей разработки теории дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных с особыми коэффициентами, а также в прикладных вопросах.

Материал диссертации может быть использован при чтении специальных курсов для магистрантов и аспирантов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

А) Список использованных источников

- [1]. Абдуллаев, А.Р. О задаче Коши для сингулярного дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / А.Р. Абдуллаев, Я.Н. Крохалева // Евразийское Научное Объединение. – 2018. – №12 (46). – С. 1–3.
- [2]. Азбелев, Н.В. О сингулярных краевых задачах для линейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка / Н.В. Азбелев, М.Ж. Алвеш, Е.И. Бравый // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1999. – №2 (441). – С. 3–11.
- [3]. Александров, А.Я. Пространственные задачи теории упругости [Текст] / А.Я. Александров, Ю.И. Соловьев. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
- [4]. Архипов, В.П. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка около точки вырождения [Текст] / В.П. Архипов, А.В. Глушак // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2013. – №5(148). – Вып. 30. – С. 5–18.
- [5]. Архипов, В.П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной [Текст] / В.П. Архипов // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, №10. – С. 1383–1393.
- [6]. Байзаев, С. Ограниченные решения некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [Текст] / С. Байзаев, Э. Мухамадиев // Вестник Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики. – 2010. – №1. – С. 8–15.
- [7]. Бицадзе, А.В. Уравнения смешанного типа [Текст] / А.В. Бицадзе. – М.: АН СССР, 1959. – 164с.
- [8]. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных [Текст] / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
- [9]. Болтаев, К.С. Краевые задачи типа линейного сопряжения для уравнения Гельмгольца смешанного типа с сингулярной линией [Текст] /

К.С. Болтаев // Вестник Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава. Серия естественных наук. – 2017. – №2-2 (46). – С. 11–15.

[10]. Бояринцев, Ю.Е. Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Ю.Е. Бояринцев. – Новосибирск: Наука, 1988. – 157 с.

[11]. Брычев, С.В. Исследование задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст]: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук / С.В. Брычев. – Екатеринбург, 2000.

[12]. Вихрева, О.А. О первой краевой задаче для сильно вырождающегося обыкновенного дифференциального уравнения [Текст] / О.А. Вихрева // Математические заметки СВФУ. – 2018. – Т. 25, №2. – С. 3–11.

[13]. Глушко, В.П. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения [Текст] / В.П. Глушко. – Воронеж: ВГУ, 1972. – 193 с.

[14]. Гришанин, Г.Э. Об особенности задачи Коши для дифференциального уравнения Эйлера второго порядка в сингулярной точке [Текст] / Г.Э. Гришанин, Э.М. Мухамадиев, А.Н. Наимов // В сборнике: Вузовская наука – региону. Материалы XV Всероссийской научной конференции с международным участием. – 2017. – С. 62 – 72.

[15]. Дадоджонова, М.Ё. Интегральные представления решений для одного уравнения, полученного итерированием обыкновенного дифференциального оператора первого порядка с сингулярной точкой [Текст] / М.Ё. Дадоджонова, Н.Р. Раджабов, А.Г. Олимов // Вестник педагогического университета. Издание Таджикского государственного педагогического университета им. Садриддина Айни. – 2013. – №5(54). – С. 39–43.

[16]. Дадоджонова, М.Я. Интегральные представления решений и задачи типа Коши-Рикье для одного уравнения, полученного итерированием обыкновенного дифференциального оператора первого порядка со сверхсингулярной точкой [Текст] / М.Я. Дадоджонова, А.Г. Олимов, Н.Р. Раджабов // Докл. АН Республики Таджикистан. – 2014. – Т. 57, № 9-10. – С. 713–719.

[17]. Дадоджанова, М.Я. Интегральное представление решений и задача Коши-Рикье для двух обыкновенных дифференциальных уравнений специального типа с граничной слабо сингулярной точкой [Текст] / М.Я. Дадоджанова, А.Г. Олимов // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. – 2015. – №2 (33). – С 3–10.

[18]. Дадоджанова, М.Я. Интегральное представление задачи Коши-Рикье и типов линейного сопряжения для одного уравнения, полученного итерированием обыкновенного дифференциального оператора первого порядка с внутренней сверхсингулярной точкой [Текст] / М.Я. Дадоджанова, А.Г. Олимов// Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – 2016. – 1/1(192). – С. 88–93.

[19]. Дадоджанова, М.Я. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений специального типа со слабо сингулярной, сингулярной или сверхсингулярной точкой и их приложения [Текст]: дис. канд. физ.-мат. наук / Мукаддас Якубджановна Дадоджанова – Худжанд, 2018. – 113 с.

[20]. Джангибеков, Г. Задача линейного сопряжения решений эллиптических систем дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами на плоскости [Текст] / Г. Джангибеков // ДАН СССР. – 1991. – Т. 317, №4. – С. 813–818.

[21]. Дорофеева, И.Н. Задача линейного сопряжения для обобщённого уравнения Коши - Римана с сверхсингулярными точками на полуплоскости [Текст] / И.Н. Дорофеева, А.Б. Расулов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2022. – Т. 62, №11. – С. 1861–1866.

[22]. Зайцев, В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст] / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576с.

[23]. Зарипов, С.К. К теории одного класса немодельного линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н. Раджабов, С.К. Зарипов //

Известия АН Республики Таджикистан. – 2009. – №1. – С. 7–17.

[24]. Зарипов, С.К. К теории одного класса немодельного линейного обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – Душанбе: Сино. – 2010, №3 (59). – С. 103–109.

[25]. Зарипов, С.К. Исследование устойчивости решения одного класса линейного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярным коэффициентом [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – 2015, №1-4(168). – С. 28–36.

[26]. Зарифзода, С.К. Исследование одного класса операторно-дифференциального уравнения n -го порядка [Текст] / С.К. Зарифзода // Вестник Филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. – 2019. – №1,3(9,11). – 14–22.

[27]. Зарифзода, С.Қ. Тадқиқи муодилаҳои интегро - дифференсиалии тартиби якуми моделӣ бо се нуқтаи махсус [Матн] / С.Қ. Зарифзода, М.Т. Розиков // Паёми Донишгоҳи Миллии Тоҷикистон. Бахши илмҳои табиӣ. – 2023. – №2. – С. 19–30.

[28]. Илолов, М. Об устойчивости Улама-Хайерса дифференциальных уравнений второго порядка [Текст] / М. Илолов, Дж.Ш. Рахматов // Сборник статей международной научно-практической конференции на тему «О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач» (4 ноября 2021 г.). – Душанбе, 2021. – С. 83–86.

[29]. Исраилов, С.В. О свойствах решений дифференциального уравнения с двумя точками сингулярностей специальной структуры [Текст] / С.В. Исраилов, А.Л. Джабраилов, Х.Л. Гасаева // Format. Техника и технология. – 2019. – №1(0.1). – С. 11–16.

[30]. Исхоков, С.А. О гладкости решения вырождающихся дифференциальных уравнений [Текст] / С.А. Исхоков // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т.31, №4. – С. 641–653.

[31]. Кадиров, Г.М. Задача типа линейного сопряжения для линейной системы первого порядка с одной супер сингулярной точкой [Текст] / Г.М. Кадиров, Н. Раджабов // Матер. межд. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения», посв. 50-летию образ. ТГНУ и 60-летию чл.-корр. АН РТ, профессора Раджабова Н. – Душанбе, 1998. – С. 46–47.

[32]. Кадиров, Г.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с одной внутренней сверх сингулярной точкой [Текст] / Г.М. Кадиров, Н.Раджабов // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященной 100 – летию со дня рождения академика И.Н. Векуа. – Новосибирск, 2007. – С. 171–172.

[33]. Кадиров, Г.М. Об одном классе обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с одной внутренней сверхсингулярной точкой [Текст] / Г.М. Кадиров, Н. Раджабов // Материалы республиканской научной конференции «Теория дифференциальных и интегральных уравнений и их приложения», посвященной 20-й годовщине Независимости Республики Таджикистан (Душанбе, 23-24 июня 2011 г.). – Душанбе: Сино, 2011. – С. 43–47.

[34]. Кадиров, Г.М. Интегральные представления многообразия решений для одного класса обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка с одной внутренней сингулярной точкой [Текст] / Г.М. Кадиров, Н. Раджабов // Материалы международной научной конференции «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами», посвященной 70-летию со дня рождения профессора Джангибекова Гулходжа (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – Душанбе, 2020. – С. 158–161.

[35]. Катрахов, В.В. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений [Текст] / В.В. Катрахов, С.М. Ситник // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2018. – Т. 64. – №2. – С. 211–428.

[36]. Келдыш, М.В. О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе области [Текст] / М.В. Келдыш // Докл. АН

СССР. – 1951. – Т.77, №2. – С.181–183.

[37]. Кигурадзе, И.Т. Сингулярные краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / И.Т. Кигурадзе, Б.Л. Шехтер // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Современные проблемы математики. – 1987. – Т. 30. – С. 105 – 201.

[38]. Кигурадзе, И.Т. Оценки функции Коши линейных сингулярных дифференциальных уравнений и их некоторые применения [Текст] / И.Т. Кигурадзе // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т.46, №1. – С. 29–46.

[39]. Крицков, Л.В. Некоторые спектральные свойства сингулярных обыкновенных операторов второго порядка [Текст]: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. / Л.В. Крицков. – М., 1990. – 19 с.

[40]. Круглов, В.Е. Решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с полиномиальными коэффициентами и фуксовой нулевой точкой [Текст] / В.Е. Круглов // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т.47, №1. – С. 21–28.

[41]. Ломов, И.С. Спектральные свойства одного сингулярного дифференциального оператора на отрезке с условиями сопряжения [Текст] / И.С. Ломов // Дифференциальные уравнения. – 2023. – Т. 59, №5. – С. 582–587.

[42]. Лютов, Е.В. Асимптотика решений и сингулярные краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / Е.В. Лютов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – №2(6). – С. 62–74.

[43]. Меликов, О.И. Интегральные представления и задачи типа линейного сопряжения для модельной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной внутренней сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, О.И. Меликов // Вестник Таджикского Государственного Национального Университета. – 2008. – №1(48). – С. 19 – 31.

[44]. Михайлов, Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными

коэффициентами [Текст] / Л.Г. Михайлов. – Душанбе: Дониш, 1963. – 183 с.

[45]. Михайлов, Л.Г. Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами [Текст] / Л.Г. Михайлов. – Душанбе: Дониш, 1969.

[46]. Михайлов, Л.Г. Об одном способе исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярными точками [Текст] / Л.Г. Михайлов // Докл. АН России. – 1994. – Т. 336, №1. – С. 21–23.

[47]. Михайлов, Л.Г. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя сингулярными точками [Текст] / Л.Г. Михайлов, Х.С. Хидиров // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2009. – Т. 52, №7. – С.507–512.

[48]. Моисеев, Е.И. О краевых задачах для одного нелинейного уравнения теории гравитации [Текст] / Е.И. Моисеев, В.А. Садовничий. – М: изд. Московского университета, 1986. – 85 с.

[49]. Мухамадиев, Э.М. Об ограниченных решениях одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Э.М. Мухамадиев, А.Н. Наимов // Математический сборник. – 2011. – Т. 202, № 9. – С. 121–134.

[50]. Мухамадиев, Э.М. Оценка роста одного семейства функций методом дифференциальных уравнений / [Текст] / Э.М. Мухамадиев, А.Н. Наимов // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. – 2014. – №2(29). – Ч. 1. – С. 187–189.

[51]. Мухсинов, А. Формула представления решений одного уравнения в частных производных с двумя сингулярными плоскостями [Текст] / А. Мухсинов, Н.К. Охунов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2011. – Т.54, №10. – С. 807–814.

[52]. Окунев, Л.Я. Высшая алгебра [Текст]: учебник / Л.Я. Окунев. – 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2021. – 336 с.

[53]. Олими, А.Г. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с внутренней сингулярной точкой [Текст] / А.Г. Олими //

Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. – 2019. – №3(50). – С. 20–25.

[54]. Олими, А.Г. Представление общего решения в интегральном виде и задачи типов Коши и линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка со сверхсингулярной точкой [Текст] / А.Г. Олими // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – 2021. – №1. – С. 60–77.

[55]. Олими, А.Г. Формула представления общего решения и задачи типа Коши - Рикье для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с граничной и внутренней слабо сингулярной точкой [Текст] /А.Г. Олими, М.Я. Дадоджанова, Н.К. Охунов, С.А. Толибов // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. – 2021. – №1(56). – С. 22–33.

[56]. Олими, А.Г. Формула представления общего решения и граничные задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с внутренней сингулярной точкой [Текст] / А.Г.Олими // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. – 2021. – №4 (59). – С. 13–19.

[57]. Олимов, А.Г. К теории одного сингулярного обыкновенного дифференциального уравнения специального типа [Текст] / А.Г. Олимов, Н.К. Охунов // Материалы республиканской научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения», посвященной 60-летию образования ТГНУ и 70-летию академика АН РТ Раджабова Нусрата (Душанбе, 25-26 сентября 2008 г.). – Душанбе: изд. ТГНУ. – С. 57–59.

[58]. Олимов, А.Г. Интегральное представление решений и задача типа Рикье для одного обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с сингулярной точкой [Текст] / А.Г. Олимов // Ученые записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова.

Серия: Естественные и экономические науки. – 2010. – №1 (16). – С. 3–5.

[59]. Олимов, А.Г. Об одном обобщении линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка [Текст] / А.Г. Олимов // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. – 2010. – №2 (17). – С. 17–19.

[60]. Олимов, А.Г. Интегральное представление решений и задача типа Рикье для одного обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с левой сверхсингулярной точкой [Текст] / А.Г. Олимов // Ученые записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. – 2011. – №3 (18). – С. 3–7.

[61]. Олимов, А.Г. Интегральное представление и задачи с начальными условиями для одной переопределенной системы в частных производных специального типа [Текст] / А.Г. Олимов // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. – 2015. – №4 (35). – С. 11–19.

[62]. Олимов, А.Г. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида с сингулярной точкой [Текст] / А.Г. Олимов, М.Я. Дадоджанова // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. – 2016. – №3 (38). – С. 24–31.

[63]. Олимов, А.Г. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка общего вида с сингулярной точкой [Текст] / А.Г. Олимов, Н. Раджабов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – 2016. – 1/4(216). – С. 3–7.

[64]. Олимов, А.Г. Интегральные представления и задачи типа Коши для одной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка со сверхсингулярной точкой [Текст] / А.Г. Олимов, Н. Раджабов // Докл. АН Республики Таджикистан. – 2017. – Т.60, №7-8. – С. 279–285.

[65]. Олимов, А.Г. Свойства решений и задачи типа Коши - Рикье для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с двумя

граничными сингулярными точками [Текст] /А.Г. Олимов, Ш.Э. Мирзоева // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. – 2019. – №1(48). – С. 11–18.

[66]. Орлов, С.С. Классические решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с вырождением [Текст] / С.С. Орлов //Вестник Иркутского университета. – 2007. – №51. – С. 120–121.

[67]. Павлоцкий, И.П. Поведение траекторий обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности сингулярной точки [Текст] / И.П. Павлоцкий, М. Стрианезе // Доклады Академии наук. – 2008. – Т. 419, №2. – С. 171–173.

[68]. Псху, А.В. Задача Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка [Текст] / А.В. Псху // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2011. – Т. 13, №1. – С. 107–108.

[69]. Раджабов, Н. Интегральные представления и граничные задачи для общего линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Душанбе, 1980. – Выпуск 3. – С.43–55.

[70]. Раджабов, Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями [Текст] / Н. Раджабов. – часть 2. – Душанбе: изд. ТГУ, 1981. – 170 с.

[71]. Раджабов, Н. Об одном методе представления многообразия решений общего линейного гиперболического уравнения второго порядка с регулярными и сингулярными коэффициентами на плоскости [Текст] / Н. Раджабов // Изв. АН Тадж. ССР. Отд. физ.-мат., хим. и геол. наук. – 1984, №4(94). – С. 8–14.

[72]. Раджабов, Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или

сингулярными поверхностями [Текст] / Н. Раджабов. – часть 4. – Душанбе: изд. ТГУ, 1985. – 157 с.

[73]. Раджабов, Н. К теории обыкновенных дифференциальных уравнений со сверхсингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов, В.В. Шевчук // Докл. АН ТаджССР. – 1989. – Т. 32, №8. – С. 506–510.

[74]. Раджабов, Н. Об одном классе линейных гиперболических уравнений четвертого порядка с двумя сингулярными линиями [Текст] / Н. Раджабов // Вестник Таджикского госуниверситета. – 1990, №5. – С. 3–9.

[75]. Раджабов, Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами [Текст] / Н. Раджабов. – Душанбе: изд-во ТГУ, 1992. – 236с.

[76]. Раджабов, Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков со сверхсингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов // Изв. АН Республики Таджикистан. – 1994, №1–2(8). – С. 4–9.

[77]. Раджабов, Н. Задача Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами [Текст] / Н. Раджабов// Тезисы апрельской научно-теоретической конф. профессорско-преподавательского состава. Серия естественных наук. – Душанбе: Сино, 1994. – С. 18.

[78]. Раджабов, Н. Системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с n суперсингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов // Международная конференция «Дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами». – Душанбе, 1996. – С. 69.

[79]. Раджабов, Н. К теории одного класса системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной сверхсингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов, С.С. Ходжаев // Международная конференция «Дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами». – Душанбе, 1996. – С. 74.

[80]. Раджабов, Н. Свойство решения одного класса нелинейной сингулярной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого

порядка на особой точке [Текст] / Н. Раджабов // Материалы научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава Таджикского Коммерческого Института. – Душанбе, 1996. – С. 770–773.

[81]. Раджабов, Н. Задачи типа Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с одной сверхсингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов // Научная конференция Дифференциальные уравнения с частными производными и их приложения. – Курган-Тюбе, 1997. – С. 46–47.

[82]. Раджабов, Н. Задачи типов линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с одной сингулярной и супер сингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов // Докл. АН Республики Таджикистан. – 1999. – Т. XLII, № 4. – С. 31–34.

[83]. Раджабов, Н. Интегральные представления для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярной и супер сингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов // Докл. АН Республики Таджикистан. – 2000. – Т. XLIII, №3. – С. 33–39.

[84]. Раджабов, Н. Об одном линейном обыкновенном дифференциальном уравнении второго порядка общего вида с левой граничной сверхсингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов, Г.М. Кадилов // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения и смежные вопросы анализа» (г. Душанбе, 8–10 ноября 2005 г.). – Душанбе, 2005. – С.145–148.

[85]. Раджабов, Н. Задачи типов линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с тремя внутренними сингулярными точками [Текст] / Н. Раджабов, Е. Шишкина // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и её приложения» (г. Худжанд, 29-31 мая 2003 г.). – Худжанд, 2003. – С. 119–122.

[86]. Раджабов, Н. К теории одного класса модельного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с левой граничной

сверхсингулярной точкой [Текст]/ Н. Раджабов, Г.М. Кадиров // Материалы республиканской научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения», посвященной 60-летию образования ТГНУ и 70-летию академика АН РТ Раджабова Нусрата (Душанбе, 25-26 сентября 2008 г.). – Душанбе: изд. ТГНУ, 2008. – С. 64–66.

[87]. Раджабов, Н. Интегральные уравнения типа Вольтера с фиксированными граничными и внутренними сингулярными ядрами и их приложения [Текст] / Н. Раджабов. – Душанбе: Деваштич, 2007. – 222 с.

[88]. Раджабов, Н. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н. Раджабов, С.К. Зарипов //Вестник Таджикского государственного национального университета. – 2008. – №1 (42). – С. 37–46.

[89]. Раджабов, Н. Решение немодельного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н. Раджабов, С.К. Зарипов //Вестник Таджикского национального университета. – 2009. – №1 (49). – С. 3–14.

[90]. Раджабов, Н. Об одном классе линейного гиперболического уравнения четвёртого порядка с четырьмя сингулярными линиями [Текст] / Н. Раджабов, С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2011. – №7 (71). – С. 3–9.

[91]. Раджабов, Н. Линейная модельная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной левой граничной сингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов, О.И. Меликов // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2015. – Т. 58, № 6. – С.451–457.

[92]. Раджабов, Н. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида с правой или левой сверхсингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов, М.Я. Дадоджанова, А.Г. Олимов // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. – 2016. – №2(37). – С.16–21.

[93]. Раджабов, Н. К теории одного класса сверхсингулярного

интегрального уравнения вольтеровского типа [Текст] / Н. Раджабов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – 2017. – 1/1. – С. 3–8.

[94]. Раджабов, Н. Переопределённая линейная система интегральных уравнений и сингулярные, сверхсингулярные интегральные уравнения типа Вольтерра третьего рода с логарифмическими и сверхсингулярными ядрами и их приложения [Текст] / Н. Раджабов. – Душанбе: ТНУ, 2021. – 317 с.

[95]. Раджабов, Н. К теории общего интегрального уравнения Вольтерровского типа с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н. Раджабов, С. Саидов // Докл. АН Республики Таджикистан. – 2012. – Т.55, №7. – С. 519–525.

[96]. Раджабова, Л.Н. Об одном классе линейного дифференциального уравнения третьего порядка с суперсингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов, Л. Раджабова // Труды международной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики и специальные функции». – Самара, 1992. – С.207–208.

[97]. Раджабова, Л.Н. Об одном классе гиперболического уравнения с сингулярными линиями [Текст] / Л.Н. Раджабова // Вестник национального университета. – 2002. – №5 (31). – С. 44–51.

[98]. Раджабова, Л.Н. К теории симметричных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью в ядре [Текст] / Л.Н. Раджабова, Г.Н. Шукурова // Докл. АН Республики Таджикистан. – 2017. – Т. 60, №3-4. – С. 126–131.

[99]. Расулов, А.Б. Об одной задаче типа линейного сопряжения для одного класса систем эллиптического типа высшего порядка [Текст] / А.Б. Расулов // Известия АН Тадж. ССР. – 1991. – №1(119). – С. 66–69.

[100]. Сабитов, К.Б. К теории уравнений смешанного типа [Текст] / К.Б. Сабитов. – М: Физматлит, 2014. – 300 с.

[101]. Сансоне, Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст]: том 2 / Дж. Сансоне. – М.: ИЛ, 1954. – 415 с.

[102]. Сатторов, А. К теории одного класса вырождающихся обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков [Текст] / Н. Раджабов, Г.М. Кадиров, А. Сатторов // Вестник Таджикского национального университета. – 2014. – 1/1(126). – С. 3–5.

[103]. Сатторов, А. Муодилаҳои дифференсиалии таназзулбанда [Матн] / А. Сатторов. – Душанбе, 2021. – 640 с.

[104]. Сафаров, Д.С. О решении одного класса дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными отклонениями аргумента [Текст] / Д.С. Сафаров, С.К. Миратов // Докл. АН Республики Таджикистан. – 2021. – Т. 64, №9-10. – С. 516–523.

[105]. Ситник, С.М. О представлении в интегральном виде решений одного дифференциального уравнения с особенностями в коэффициентах [Текст] / С.М. Ситник // Владикавказский математический журнал – 2010. – Том 12, Выпуск 4. – С. 73–78.

[106]. Смирнов, М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения [Текст] / М.М. Смирнов. – М: Наука, 1966. – 292 с.

[107]. Смирнов, М.М. Вырождающиеся гиперболические уравнения [Текст] / М.М. Смирнов. – Минск: Вышэйшая школа, 1977. – 157 с.

[108]. Смирнов, М.М. Уравнения смешанного типа [Текст] / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1970. – 296 с.

[109]. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений [Текст] / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.

[110]. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.

[111]. Усманов, З.Д. Обобщённые системы Коши-Римана с сингулярной точкой [Текст] / З.Д. Усманов. – Душанбе: Математический институт с ВЦ АН Тадж. ССР, 1993. – 224с.

[112]. Усманов, Н. Сингулярная граничная задача сопряжения гармонических функций [Текст] / Б.Б. Саидов, Н. Усманов // Докл. АН Республики Таджикистан. – 2015. – Т. 58, №12. – С. 1078–1083.

[113]. Хидиров, Х.С. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с тремя сингулярными точками [Текст] / Х.С. Хидиров // Докл. АН Республики Таджикистан. – 2010. – Т. 53, №1. – С. 20–24.

[114]. Хидиров, Х.С. Некоторые обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с сингулярными точками [Текст]: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Х.С. Хидиров. – Душанбе, 2011. – 17 с.

[115]. Чечик, В.А. Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью [Текст] / В.А. Чечик // Труды Московского математического общества. – 1959. – Т. 8. – С. 155–198.

[116]. Шамсуддинов, Ф.М. Об исследовании одного класса гиперболических уравнений второго порядка и связанных с ним переопределённых систем дифференциальных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными точками [Текст]: автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук / Ф.М. Шамсуддинов. – Душанбе, 2019. – 53 с.

[117]. Шевчук, В.В. Применение обыкновенных дифференциальных уравнений со сверхсингулярными коэффициентами для исследования краевых задач некоторых классов гиперболических уравнений [Текст]: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / В.В. Шевчук. – Душанбе, 1991.

[118]. Шоймкулов, Б.М. К теории переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией и двумя сверхсингулярными линиями [Текст] / Б.М. Шоймкулов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – 2018. – №3. – С. 32–43.

[119]. Begehr, H. Transformations, transmutations and kernel functions, V. 2 / H. Begehr, R.P. Gilbert. – Harlow: Longman, 1993. – 268 p.

[120]. Cai, Jian Ping. Asymptotic expressions for the solutions to the Cauchy problem for higher - order ordinary differential equations, when the limit equation has a singularity (Chinese) / Jian Ping Cai, Zong Chi Lin // Zhangzhou Shiyan Xuebao (Ziran Kexue Ban). 1993. No. 4. PP. 25–30.

[121]. Elschner, J. Singular ordinary differential operators and pseudo differential equations / J. Elschner. – Berlin: Academic-Verlag, 1985. – 200p.

[122]. Galiev, V.I. On a construction of solutions of systems of linear ordinary differential equations in the neighbourhood of a regular singularity / V.I. Galiev, A.F. Polupanov, I.E. Shparlinski // J. Comput. Appl. Math. 1992. 39. No. 2. PP. 151–163.

[123]. Gilbert, R.C. Asymptotic formulas for solutions of singular linear ordinary differential equation / R.C. Gilbert // Proc. Roy. Edinburgh Sect. A 81 (1978). No. 1–2. PP. 57–70.

[124]. Gilbert, R.P. Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations / R.P. Gilbert. – New York–London: Academic Press, 1969. – 311p.

[125]. Hoog, F.R. On the boundary problem for system of ordinary differential equations with a singularity of the second kind / F.R. Hoog, R. Weiss // SIAM J. Math. Anal. 1980. 11. PP. 41–60.

[126]. Rajabov, N. Linear hyperbolic equations of the fourth order with two singular lines / N. Rajabov // Proc. Asian Math. Conf. Hong-Cong. 1990. PP. 387–393.

[127]. Rajabov, N. Linear hyperbolic equations with two super - singular lines / N. Rajabov // Integral equations and boundary value problems. World Scientific Conference. Singapore. New – Jersey. London. Hong-Cong. 1991. PP. 170–175.

[128]. Rajabov, N. Higher ordinary differential equation with super-singular points / N. Rajabov // Abstract ISAAC Congress. New York: University of Delaware USA. 1997.

[129]. Rajabov, N. Linear conjugate boundary value problems for the second order linear ordinary differential equation with super-singular coefficients / N. Rajabov // International congress of Mathematicians. Berlin. 1998. P. 186.

[130]. Rajabov, N.R. Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients / N. R. Rajabov. – Dushanbe: TSNU, 1998. – 158 p.

[131]. Rajabov, N. Linear conjugate boundary value problems for the first order linear ordinary system differential equation with singular and super-singular

coefficients / N. Rajabov // Abstract of Plenary and invited Lectures Delivered at the second ISSAC Congress. Fukuoka. Japan. 1999. PP. 16–21.

[132]. Rajabov, N. Higher order ordinary differential equation with super-singular points / N. Rajabov// Partial Differential and Integral Equations. London: Kluwer Academic Publishers. 1999. PP. 347–357.

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В изданиях из перечня ВАК при Президенте Республики

Таджикистан и ВАК Министерства науки и высшего образования РФ:

[1-A]. Охунов, Н.К. Представление общего решения в интегральном виде и граничные задачи для одного обыкновенного операторно - дифференциального уравнения с тремя слабо сингулярными точками [Текст] / А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – 2022. – №3. – С. 141–159.

[2-A]. Охунов, Н.К. Задача типа линейного сопряжения для операторно - дифференциального уравнения с двумя граничными и одной внутренней сингулярными точками [Текст] / А.Г. Олими, Н.К. Охунов// Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия естественные и экономические науки. – 2022. – №4 (63). – С.12–20.

[3-A]. Охунов, Н.К. Представление общего решения в интегральном виде и задачи Коши-Рикье для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с тремя сингулярными точками [Текст] / Н.Р. Раджабов, А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – 2023. – №1. – С. 69–82.

[4-A]. Охунов, Н.К. Интегральное представление общего решения и задачи Коши - Рикье для обыкновенного операторно-дифференциального уравнения с тремя внутренними сверхсингулярными точками [Текст] / Н.К. Охунов // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика

Б. Гафурова. Серия естественные и экономические науки. – 2023. – №2 (65). – С.9–22.

[5-A]. Охунов, Н.К. Интегральное представление общего решения и задача типа линейного сопряжения для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с левой граничной слабосингулярной и двумя внутренними сингулярными точками [Текст] / А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – 2023. – №3. – С. 63–81.

2. В сборниках материалов конференций:

[6-A]. Охунов, Н.К. Интегральное представление общего решения и граничные задачи для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с тремя слабо сингулярными точками [Текст] / А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». В 2 томах, Том 1. – Уфа: Аэтерна, 2021. — С. 205–207.

[7-M]. Охунов, Н.Қ. Тасвири интегралӣи ҳалли умумӣ ва масъалаҳои Кошӣ - Рикӣе барои як муодилаи операторӣ - дифференсиалӣи одӣ бо се нуқтаи сингулярнокиаш паст [Матн] / А.Ғ. Олимӣ, Н.Қ. Охунов // Маводи конференсияи илмӣ – амалии ҷумҳуриявӣи «Муаммоҳои муосири математикаи татбиқӣ ва нақши он дар тавсеаи тафаккури техникаи ҷомеа». – Хучанд: Нури маърифат, 2021. – С. 130–133.

[8-A]. Охунов, Н.К. Задача типа линейного сопряжения для обыкновенного операторно - дифференциального уравнения с тремя слабо сингулярными точками [Текст] /Н.К. Охунов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш. Шабозова. – Душанбе: ООО Эр-граф, 2022. – С. 291–295.

[9-A]. Охунов, Н.К. Общее представление решений и задачи Коши-Рикье для одного операторно-дифференциального уравнения с тремя сингулярными

точками [Текст] / А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». Том 2 /отв. ред. З.Ю.Фазуллин. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2022. – С. 216–218.

[10-А]. Охунов, Н.К. Пример задачи типа линейного сопряжения для одного операторно - дифференциального уравнения с тремя слабо особыми точками [Текст] / Н.К. Охунов // Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвящённой 20 - летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы. – Душанбе, 2022. – С. 144–149.

[11-А]. Охунов, Н.К. Пример краевой задачи для одного обыкновенного дифференциального уравнения [Текст] / Н.К. Охунов, А.Г. Олими // Материалы международной научно-практической конференции «Комплексный анализ и его приложения», посвященной «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования», 75-летию чл. корр. НАН Таджикистана И.К. Курбанова и 70-летию профессора Д.С. Сафарова – Бохтар, 2022. – С.147–151.

[12-А]. Охунов, Н.К. Формула представления общего решения и задачи с начальными условиями для одного обыкновенного операторно - дифференциального уравнения с тремя внутренними сверхсингулярными точками [Текст] / Н.К. Охунов // Материалы международной научно-практической конференции «Развитие математических, точных и естественных наук в современных условиях: проблемы и перспективы». – Дангара, 2023 г. – С. 165–170.

[13-А]. Охунов, Н.К. Задача сопряжения решений для одного обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с тремя внутренними сверхсингулярными точками [Текст] / Н.К. Охунов, А.Г. Олими // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики», посвященной 50-летию Института математики им. А. Джураева НАН Таджикистана. – Душанбе, 2023. – С. 155 – 158.

[14-А]. Охунов, Н.К. Исследование по теории одного класса

обыкновенных дифференциальных уравнений специального типа с тремя сингулярными точками разного порядка [Текст] / Н.К. Охунов // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвященной 75-летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук 2020-2040 годы, 85-летию академика НАН Таджикистана Н. Раджабова. – Душанбе, 2023. – С. 138–143.

[15-A]. Охунов, Н.К. К теории класса обыкновенных дифференциальных уравнений с тремя сингулярными точками разного порядка [Текст] / А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики. Материалы международной научной конференции. – Нальчик, 2023. – С. 214–216.

[16-A]. Охунов, Н.К. Задача сопряжения для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с граничными и внутренней сингулярными точками [Текст] / Н.К. Охунов // Материалы международной научно-практической конференции «Математика в современном мире», посвященной Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических дисциплин в области науки и образования и 70-летию профессора Байзоева Саттора (Худжанд, 20 апреля 2024 г.). – Худжанд, 2024. – С. 50–55.