Министерство образования и науки Республики Таджикистан
Таджикский государственный университет права,
бизнеса и политики

На правах рукописи

УДК 517.9
ББК-22.161.6
Ш 78

Шокирова Мухбира Мухторхоновна

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОБОБЩЁННЫХ СИСТЕМ КОШИ-РИМАНА С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Худжанд – 2025

Работа выполнена в Таджикском государственном университете права, бизнеса и политики

Научный руководитель: **Байзаев Саттор,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математических дисциплин и современного естествознания Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики

Официальные оппоненты: **Раджабова Лутфия Нусратовна**, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теории функций и математического анализа Таджикского национального университета

Рахмонов Бахтовар Абдуганиевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Института математики им. А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана

Ведущее учреждение: Таджикский государственный финансово-экономический университет

Защита состоится 13 сентября в 10^{00} часов на заседании диссертационного совета 6D.КОА-084 при Таджикском государственом университете права, бизнеса и политики по адресу: 735700, г.Худжанд, 17-й мкр., д. 1, корпус 5, аудитория 208.

С диссертацией можно ознакомиться на сайте http://tsulbp.tj. и в библиотеке Таджикского государственого университете права, бизнеса и политики или

Автореферат разослан «____» ______________ 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.м.н., доцент **Ш.Ф. Мухамедова**

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Дифференциальные уравнения являются эффективным средством исследования различных процессов природы, естествознания, технических и других наук. В последние десятилетия в связи с решением прикладных задач, во многих разделах математической физики, геометрии, гидродинамики, газовой динамики, теории упругости и др. появились новые задачи, которые приводят к исследованию дифференциальных уравнений специального вида (см. [1], [4], [7], [9]). В этих уравнениях в отдельных точках, вдоль линий или вообще на множестве точек более сложной структуры происходит вырождение порядка или типа, или коэффициенты обращаются в бесконечность. Такие уравнения называются вырождающимися уравнениями или уравнения с сингулярными коэффициентами.

В диссертации исследуются обобщенные системы Коши-Римана (о.с.к.р.)

$$\partial_{\bar{z}}w + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0$$

и многомерные о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами.

Необходимость исследования о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами впервые было указано И.Н. Векуа [7]. Он рассмотрел случай, когда коэффициенты $A(z)$ и $B(z)$ являются квазисуммируемыми и при таком предположении для решений системы получил представление, называемое представлением второго рода, на основе которого устанавливаются разрешимость системы и основные свойства решений.

Л.Г. Михайлов [15] исследовал случай, когда коэффициенты имеют вид: $A(z) = |z|^{-1}a(z), B(z) = |z|^{-1}b(z)$, где $a(z)$ и $b(z)$ ограниченные функции и получил интегральное уравнение с ограниченным (вполне непрерывным, если дополнительно функции $a(z)$ и $b(z)$ непрерывны при $z = 0$ и $a(0) = b(0) = 0$)) оператором в специальных классах функций с полярными особенностями в точке $z = 0$. Однозначная разрешимость интегрального уравнения доказана при условии сжатости оператора, которое обеспечивается за счет малости нормы коэффициентов $a(z)$ и $b(z)$. В этом случае изучены граничные задачи типа задач Римана-Гильберта и задачи линейного сопряжения и получены соответствующие утверждения о разрешимости таких задач и формулы для подсчета индекса.

З.Д. Усманов [28] исследовал случай, когда коэффициенты имеют вид: $A(z) = 0, B(z) = \bar{z}^{-1}e^{in\varphi}b(z)$, где $n -$ целое число, $\varphi = \arg z$, $b(z)$ непрерывна, $b(0) \neq 0$ и при достаточно малых $|z|$ выполняются условия:

$$0 < m < |b(z) - b(0)| < M|z|^{\gamma}, \gamma > 0.$$

Им была выдвинута идея о том, что в этом случае теория будет увязываться не с а.ф., а с теорией решений модельной системы с коэффициентом $B_0(z) = \bar{z}^{-1} e^{in\varphi} b(0)$ и на этой основе он построил соответствующую полную теорию. В ряде своих работ З.Д. Усманов [26], [27] исследовал задачи, связанные с геометрией, а именно были изучены задачи о бесконечно малых изгибаниях поверхностей положительной кривизны с изолированной точкой уплощения: получил соответствующие уравнения с сингулярными точками, описал геометрический смысл краевых условий и установил ряд теорем разрешимости граничных задач.

Его ученики Х. Наджмиддинов [20] и Р. Ахмедов [2] продолжая исследования уравнений для случаев $B(z) = |z|^{-\alpha} e^{in\varphi} b(z), \alpha > 1$ и $B(z) = \bar{z}^{-1}\left[\lambda e^{in\varphi} + b(z)\right], \lambda \in C$ соответственно, достигли существенных научных результатов. Они получили различные представления решений, установили важнейшие их свойства как подобные свойствам аналитических функций, так и отличающиеся от них, установили теоремы разрешимости граничных задач типа задачи Римана-Гильберта и задачи линейного сопряжения.

В работах Г. Назирова [19] и Н.К. Блиева [5], [6] рассматривались различные вопросы, связанные с изучением о.с.к.р., в предположении, что $A(z) = |z|^{-1} a^*(z) e^{\pm i\varphi}, B(z) = |z|^{-1} b^*(z) e^{\pm i\varphi}$, причем $a^*(z)$ и $b^*(z)$ а.ф. по z и $\bar{z}$ в окрестности точки $z = 0$. Г. Назыровым при $a^*(z) \equiv 0$ и $b^*(0) = 0$ доказано существование решений специального вида. Эти результаты обобщены А. Мухсиновым [17].

А. Тунгатаров [25] исследовал случай, когда коэффициенты имеют вид: $A(z) = 0, B(z) = \bar{z}^{-1} e^{in\varphi} b(z)$, где $n -$ четное неотрицательное число, $b(z)$ непрерывна в $G, b(0) \neq 0$. Он основы теории о.с.к.р. распространил на дробные пространства Бесова.

В работах Г.Т. Макацария [14] для о.с.к.р. применен метод аналитических регуляризаторов И.Н. Векуа. При $A(z) = |z|^{-\nu} a(z), B(z) = |z|^{-\mu} b(z)$ и выполнении условий

$$\nu > [\mu] + 1 \ ([\mu] - \text{целая числа } \mu), a(0) \neq 0,$$

$$|z|^{-(\nu - |\nu| + 1)}\left(a(z) - a(0) e^{in\varphi}\right) \text{ и } |z|^{-(\mu - [|\mu|])} b(z) \epsilon L_p(G), p > 2, n - \text{целое},$$

исследовано поведение решений при $z \to 0$. Выявлены случаи, когда о.с.к.р. в окрестности точки $z = 0$ не имеет ненулевых ограниченных решений.

В ряде работ Н. Раджабова [21] и его учеников [23], [25], а также других авторов [24], [3] проводились исследования с различными классами уравнений и систем эллиптического, гиперболического и смешанного типов, переопределенных систем уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами, обыкновенных дифференциальных уравнений и систем, имеющие точечные особенности в коэффициентах. Для таких уравнений изучены задачи Коши, задача линейного сопряжения, задача о полиномиальных решениях, в частности ограниченных решениях, и др.

Следует отметить, что в последние десятилетия получили дальнейшее развитие исследования по уравнениям и системам с сингулярными коэффициентами. А. Мухсинов [18] в своих работах получил формулы представления решений некоторых классов многомерных вырождающихся (сингулярных) уравнений в частных производных эллиптического типа и решения разнообразных граничных задач. Рассматриваемые им уравнения и системы имеют сингулярные коэффициенты на линиях, плоскостях и других многообразиях, причем некоторые уравнения на указанных многообразиях меняют тип или вырождаются.

Н. Раджабов и А.Б. Расулов [22] рассматривали систему Бицадзе со сверхсингулярной окружностью, т.е. коэффициенты системы обращаются в нуль на окружности. Для этой системы исследованы ряд граничных задач, получены представления решений и утверждения о разрешимости рассматриваемых задач.

В работах Б. Шарипова [30], [31] исследованы некоторые классы нелинейных о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами и систем в полных дифференциалах с сингулярной линией, получены представления решений и условия разрешимости.

Г. Джангибеков [12] и его ученики рассматривали задачу сопряжения для о.с.к.р., когда $A(z) = \bar{z}^{-1}a(z), B(z) = \bar{z}^{-1}b(z),$ где $a(z)$ и $b(z)$ измеримые и ограниченные в единичном круге функции, имеющие предельные значения при $z \to 0$. Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи и получена формула для индекса.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы.

Существенный вклад в разработке изучаемой проблемы внесли И.Н. Векуа [7], Н.И. Мусхелишвили [16], Л.Г. Михайлов [15] Н.П. Векуа [8], З.Д. Усманов [26] – [28], Н.Р. Раджабов [21], [22], Н.К. Блиев [5], [6], В.С. Виноградов [10], Ф.Д. Гахов [11], А. Джураев [13], Г. Джангибеков [12], А. Мухсинов [23], Г.Т. Макацария [14], Г. Назиров [19], Х.Н. Нажмиддинов [20], А. Тунгатаров [25], Р. Ахмедов [2], Б. Шарипов [30], [31], их ученики и последователи.

Об исследованиях многих из этих ученых и полученных результатах было сказано в предыдущем пункте. Отметим, что в указанных исследованиях были использованы методы теории функций комплексного переменного, сингулярных интегральных уравнений и функционального анализа.

Несмотря на полученные существенные результаты по проблемам, связанными с о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами, тем не менее остаются не изученными ряд классов таких систем, в том числе многомерные системы с сингулярными коэффициентами и задачи нахождения решений из различных функциональных пространств. Представляет интерес, наряду с выше указанными методами, использование современных методов анализа и теории матриц для исследования о.с.к.р.

Диссертационная работа посвящена исследованию задач о разрешимости ранее не рассмотренных классов о.с.к.р. и многомерных систем с сингулярными коэффициентами в конкретных функциональных пространствах, вопросам построения общего решения и нахождению решений граничных задач. Исследование и разработка методов изучения этих задач несомненно являются актуальными и представляют научный интерес.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры математических дисциплин и современного естествознания Таджикского госуниверситета права, бизнеса и политики на 2016-2020 гг. по теме «Исследование дифференциальных уравнений эллиптического, гиперболического типов и дифференциальных игр в специальных функциональных пространствах» и на 2021 – 2025 гг. по теме «Дифференциальные уравнения с частными производными: теория и методика преподавания».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Изучение некоторых классов о.с.к.р. и многомерных о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами, построение для них общего решения и анализ разрешимости граничных задач.

Задачи исследования. Они заключаются в следующем:

1. Нахождение явного решения:

а) модельной о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами;

б) граничной задачи Римана-Гильберта;

в) задачи линейного сопряжения;

2. Изучение поведения решения указанных систем в окрестности сингулярной точки.

3. Построение общего решения многомерных о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами.

4. Изучение граничной задачи типа задачи Римана-Гильберта для указанной многомерной системы.

Объект исследования. Такими объектами являются:

1) О.с.к.р. с сингулярными коэффициентами вида

$$\partial_{\bar{z}}\Psi - \frac{a(z)}{2\bar{z}}\Psi - \frac{b(z)}{2\bar{z}}\overline{\Psi} = f(z), \qquad z \in G, \tag{1}$$

здесь $G -$ область, содержащая точку $z = 0$ и ограниченная замкнутым гладким контуром Г;

2) многомерная о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами вида

$$w_{\bar{z}} + \frac{1}{z^{\alpha}\bar{z}^{\beta}}A\overline{w} = 0, \tag{2}$$

где $w \in C^m -$ комплексное m-мерное пространство, $\alpha, \beta -$ вещественные числа, причем $\alpha + \beta > 0$ и $\alpha - \beta -$ целое, $A -$ комплексная матрица порядка m.

Предмет исследования. Таковыми являются доказательства утверждений об общем решении, о разрешимости граничных задач типа задачи Римана-Гильберта и сопряжения для рассматриваемых уравнений и систем.

Теоретические основы исследования. Таковыми являются теория обобщенных аналитических функций (а.ф.), теория функций комплексного переменного и методы дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Научная новизна исследования. Новизна полученных в диссертации результатов заключаются в следующем:

• Найдены многообразия решений из классов $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G\backslash 0)$ и $C^1(G\backslash\{0\}, \beta)$ о.с.к.р. вида

$$\partial_{\bar{z}}\Phi - \frac{\alpha}{2\bar{z}}\Phi - \frac{\lambda}{2\bar{z}}\overline{\Phi} = 0, z \in G \tag{3}$$

где $\alpha, \lambda -$ постоянные;

• Найдено интегральное представление решений из указанного класса для о.с.к.р. вида (3);

• Построены аналоги ядер $\Omega_1(z,\zeta)$, $\Omega_2(z,\zeta)$, используемые для получения решений рассматриваемых о.с.к.р.;

• Построены основные ядра и элементарные решения сопряженной системы;

• Выявлено поведение решений однородной системы соответствующей (1) в окрестности сингулярной точки $z=0$;

• Установлены утверждения о порядке нуля $z=0$ решений, о существовании решений из класса $C^m(G)$, $m-$ произвольный, аналитических по z и $\bar{z}$ решений, а также отсутствия ненулевых решений, принадлежащих классу $C^\infty(G)$ о.с.к.р. (3);

• Получены условия разрешимости и формулы решений граничных задач типа задачи Римана-Гильберта и задачи линейного сопряжения для о.с.к.р. (3);

• Получены интегральное уравнение эквивалентное о.с.к.р. (1) в классе $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G \backslash 0)$ и соответствующие условия разрешимости;

• Для о.с.к.р. вида (2) предложена схема построения общего решения и получены формулы решений;

• Для двумерных о.с.к.р. вида (2) с треугольной, а также антидиагональной матрицей коэффициентов построены явные формулы для общего решения;

• Для двумерных о.с.к.р. вида (2) с антидиагональной матрицей коэффициентов установлены теоремы разрешимости задачи типа Римана-Гильберта и представлены формулы для решения.

Положения, выносимые на защиту.

• Формулы решений из классов $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G \backslash 0)$ и $C^1(G_0,\beta)$, интегральное представление решений из указанного класса, теоремы о порядке нуля $z=0$ решений, о существовании решений из класса $C^m(G), m-$ произвольный, аналитических по z и $\bar{z}$ решений и отсутствия ненулевых решений, принадлежащих классу $C^\infty(G)$ для модельного уравнения (3);

• Условия разрешимости и формулы решений граничных задач типа задачи Римана-Гильберта и задачи линейного сопряжения для модельного уравнения (3), полученное интегральное уравнение, эквивалентное системе (1) в классе $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G \backslash 0)$ и условия разрешимости этого уравнения;

• Метод построения общего решения и формулы для решений многомерных о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами вида (2), теоремы разрешимости и формулы для решения задачи типа Римана-Гильберта для двумерных систем вида (2) с антидиагональной матрицей коэффициентов.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа в основном имеет теоретический характер. Разработанную методику исследования можно применять в задачах, связанных с другим классами о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами.

Степень достоверности результатов. Установленные в диссертации леммы и теоремы, формулы для решений уравнений и систем, а также для решений граничных задач обеспечены строгими и обоснованными доказательствами. Они согласуются с результатами других авторов, полученных в частных случаях.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 01.02.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, в которой исследованы разрешимость уравнений с частными производными, свойства решений и краевые задачи для них и соответствует пунктам 2, 3 и 5 раздела III – области исследований паспорта научной специальности.

Личный вклад соискателя учёной степени. Тема и направление диссертационного исследования выбраны соискателем по согласованию с научным руководителем, который также оказывал консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, перечисленные в разделе «Научная новизна исследования» получены лично автором. Подготовка статей к публикации, апробация полученных результатов диссертации выполнены соискателем.

Апробация и применение результатов диссертации. Основные результаты диссертации представлялись и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

- Международная научно-практическая конференция “Современная наука: Проблемы, идеи, инновации”, 25 декабря 2020 года. Чистополь, РФ;
- Международная научно-практическая конференция «World science problems and innovations», 30 мая 2021 года. Пенза, РФ;
- VIII Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук», 25-26 ноября 2022 г. Орёл, РФ;
- Международная научно-практическая конференция «Математика в современном мире», посвященная 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Байзаева Саттора, 20 апреля 2024 года. Худжанд;
- Международная конференция XLVII International Multidisciplinary Conference «Prospects and key tendencies of science in contemporary world», Мадрид, Испания. 2024.

- Уфимская осенняя математическая школа – 2024. 2 – 5 октября 2024 г. Уфа, РФ;

- В ежегодных научно-теоретических и научно-практических конференциях, проводимых в Таджикском государственном университете права, бизнеса и политики;

- Научный семинар при Таджикском государственном университете права, бизнеса и политики под руководством доктора физико-математических наук, профессора Байзаева С.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации отражены в 14 статьях, 6 из которых опубликованы в рецензируемых научных изданиях переченя рекомендованного ВАК при Президенте Республики Таджикистан. Из совместных работ в диссертацию включены результаты, полученные лично соискателем.

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения, общей характеристики, пяти глав, заключения и списка литературы, состоящей из 138 наименований. В диссертации для формул и параграфов используется двойная нумерация, первый номер совпадает с номером главы, а второй – с номерами формул. Общий объём диссертации 150 страницы машинописного текста.

Благодарность автора. Автор выражает глубокую благодарность профессору С. Байзаеву и доценту Р. Ахмедову за полезные советы при подготовке диссертационной работы.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Материал и методы исследования. Материал исследования состоит из решения задач о построении решений рассматриваемых уравнений и систем, а также о разрешимости граничных задач типа задачи Римана-Гильберта и линейного сопряжения для этих объектов. В диссертации используются методы теории обобщенных а.ф., теории функций комплексного переменного, теории матриц, дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Результаты исследования. Приведем краткое изложение результатов диссертационной работы.

В **первой главе** (§§ 1.1, 1.2) приводится обзор литературы, близкие к теме диссертации. В § 1.1 дается анализ литературы по о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами. В § 1.2 дается обзор работ, посвященных уравнениям математической физики с сингулярными линиями и поверхностями.

Вторая глава (§§ 2.1 – 2.4) диссертации посвящена модельной о.с.к.р. (3). Такая система при $\alpha = 0$ изучена в работах З.Д. Усманова [26] и его учеников и при соответствующих условиях получены представления решений, установлены их свойства и построены решения задач типа задач Римана-Гильберта и задачи линейного сопряжения.

Развивая метод исследования указанных работ, в § 2.1 для о.с.к.р. (3) при условиях $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \neq 0,\ \lambda \neq 0$ построены функции $\Omega_1(z,\zeta), \Omega_2(z,\zeta) -$ аналогы ядер из теории обобщенных а.ф. и на их основе найдено представление решений этой системы. В § 2.2 установлены ряд важных свойств этих ядер. В § 2.3 приводятся основные свойства оператора

$$S_G f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \left[\frac{\Omega_1(z,\zeta\,)}{\zeta} f(\zeta) + \frac{\Omega_2(z,\zeta\,)}{\zeta}\overline{f(\zeta)}\right] d\xi d\eta,$$

играющую основную роль при исследовании разрешимости о.с.к.р. (1). В § 2.4 задача разрешимости о.с.к.р. (1) приведено к эквивалентной задаче разрешимости интегрального уравнения

$$\Psi(z) = \Phi(z) + S_G F + P_{1G}\Psi + P_{2G}\overline{\Psi}, \qquad z \in G, \tag{4}$$

где

$$P_{1G}\Psi = S_G(A\Psi),\ P_{2G}\Psi = S_G(B\overline{\Psi}),$$

$$A(z) = (2\bar{z})^{-1}[a(z) - a(0)], B(z) = (2\bar{z})^{-1}[b(z) - b(0)],$$

$\Phi(z) \in C(G) \cap C_{\bar{z}}(G\backslash 0) -$ решение однородного уравнения вида (3) с $\alpha = a(0), \lambda = b(0)$ и на основе методов функционального анализа представлены условия разрешимости уравнения (4).

Глава 3 посвящена дальнейшему исследованию модельной и основной о.с.к.р. (3) и (1). В § 3.1 построены основные ядра и элементарные решения сопряженной системы, соответствующей о.с.к.р. (3). В § 3.2 получены обобщённые формула и интеграл типа Коши для решений о.с.к.р. (3).

Пусть $\Gamma -$ простой гладкий замкнутый контур, делящий плоскость E комплексного переменного на области G^+ (содержит точку $z = 0$), G^- (содержит точку $z = \infty$) и $G_0^+ = G^+\backslash\{0\}$. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.1. *Для того чтобы* $\nu(\zeta), \zeta \in \Gamma$ *была граничным значением функции* $\Phi^+(z), z \in G^+$, *являющейся решением уравнения* (3) *из класса* $C^1(G_0^+ \cup \Gamma)$, *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\Omega_1(z,\zeta\,)}{\zeta}\nu(\zeta)d\zeta-\frac{\Omega_2(z,\zeta\,)}{\zeta}\overline{\nu(\zeta)}\,\overline{d\zeta}=0,z\in G^- .$$

Теорема 3.2. *Для того чтобы* $\nu(\zeta),\zeta\in\Gamma$ *была граничным значением функции* $\Phi^-(z),z\in G^-$, *являющейся решением уравнения* (3) *из класса* $C^1(G^-\cup\Gamma)$, *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\Omega_1(z,\zeta\,)}{\zeta}\nu(\zeta)d\zeta-\frac{\Omega_2(z,\zeta\,)}{\zeta}\overline{\nu(\zeta)}\,\overline{d\zeta}=0,z\in G^+ .$$

В § 3.3 найдены решения о.с.к.р. (3) из класса $C^1(G\backslash\{0\},\beta),\beta>0$ и установлены ряд свойств решений. Пусть $\alpha-$вещественное число и $l_0=\left[\sqrt{\alpha^2-|\lambda|^2}\right]$ при $|\alpha|>|\lambda|$.

Теорема 3.6. *Пусть* $\alpha-$ *действительное число и* $\Phi(z)-$ *непрерывное в* G *решение о.с.к.р.* (3). *Тогда* $\Phi(0)=0$ *и порядок нуля определяется так:*

$$\nu=\begin{cases}\alpha-\mu_k,k=0,1,\dots,l_0 \text{ и } \alpha+\mu_k,k=0,1,\dots \text{ при } \alpha>|\lambda|,\\ \mu_k-|\alpha|,k=l_0+1,l_0+2,\dots \text{при } \alpha<0 \text{ и } |\alpha|>|\lambda|,\\ \alpha+\mu_k,k=0,1,\dots \text{ при} -|\lambda|\le\alpha\le|\lambda|,\end{cases}$$

где $\mu_k=\sqrt{k^2+|\lambda|^2}$.

Теорема 3.7. *При любом* m *о.с.к.р.* (3) *разрешима в* $C^m(G)$.

Пусть

$$\Lambda_{1kp}=\left\{(\alpha,\lambda):\alpha>|\lambda|,\alpha-\sqrt{k^2+|\lambda|^2}=k+2p\right\},k=0,1,\dots,l_0;p=1,2,\dots,$$
$$\Lambda_{2kp}=\left\{(\alpha,\lambda):\alpha>0,\alpha+\sqrt{k^2+|\lambda|^2}=k+2p\right\},k=0,1,\dots;p=1,2,\dots,$$
$$\Lambda_{3kp}=\left\{(\alpha,\lambda):\alpha<0,\alpha-\sqrt{k^2+|\lambda|^2}=k+2p\right\},k=l_0+1,\dots;p=1,2,\dots,$$
$$\Lambda_1=\cup_{k=0}^{l_0}\left(\cup_{p=1}^{\infty}\Lambda_{1kp}\right),\Lambda_2=\cup_{k=0}^{\infty}\left(\cup_{p=1}^{\infty}\Lambda_{2kp}\right),$$
$$\Lambda_3=\cup_{k=l_0+1}^{\infty}\left(\cup_{p=1}^{\infty}\Lambda_{3kp}\right),\Lambda=\cup_{j=1}^{3}\Lambda_j.$$

Справедливы следующие теоремы

Теорема 3.8. *О.с.к.р.* (3) *имеет ненулевые аналитические по* z *и* $\bar{z}$ *решения в области* $G\backslash\{0\}$, *в том и только том случае, когда* $(\alpha,\lambda)\in\Lambda$.

Теорема 3.9. *Пусть* $(\alpha,\lambda)\overline{\in}\Lambda$ *и функция* $\Psi(z)$ *является решением уравнения* (3), *причем* $\Psi(z)\in C^m(G)$ *для некоторого* $m>\alpha+|\lambda|$ и $|\Psi(z)|<M, |z|=R$. *Тогда справедлива оценка*

$$|\Psi(z)|<\frac{MR}{R-|z|}\left(\frac{|z|}{R}\right)^{\alpha+\mu_{k_m}},\ z\in G,$$

где $k_m=\sqrt{(m-\alpha)^2-|\lambda|^2}$.

Теорема 3.10. *Если* $(\alpha,\lambda)\overline{\in}\Lambda$, *то о.с.к.р.* (3) *в классе* $C^\infty(G)$ *имеет только нулевое решение.*

В § 3.4 рассмотрена краевая задача Римана-Гильберта для о.с.к.р. (3) в круге $G=\{z:|z|<R\}$ с границей $\Gamma=\{z:|z|=R\}$ в следующей постановке:

найти решение $\Phi(z)$ *о.с.к.р.* (3) *из класса* $C^1(G\backslash\{0\})\cap C(G\cup\Gamma)$, *удовлетворяющее на границе условию*

$$\mathrm{Re}[z^{-m}\Phi(z)]=h(z). \tag{5}$$

Доказаны теоремы 3.11 – 3.15 о разрешимости однородной краевой задачи (о.к.з.) и неоднородной краевой задачи (н.к.з.).

Теорема 3.11. *При* $m=0$ *и* $\mathrm{Im}(\lambda-P_{20})\neq 0$ *н.о.к.з.* (3), (5) *однозначно разрешима:*

$$\Phi(z)=\frac{i(\bar{\lambda}-P_{20})h_0}{\mathrm{Im}(\lambda-P_{20})}\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1+\mu_{10}}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\lambda h_k}{\lambda+\overline{P_{1k}}}e^{ik\varphi}+\frac{\overline{P_{1k}}\overline{h_k}}{\bar{\lambda}+\overline{P_{1k}}}e^{-ik\varphi}\right\}\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}}$$

где h_k- *коэффициенты Фурье функции* h, $\alpha_1+i\alpha_2=\alpha$,

$$\mu_{1k}=\left(\frac{1}{2}\sqrt{(k^2+|\lambda|^2-\alpha_2^2)^2+4\alpha_2^2k^2}+k^2+|\lambda|^2-\alpha_2^2\right)^{1/2},$$

$$P_{20}=\mu_{10}+i(\mu_{10}-\alpha_2), P_{1k}=\mu_{1k}-k+i(\mu_{2k}-\alpha_2).$$

Теорема 3.12. *При* $m = 0$ *и* $\mathrm{Im}(\lambda - P_{20}) = 0$ *о.к.з.* (3), (5) *имеет одно линейно независимое решение* $i(\bar{\lambda} - P_{20})c_0 r^{\alpha_1+\mu_{10}}$, *где* c_0 *– произвольная вещественная постоянная, а для н.к.з. имеет решение тогда и только тогда, когда* $h_0 = 0$.

Следующие теоремы установлены в нашей работе [3-А]: «Пусть $m \neq 0$.

Теорема 3.13. *При* $m > 0$, $\alpha_1 \geq 0$ *и* $|\alpha| < |\lambda|$ *о.к.з.* (3), (5) *имеет* $2m$ *линейно независимых (над полем вещественных чисел) решений, а н.к.з. разрешима безусловно.*

Теорема 3.14. *При* $m > 0$, $\alpha_1 \geq 0$ *и* $|\alpha| \geq |\lambda|$ *о.к.з.* (3), (5) *имеет* $4m$ *линейно независимых (над полем вещественных чисел) решений, а н.к.з. разрешима безусловно.*

Отметим, что в условиях теорем 3.13 и 3.14 найдены формулы решений.

Теорема 3.15. *При* $m < 0$ *о.к.з.* (3), (5) *имеет не имеет решений, отличных от нуля. Н.к.з. допускает решения, тогда и только тогда, когда* $h(z)$ *удовлетворяет* $2|m|$ *вещественным условиям разрешимости»* [3-А].

В § 3.5 рассмотрена задача сопряжения для уравнения (3). Введем обозначения:

$G^+ = \{z\colon |z| < R\}, G^- = \{z\colon |z| > R\}, \Gamma = \{z\colon |z| = R\}, \bar{G}^+ = G^+ \cup \Gamma.$

Задача. *Найти решение* $\Phi^+(z)$ *о.с.к.р.* (3) *из класса* $(G^+ + \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G^+ - 0)$ *и аналитическую в области* G^- *функцию* $\Phi^-(z)$, *ограниченную при* $z = \infty$ *и непрерывно продолжимую на* Γ, *удовлетворяющие условию*

$$\Phi^+(t) = t^m \Phi^-(t) + g(t), t \in \Gamma, \tag{6}$$

где m *– целое,* $g(t)$ *– заданная функция.*

Будем считать, что функция $g(t)$ имеет ряд Фурье, который сходится абсолютно и равномерно.

Теорема 3.16. *Пусть* $m \geq 1$. *Тогда решения однородной задачи* (3), (6) *определяется следующими рядами*

$$\Phi_0^+(z) = i(\bar{\lambda} - P_{20})c_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1+\mu_{10}} + \\ + \sum_{k=1}^{m} \left\{\lambda c_k e^{ik\varphi} + \overline{P_{1k}}\bar{c}_k e^{-ik\varphi}\right\} \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}}, z \in \bar{G}^+,$$

$$\Phi_0^-(z) = i(\bar{\lambda} - P_{20})c_0 z^{-m} + \sum_{k=1}^{m} \{\lambda c_{m-k} R^{-k} z^{k-m} + \overline{P_{1k}}\bar{c}_k R^k z^{-k-m}\}, z \in G^-,$$

в которых произвольные постоянные c_0– вещественная, остальные c_k– комплексные. Неоднородная задача (3), (6) *всегда разрешима.*

Отметим, что многообразие решений однородной задачи зависит от $2m+1$ произвольных вещественных постоянных.

В случае $m<0$ справедлива следующая

Теорема 3.17. *Если* $m<0$*, то о.к.з.* (3), (6) *имеет только нулевое решение, а н.к.з разрешима в том и только том случае, когда* $g(t)$ *удовлетворяет* $2|m|-1$ *вещественным условиям*

$$\mathrm{Im}\left(\frac{g_0}{\bar{\lambda}-P_{20}}\right)=0, \bar{\lambda}g_{-k}-P_{1k}\overline{g_k}=0, k=1,\dots,|m|-1.$$

В § 3.6 изучено поведение решений однородного уравнения

$$\partial_{\bar{z}}\Psi-\frac{a(z)}{2\bar{z}}\Psi-\frac{b(z)}{2\bar{z}}\overline{\Psi}=0, \qquad z\in G, \tag{7}$$

соответствующее (1), в окрестности особой точки $z=0$.

Пусть $a(0)=\alpha=\alpha_1+i\alpha_2, b(0)=\lambda$. Справедлива следующая

Теорема 3.18. *Пусть* $\Psi(z)$ *− решение уравнения* (7) *из класса* $C(\bar{G})\cap C_{\bar{z}}(G\backslash 0)$. *Тогда для* $\Psi(z)$ *при* $z\to 0$ *справедливо соотношение*

$$\Psi(z)=\left(\beta_0+\frac{\lambda}{|\lambda|}\overline{\beta_0}\right)r^{\alpha_1+\mu_{10}}+O(r^{\alpha_1+\mu_{10}+a_0}),$$

где

$$a_0=\frac{1}{4\pi R^{|\lambda|}}\int_0^{2\pi}\Psi\left(Re^{i\theta}\right)d\theta,\ \beta_0=a_0-\frac{1}{2\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)}{\zeta|\zeta|^{\mu_{10}}}d\xi d\eta,$$

$$\mu_{10}=\begin{cases}\sqrt{|\lambda|^2-\alpha_2^2} & \text{при } |\lambda|\geq|\alpha_2|,\\ 0 & \text{при } |\lambda|<|\alpha_2|,\end{cases}$$

$$f(\zeta)=\frac{a(\zeta)-a(0)}{2\bar{\zeta}}\Psi(\zeta)+\frac{b(\zeta)-b(0)}{2\bar{\zeta}}\overline{\Psi(\zeta)}.$$

Глава 4 (§§ 4.1 – 4.3) посвящена исследованию многомерных о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами вида (2).

В § 4.1 излагается схема построения общего решения системы (2). Переходом в полярные координаты решения системы ищутся в виде тригонометрического ряда по $\varphi = argz$ с неизвестными коэффициентами $w_n(r)$, зависящими от $r = |z|$. Для этих неизвестных коэффициентов получаются родственные уравнения Бесселя, в которых коэффициент при искомой вектор-функции имеет вид: $n(2\alpha+n)E_m + 4r^{2(1-\alpha-\beta)}A\bar{A}, E_m -$ единичная матрица порядка m. В зависимости от α,β и собственных значений λ_j матрицы $A\bar{A}$ найдены общие решения последних уравнений, затем выписано общее решение исходной системы. Одним из главных результатов этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть число* $s=\beta-\alpha-1$ *нечетное и все собственные значения* λ_j *матрицы* $A\bar{A}$ *полупростые. Тогда общее решение системы* (2) *имеет вид*

$$w=\sum_{n\geq p}^{\infty}\left\{w_n(r)e^{in\varphi}+w_{p-n}e^{i(p-n)\varphi}\right\}, \tag{8}$$

здесь $p=\frac{s+1}{2}$, $w_n(r)=S\left[u_{1n},\dots,u_{qn}\right]$, $S-$ *матрица, столбцы которой состоят из собственных векторов матрицы* $A\bar{A}$, *отвечающих собственным значениям* λ_j, *координаты вектор-функций* u_{jn} *в зависимости от значений* α,β *и* λ_j *определяются по формулам:*

$$v(r)=r^{-\alpha}Z_\nu\left(\frac{2i\sqrt{\lambda_j}}{1-\gamma}r^{1-\gamma}\right) \text{ при } (1-\gamma)\lambda_j\neq 0, \tag{9}$$

$$v(r)=\begin{cases} C_1r^{-\alpha+\frac{\mu}{2}}+C_2r^{-\alpha-\frac{\mu}{2}} \text{ если } \mu\neq 0, \\ r^{-\alpha}(C_1+C_2lnr) \text{ если } \mu=0, \end{cases} \text{ при } (1-\gamma)\lambda_j=0, \tag{10}$$

$Z_\nu -$ *цилиндрические функции,* $\nu=\frac{|\alpha+n|}{1-\gamma}$, $\gamma=\alpha+\beta$, C_1, $C_2 -$ *произвольные комплексные постоянные,* $\mu=2\sqrt{(\alpha+n)^2+4\lambda_j}$, *а вектор-функции* w_{p-n} *определяются из системы*

$$\bar{A}w_{p-n}(r) = \frac{r^{\gamma}}{2}\left[-\bar{w}_n'(r) + \frac{n}{r}\bar{w}_n(r)\right].$$

Аналогичное утверждение имеет место и для случая когда число $s = \beta - \alpha - 1$ является четным.

В случае когда у матрицы $A\bar{A}$ есть собственные значения, не являющиеся полупростыми, т.е. имеющие неодинаковые алгебраические и геометрические кратности, приходится решать и неоднородные родственные уравнения Бесселя вида

$$r^2v'' + (2\alpha+1)rv' - \left(n(2\alpha+n) + 4r^{2(1-\gamma)}\lambda_j\right)v = f(r). \qquad (11)$$

Справедлива следующая лемма об общем решении уравнения (11).

Лемма 4.1. *Пусть* $\gamma \neq 1$ *и* $\lambda_j \neq 0$. *Тогда общее решение неоднородного уравнения* (11) *имеет вид*

$$v(r) = \frac{r^{-\alpha}}{\gamma - 1}\left\{J_\nu\left[C_1 + \int r^{3+\alpha}Y_\nu f(r)dr\right] - Y_\nu\left[C_2 + \int r^{3+\alpha}J_\nu f(r)dr\right]\right\},$$

здесь всюду бесселевы функции зависят от аргумента $\frac{2i\sqrt{\lambda_j}}{1-\gamma}r^{1-\gamma}$, C_1, C_2 – *произвольные комплексные постоянные.*

Для наглядности приведены примеры.

Пример 1. Пусть в системе (2) матрица коэффициентов A антидиагональная, т.е. все элементы, расположенные вне второй (неглавной) диагонали равны нулю. Для удобства элементы, расположенные на второй диагонали обозначим через a_1, a_2,…, a_m. Тогда матрица $A\bar{A}$ будет диагональным, а именно,

$$A\bar{A} = diag[a_1\bar{a}_m,\ a_2\bar{a}_{m-1}, \dots, a_m\bar{a}_1].$$

Поэтому собственные значения матрицы $A\bar{A}$ будут полупростыми и равны $\lambda_j = a_j\bar{a}_{m-j+1}$. Следовательно, в этом случае справедливо утверждение типа теоремы 4.1.

При $a_j \neq 0\ \ \forall\, j = 1, \dots, m$ все λ_j будут ненулевыми и все вектор-функции u_{jn} определяются по формуле вида (9). Если среди чисел a_j есть нулевое, например, $a_k = 0$, то $\lambda_k = \lambda_{m-k+1} = 0$ и вектор-функции u_{kn} и $u_{m-k+1,n}$ определяются по формуле вида (10).

Пример 2. Рассмотрим случай, когда матрица A является треугольной с элементами $a_{11}, a_{22},\ldots, a_{mm}$ на главной диагонали. Тогда матрица $A\bar{A}$ будет треугольной и его собственные значения равны $\lambda_j = |\,a_{jj}|^2$. Если эти собственные значения являются полупростыми, то в этом случае верны аналогичные заключения из примера 1.

В § 4.2 рассматривается случай двумерной системы с ненулевой матрицей $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Приведем одно утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть число* $s = \beta - \alpha - 1$ *нечетное и* $(1-\gamma)ab \neq 0$. *Тогда общее решение системы* (2) *имеет вид*

$$w = \sum_{n \geq p}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} e^{in\varphi} + \begin{pmatrix} u_{s-n}(r) \\ v_{s-n}(r) \end{pmatrix} e^{i(s-n)\varphi} \right\}, \tag{12}$$

где $p = \frac{s+1}{2}$, *функции* $u_n(r), v_n(r), u_{s-n}(r), v_{s-n}(r)$ *определяются по формулам:*

$$u_n(r) = \frac{\pi r^{\delta}}{4(1-\gamma)} \left\{ J_\nu \left[C_1 + \int r^{3-\delta} Y_\nu\, f_n(r) dr \right] - Y_\nu \left[C_2 + \int r^{3-\delta} J_\nu\, f_n(r) dr \right] \right\},$$

здесь $\delta = \frac{1+n+\gamma}{2}$, $\nu = \frac{|n-1-\gamma|}{2(1-\gamma)}$, *всюду бесселевы функции зависят от аргумента* $\frac{|a|i}{1-\gamma} r^{1-\gamma}$, C_1, C_2 *— произвольные комплексные постоянные,*

$$f_n(r) = 4\left(a\bar{c} + \bar{b}c\right) r^{2(1-\gamma)} v_n + 4c\gamma r^{1-\gamma} \bar{v}_{s-n},$$

$$v_n(r) = r^{-\alpha} Z_\nu \left(\frac{4i|b|}{1-\gamma} r^{1-\gamma} \right), \quad v_{s-n}(r) = \frac{r^{\gamma}}{2\bar{b}} \left[-\bar{v}_n'(r) + \frac{n}{r} \bar{v}_n(r) \right],$$

$$u_{s-n}(r) = \frac{r^{\gamma}}{2\bar{a}} \left[-\bar{u}_n'(r) + \frac{n}{r} \bar{u}_n(r) - \frac{2c}{r^{\gamma}} \bar{v}_{s-n} \right].$$

В § 4.3 исследована задача Римана-Гильберта для системы вида (2) с антидиагональной матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ (см. [6-А]): «В начале построено общее решение системы, а затем из них выделены решения рассматриваемой задачи.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 4.4. *Пусть* $\gamma = \alpha + \beta > 0, \alpha - \beta -$ *целое и* $a \neq 0, b = 0$ *или* $a = 0, b \neq 0$. *Тогда общее решение системы* (2) *имеет вид*

$$w = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} e^{in\varphi}, \tag{13}$$

здесь функции $u_n(r), v_n(r)$ *в зависимости от значения* γ *и коэффициентов системы находятся по формулам:*

при $a = 0$

$$u_n = C_n r^n, v_n(r) = \begin{cases} r^n \left(D_n + \dfrac{b\bar{C}_n}{(1-\beta) r^{2(\beta-1)}} \right) \text{ при } \beta \neq 1, \\ r^n (D_n - 2b\bar{C}_n \ln r) \text{ при } \beta = 1, \end{cases}$$

при $b = 0$

$$v_n = C_n r^n, \;\; u_n(r) = \begin{cases} r^n \left(D_n + \dfrac{a\bar{C}_n}{(1-\beta) r^{2(\beta-1)}} \right) \text{ при } \beta \neq 1, \\ r^n (D_n - 2b\bar{C}_n \ln r) \text{ при } \beta = 1, \end{cases}$$

$C_n, D_n -$ *произвольные комплексные постоянные.*

Теорема 4.5. *Пусть* $\gamma = \alpha + \beta > 0, \alpha - \beta -$ *целое и* $ab \neq 0$. *Тогда общее решение системы* (2) *имеет вид*

$$w = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n(r) e^{in\varphi} \\ v_{s-n}(r) e^{i(s-n)\varphi} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

здесь $s = \beta - \alpha - 1$, *функции* $u_n(r), v_{s-n}(r)$ *в зависимости от значения* γ *и коэффициентов системы находятся по формулам:*

при $\gamma \neq 1$

$$u_n(r) = r^{-\alpha}[C_n I_\nu(cr^{1-\gamma}) + D_n K_\nu(cr^{1-\gamma})],$$

$$v_{s-n}(r) = \frac{r^{\gamma-\alpha-1}}{2\bar{a}}\{|n+\alpha|(\varepsilon_n - \varepsilon)[\bar{C}_n I_\nu(\bar{c}r^{1-\gamma}) + \bar{D}_n K_\nu(\bar{c}r^{1-\gamma})] -$$

$$-\bar{c}(1-\gamma)r^{1-\gamma}\left[\bar{C}_n I_{\nu+1}(\bar{c}r^{1-\gamma}) - \bar{D}_n K_{\nu+1}(\bar{c}r^{1-\gamma})\right]\},$$

где $c = \frac{2\sqrt{a\bar{b}}}{|1-\gamma|}, \nu = \left|\frac{n+\alpha}{1-\gamma}\right|$, $I_\nu -$ *функция Бесселя мнимого аргумента,* $K_\nu -$ *функция Макдональда,* $\varepsilon_n = sgn(n+\alpha), \varepsilon = sgn(1-\gamma)$;

при $\gamma = 1$

$$u_n(r) = C_n r^{\delta_1} + D_n r^{\delta_2},\ \ v_{s-n}(r) = \frac{n-1}{2\bar{a}}\left(\bar{C}_n\bar{\delta}_1 r^{\bar{\delta}_1} + \bar{D}_n\bar{\delta}_2 r^{\bar{\delta}_2}\right),$$

если $d = (n+\alpha)^2 + 4a\bar{b} \neq 0$; $\delta_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{(n+\alpha)^2 + 4a\bar{b}}$;

$$u_n(r) = r^{-\alpha}(C_n + D_n \ln r),\ v_{s-n}(r) = \frac{r^{-\alpha}}{2\bar{a}}[(n-\alpha)(C_n + D_n\ln r) - D_n],$$

если $d = 0$; $C_n, D_n -$ *произвольные комплексные постоянные.*

Замечания. 1. Сходимость рядов (5.4) – (5.7) и их первых производных можно обеспечить за счет выбора произвольных постоянных C_n, D_n и учета свойств функций J_ν, Y_ν I_ν и K_ν.

2. Для решений, непрерывных в нуле нужно требовать условия

$$u_n(0) = v_n(0) = 0\ \forall n \neq 0. \tag{15}$$

Далее рассмотрена граничная задача типа задачи Римана-Гильберта.

Задача I. *Найти решение* $w(z) = \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix}$ *системы* (2) *из класса* $C^1(G\backslash\{0\}) \cap C(\bar{G}),\ G = \{z: |z| < 1\}$, *удовлетворяющее граничному условию*

$$u\left(e^{i\varphi}\right) = h(\varphi), \tag{16}$$

здесь $h(\varphi) -$ *заданная непрерывная* 2π*-периодическая функция.*

Для нахождения решений задачи I используется представление решений системы (2) и условия (15), (16). В результате получены теоремы о разрешимости задачи I.

Теорема 4.6. *Пусть* $\gamma < 1$ *и* $\alpha \geq 0$. *Пусть число* c *не является нулем функции* $I_\nu(z)$ *и* $S = \{n \in Z: -2\alpha \leq n < 0\}$. *Тогда справедливы утверждения:*

i) если $S \neq \emptyset$, *то задача I разрешима при условии* $h_n = 0 \ \forall\, n \in S$.

ii) если $S = \emptyset$, *то задача I безусловно разрешима.*

Замечания. 1. Однородная задача имеет только нулевое решение» [6-А]).

2. Решение задачи I пишется в виде ряда (14) с коэффициентами, определяемыми по формулам из теоремы 4.5, в которых $C_n = \frac{h_n}{I_\nu(c)}$.

3. В случае $S \neq \emptyset$ число условий разрешимости конечное и равно $[2\alpha]$.

4. Число c может быть нулем функции $I_\nu(z)$ только при

$$\arg a = \arg b \pm \pi.$$

Теорема 4.7. *Пусть* $\gamma < 1$ *и* $\alpha < 0$. *Пусть число* c *не является нулем функции* $I_\nu(z)$. *Тогда задача I безусловно разрешима, при этом решение задачи пишется в виде ряда* (14) *с коэффициентами, определяемыми по формулам из теоремы* 4.5, *в которых* $\varepsilon = 1$, $C_n = \frac{h_n - D_n K_\nu(c)}{I_\nu(c)}$ $\forall\, n \in Z$, *причем постоянные* D_n *произвольные для* $n \in S' = \{m \in Z: 0 < m < -2\alpha\}$ *и* $D_n = 0$ *при* $n \,\overline{\in}\, S'$.

Отметим, что в условиях теоремы 4.7 решение задачи I зависит от конечного числа постоянных.

Далее в работах [4-А] и [6-А] установлены: «При $\gamma \neq 1$ справедлива

Теорема 4.8. *Пусть* $\gamma > 1$ *и* $\alpha \geq 0$. *Пусть число* c *не является нулем функции* $K_\nu(z)$ *и* $\bar{S} = \{n \in Z: -2\alpha \leq n \leq 0,\ \alpha > 0\}$. *Тогда справедливы утверждения:*

i) если $\bar{S} \neq \emptyset$, *то задача I разрешима при условии* $h_n = 0 \ \forall\, n \in \bar{S}$.

ii) если $\bar{S} = \emptyset$, *то задача I безусловно разрешима.*

Замечания. 1. Решение задачи I пишется в виде ряда (14) с коэффициентами, определяемыми по формулам:

$$u_n(r) = \begin{cases} C_0 \text{ при } n = \alpha = 0, \\ 0 \text{ при } -2\alpha \leq n \leq 0, \qquad \alpha > 0, \\ D_n r^{-\alpha} K_\nu(c r^{1-\gamma}) \quad \text{при остальных } n, \end{cases}$$

$$v_{s-n}(r)=\frac{r^{\gamma-\alpha-1}}{2\bar{a}}\begin{cases}\bar{D}_n\bar{c}(\gamma-1)r^{1-\gamma}K_{\nu+1}(\bar{c}r^{1-\gamma})\text{ при } n>0,\\ 0 \text{ при } -2\alpha\le n\le 0,\\ \bar{D}_n[2(n+\alpha)K_\nu(\bar{c}r^{1-\gamma})-\\ -\bar{c}(1-\gamma)r^{1-\gamma}K_{\nu+1}(\bar{c}r^{1-\gamma})] \text{ при } n<-2\alpha,\end{cases}$$

где $D_n=\frac{h_n}{K_\nu(c)}$, C_0- произвольная комплексная постоянная.

2. В случае $S\neq\emptyset$ число условий разрешимости конечное и равно $[2\alpha]+1$.

Теорема 4.9. *Пусть* $\gamma>1$ *и* $\alpha<0$. *Пусть число с не является нулем функции* $K_\nu(z)$. *Тогда задача I безусловно разрешима, при этом решение задачи пишется в виде ряда* (14) *с коэффициентами, определяемыми по формулам из теоремы* 4.5, *в которых* $\varepsilon=1$, $D_n=\frac{h_n-\ C_n\,I_\nu(c)}{K_\nu(c)}\ \forall\, n\in Z$, *причем постоянные* C_n *произвольные для* $n\in\bar{S}'=\{m\colon 0\le m\le -2\alpha\}$ *и* $C_n=0$ *при* $n\,\bar{\in}\,\bar{S}'$.

Замечания. 1. В условиях теоремы 4.9 решение задачи I зависит от конечного числа постоянных.

2. В условиях теорем 4.7 и 4.9 решение задачи I представляется конечными суммами» [6-А].

3. В условиях теорем 4.6 и 4.8 решение задачи I представляется бесконечными суммами. Сходимость этих сумм и их первых производных можно обеспечить за счет наложения условия гладкости на граничную функцию $h(\varphi)$ и учета свойств функций I_ν и K_ν.

Из теорем 4.1 – 4.9 видно, что общее решение системы (2), а также разрешимость граничной задачи типа задачи Римана-Гильберта существенно зависят от показателей сингулярности α,β, собственных значений матрицы $A\bar{A}$, алгебраических и геометрических кратностей этих собственных значений.

ВЫВОДЫ

Объектами исследования диссертации являются о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами вида (1), в частности, с постоянными коэффициентами $a(z)\equiv\alpha, b(z)\equiv\lambda$ (модельное уравнение), а также многомерные о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами вида (2). Для этих систем изучены задачи построения общего решения, структурного анализа решений и граничные задачи типа задачи Римана-Гильберта и линейного сопряжения. По итогам исследования получены следующие новые результаты:

• построены явные формулы для решений из классов $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G \backslash \{0\})$ и $C^1(G \backslash \{0\}, \beta) -$ множество функций $f,$ представимых в виде $f(z) = |z|^{-\beta} f_0(z),$ где $\beta > 0, f_0 \in C_{\bar{z}}(G \backslash \{0\})$ и ограниченная функция, модельной однородной системы [1-А];

• получено интегральное представление решений из класса $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G \backslash \{0\})$ модельной однородной системы [1-А], [2-А];

• построены аналоги ядер из теории регулярных о.а.ф. [1-А], [2-А];

• представлены обобщённая формула Коши и обобщённый интеграл типа Коши, используемые для получения решений рассматриваемых уравнений [1-А], [2-А], [8-А], [9-А];

• получены утверждения о порядке нуля $z = 0$ решений и о существовании решения из класса $C^m(G), m -$ произвольный, о существовании аналитических по z и $\bar{z}$ решений и отсутствия ненулевых решений, принадлежащих пространству $C^\infty(G)$, модельного однородного уравнения [7-А], [10-А], [11-А];

• получены условия разрешимости и формулы решений граничных задач типа задачи Римана-Гильберта и задачи линейного сопряжения для модельного однородного уравнения [3-А], [12-А];

• получено интегральное уравнение эквивалентное системе (1) в классе $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G \backslash 0)$ и найдены условия разрешимости этого уравнения [2-А];

• выявлено поведение решений однородной системы соответствующей (1) в окрестности сингулярной точки $z = 0$ [11-А];

• для многомерных о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами вида (2) получен метод построения общего решения и формулы для решений [5-А], [14-А];

• для двумерных систем вида (2) с треугольной и антидиагональной матрицей коэффициентов построены явные формулы для общего решения [4-А];

• для двумерных систем вида (2) с антидиагональной матрицей коэффициентов установлены теоремы разрешимости задачи типа Римана-Гильберта и представлены формулы для решения [6-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертации результаты в основном носят теоретический характер. Результаты диссертации и развитые в ней методы исследования задач можно применять при изучении граничных задач для других классов уравнений с частными производными с сингулярными коэффициентами. Ряд результатов диссертации могут быть использованы при проведении учебных занятий со студентами и магистрантами математических профилей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

А) Список использованных источников

[1]. Александров, А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. – Москва: Государственное техническое издательство, 1948. – 296 с.

[2]. Ахмедов, Р. Краевые задачи для уравнения $2\bar{z}\partial_{\bar{z}}w-\left(\lambda e^{in\varphi}+b(z)\right)\overline{w}=F$ // Доклады Академии наук Таджикской ССР. – 1987. – Том 30, № 12. – С. 6–9.

[3]. Байзаев, С. Полиномиальные решения переопределенных систем уравнений с сингулярными коэффициентами/ Байзаев С., Рахимова М. А. // Современные проблемы математики и её приложений: Материалы Международной научной конференции, посвященной 70-летию академика НАНТ Илолова М. – Душанбе, 2018. – С. 80–81.

[4]. Бицадзе, А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – Москва: Наука, 1981. – 448 с.

[5]. Блиев, Н. К. О существовании аналитического решения у одной эллиптической системы, вырождающейся в точке // Известия Академии наук Казахской ССР. Серия физико-математическая. – 1965. – № 1. – С. 96–104.

[6]. Блиев, Н. К. О необходимом и достаточном условии существования аналитических решений у одной вырождающейся системы // Известия Академии наук Казахской ССР. Серия физико-математическая. – 1967. – № 1. – С. 93–95.

[7]. Векуа, И. Н. Обобщённые аналитические функции. – Москва: Наука, 1986. – 630 с.

[8]. Векуа, Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. – Москва: Наука, 1970. – 421 с.

[9]. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.

[10]. Виноградов, В. С. Об одной теореме Лиувилля для обобщённых аналитических функций // Доклады Академии наук СССР. – 1968. – Том 183, № 3. – С. 503–506.

[11]. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.

[12]. Джангибеков, Г. Задача линейного сопряжения решений обобщённой системы Коши–Римана с сингулярными коэффициентами / Джангибеков Г., Бобоев Э. Д. // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. – № 4. – С. 12–20.

[13]. Джураев, А. Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. – Москва: Наука, 1987. – 415 с.
[14]. Макацария, Г. Т. Уравнение Карлемана–Векуа с полярными особенностями: диссертация … кандидата физико-математических наук. – Тбилиси, 1986. – 111 с.
[15]. Михайлов, Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. – Душанбе, 1963. – 183 с.
[16]. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1968. – 511 с.
[17]. Мухсинов, А. Построение решений в виде двойных степенных рядов сингулярного уравнения эллиптического типа // Доклады Академии наук Таджикской ССР. – 1988. – Том 31, № 9. – С. 499–503.
[18]. Мухсинов, А. Исследования многообразий решений краевых задач для некоторых многомерных вырождающихся (сингулярных) уравнений в частных производных эллиптического типа: автореферат диссертации … доктора физико-математических наук. – Душанбе, 2010. – 34 с.
[19]. Назиров, Г. Аналитические решения некоторых эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами // Доклады Академии наук Таджикской ССР. – 1961. – Том 4, № 3. – С. 3–6.
[20]. Нажмиддинов, Х.Обобщённая система Коши–Римана с точечной особенностью выше первого порядка в коэффициентах/ Нажмиддинов Х., Усманов З. Д. // Доклады Академии наук Таджикской ССР. – 1975. – Том 18, № 5. – С. 11–15.
[21]. Раджабов, Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. – Душанбе, 1992. – 236 с.
[22]. Раджабов, Н. Задача линейного сопряжения для системы Бицадзе со сверхсингулярной окружностью/ Раджабов Н., Расулов А. Б. // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Том 50, № 4. – С. 529–536.
[23]. Раджабова, Л. Н. К теории одного класса гиперболического уравнения с сингулярными линиями // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2006. – Том 49, № 8. – С. 710–717.
[24]. Рахимова, М. А. Полиномиальные решения переопределённых систем уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2017. – № 4 (169). – С. 3–13.

[25]. Тунгатаров, А. Некоторые иррегулярные случаи обобщённой системы Коши–Римана и решение краевых задач Римана–Гильберта: диссертация … кандидата физико-математических наук. – Алма-Ата, 1978. – 93 с.

[26]. Усманов, З. Д. Обобщённые системы Коши–Римана с сингулярной точкой. – Душанбе, 1993. – 244 с.

[27]. Усманов, З. Д. О бесконечно малых изгибаниях поверхностей положительной кривизны с изолированной точкой уплощения // Математический сборник. – 1970. – Том 83 (125), № 12. – С. 596–615.

[28]. Усманов, З. Д. Бесконечно малые изгибания поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения // Differential Geometry. Banach Center Publications. – Том 12. – Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1984. – С. 241–272.

[29]. Шамсудинов, Ф. М. Об одной переопределённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1. Математика, физика. – 2016. – № 6 (37). – С. 90–107.

[30]. Шарипов, Б. Об одном классе нелинейных обобщённых систем Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Том 51, № 9. – С. 1252–1256.

[31]. Шарипов, Б. Об одном классе систем в полных дифференциалах с сингулярной линией / Шарипов Б., Михайлов Л. Г. // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Том 52, № 6. – С. 696–700.

Б) Работы автора по теме диссертации
В журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации

[1-А]. Шокирова, М.М. Интегральное представление решений специального класса модельных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярной точкой [Текст] / М.М. Шокирова, Р. Ахмедов // Учёные записки. Серия естественных и экономических наук. Худжанд. 2017. №1 (40) – С. 58-64.

[2-А]. Шокирова, М.М. Об одном способе вывода обобщенной интегральной формулы Коши для решений одного класса модельных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярной точкой [Текст] / М.М. Шокирова // Учёные записки. Серия естественных и экономических наук. Худжанд. 2022. №1 (60). – С. 3 – 8.

[3-А]. Шокирова, М.М. Задача Римана-Гильберта для одного класса обобщенных систем Коши-Римана с сингулярной точкой в круговой области [Текст] / М.М. Шокирова // Учёные записки. Серия естественных и экономических наук. Худжанд. 2024. №1 (68). – С. 27-34.

[4-А]. Шокирова, М.М. О нахождении общего решения одного класса двумерных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами [Текст] / С. Байзаев, М.М. Шокирова // Учёные записки. Серия естественных и экономических наук. Худжанд. 2024. №3 (70). – С. 3-10.

[5-А]. Шокирова, М.М. О построении решений одного класса многомерных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами [Текст] / С. Байзаев, М.М. Шокирова // Математические структуры и моделирование. РФ. Омский гос. ун-т. 2025. № 1 (73). – С. 16-22.

[6-А]. Шокирова, М.М. Об общем решении и задаче Римана-Гильберта для одного класса двумерных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами [Текст] / С. Байзаев, М.М. Шокирова // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. 2025. №1. – С. 5 – 16.

В других изданиях:

[7-А]. Шокирова, М.М. О некоторых свойствах решений модельной обобщенной системы Коши-Римана в окрестности сингулярной точки [Текст] / М.М. Шокирова, Р. Ахмедов // РФ. Международный научный журнал «Символ науки». №10/2015. – С.9-12.

[8-А]. Шокирова, М.М. Интегральная формула Коши для решений модельной обобщенной системы Коши-Римана с сингулярной точкой [Текст] / М.М. Шокирова, Р. Ахмедов, С. Юсупов // Учёные записки. Серия естественных и экономических наук. Худжанд. 2015. № 4(35). – С 3 – 10.

[9-А]. Шокирова, М.М. Об одном способе вывода обобщенной интегральной формулы Коши для решений одного класса модельных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярной точкой [Текст] / М.М. Шокирова, Р. Ахмедов // Маводи конференсияи илмӣ-амалии профессорон, омӯзгорон ва муҳаққиқони ҷавони ДДҲБСТ таҳти унвони «Илм ва инноватсия баҳри иҷрои ҳадафҳои миллӣ». Бахши инноватсия ва телекоммуникатсия. Худжанд: Дабир, 2019. – С. 18 – 23.

[10-А]. Шокирова, М.М. Свойства решений одного класса комплексного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с сингулярной граничной точкой [Текст] / М.М. Шокирова // Материалы II Межд. научно-практ. конф. “Современная наука: Проблемы, идеи, инновации”. 25.12.2020. - РФ.Чистополь. – С. 22 – 25.

[11-А]. Шокирова, М.М. О свойствах решений специальной модельной обобщенной системы Коши-Римана в окрестности сингулярной точкой [Текст] / М.М. Шокирова // Сборник статей LIV Межд. научно-практ. конф. «Word science: problems and innovations». -РФ. Пенза. 30.05.2021. – С. 10 – 12.

[12-А]. Шокирова, М.М. Задача Дирихле для решений специальной модельной обобщенной системы Коши-Римана в окрестности сингулярной точки [Текст] / М.М. Шокирова // VIII Всероссийская научно-прак. конф. с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук». РФ.Орёл. 25-26 ноября 2022 г. – С. 150-154.

[13-М]. Шокирова, М.М. О свойствах решений основных ядер модельной обобщенной системы Коши-Римана в окрестности сингулярной точкой [Текст] / М.М. Шокирова // Сборник статей конф. XLVII Internationonal Multidisciplinary Conference «Prospects and key tendencies of science in contemporary world». Испания. Мадрид. 2024. – С. 92 – 99.

[14-А]. Шокирова, М.М. О регулярных решениях одного класса многомерных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами [Текст] / С. Байзаев, М.М. Шокирова // Материалы Межд. науч. конф. “Уфимская математическая школа – 2024”. РФ.Уфа. 2 – 5 октября 2024. Том 2. – С. 22-23.

Вазорати маориф ва илми Ҷумҳурии Тоҷикистон

Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон

Бо ҳуқуқи дастнавис

ВБД 517.95
ББК 22.161.6
Ш 78

Шокирова Мухбира Мухторхоновна

ТАҲҚИҚИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ СИСТЕМАИ УМУМИКАРДАШУДАИ КОШИ-РИМАН БО НУҚТАИ СИНГУЛЯРӢ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
номзади илмҳои физикаю математика
аз рӯйи ихтисоси 01.01.02 – Муодилаҳои дифференсиалӣ,
системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ

Хуҷанд – 2025

Диссертатсия дар Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон иҷро шудааст

Роҳбари илмӣ:	**Байзоев Саттор –** доктори илмҳои физикаю математика, профессор, профессори кафедраи фанҳои риёзӣ-табиатшиносии муосири Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон
Муқарризони расмӣ:	**Раҷабова Лутфия Нусратовна –** доктори илмҳои физикаю математика, профессор, мудири кафедраи назарияи функсияҳо ва таҳлили математикӣ ва Донишгоҳи миллии Тоҷикистон
	Раҳмонов Бахтовар Абдуғаниевич номзади илмҳои физикаю математика, ходими калони илмии шуъбаи муодилаҳои дифференсиалии Инстиути математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон
Муассисаи пешбар:	Донишгоҳи давлатии молия ва иқтисоди Тоҷикистон

Ҳимояи диссертатсия санаи 13 сентябри соли 2025 дар маҷлиси шурои диссертатсионии 6D.КОА-084 назди Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон бо суроғаи 735700, ҶТ, ш.Хуҷанд, маҳаллаи 17-ум, бинои 1, корпуси 5, аудитория 208, баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар сомонаи http://tsulbp.tj ва китобхонаи Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон ва шинос шудан мумкин аст.

Афтореферат санаи “____”______соли 2025 фиристода шудааст.

Котиби илмии шурои
диссертатсионӣ, н.и.ф.-м., дотсент **Ш.Ф. Муҳамедова**

МУҚАДДИМА

Мубрамии мавзӯи таҳқиқот. Муодилаҳои дифференсиалӣ воситаи самараноки таҳқиқи равандҳои гуногуни табиат, табиатшиносӣ, техникӣ ва дигар илмҳо мебошанд. Дар даҳсолаҳои охир, дар робита ба ҳалли масъалаҳои амалӣ, дар бисёр бахшҳои физикаи математикӣ, геометрия, гидродинамика, динамикаи газ, назарияи чандирӣ ва ғайра масъалаҳои нав пайдо шуданд, ки ба таҳқиқи муодилаҳои дифференсиалии намуди махсус оварда мерасонанд (нигар ба [1],[4],[7],[9]). Дар ин муодилаҳо дар нуқтаҳои алоҳида, дар тӯли хатҳо ё дар маҷмӯи нуқтаҳои сохторашон мураккаб таназзули тартиб ё навъ ба амал меояд, ё коэффитсиентҳо ба беохирӣ табдил мeёбанд. Чунин муодилаҳоро муодилаҳои таназзулёфта ё муодилаҳо бо коэффитсиентҳои сингулярӣ меноманд.

Дар диссертатсия системаҳои умумикардашудаи Коши-Риман (с.у.к.р.)

$$\partial_{\bar{z}}w + A(z)w + B(z)\bar{w} = 0$$

ва с.у.к.р. бисёрченак бо коэффитсиентҳои сингулярӣ таҳқиқ карда мешавад.

Зарурияти таҳқиқи с.у.к.р. бо коэффитсиентҳои сингуляриро аввалин бор И.Н. Векуа [7] таъкид намуда буд. Ӯ ҳолатеро, ки $A(z)$ ва $B(z)$ квазисуммиронидашаванда мебошанд, таҳқиқ намуда барои ҳалҳои система тасвири бо номи тасвири ҷинси дуюмро ҳосил намуда буд, ки дар асоси он ҳалшавандагии система ва хосиятҳои асосии ҳалҳо муқаррар карда мешаванд.

Л.Г. Михайлов [15] ҳолати $A(z) = |z|^{-1}a(z), B(z) = |z|^{-1}b(z)$-ро, ки дар инҷо $a(z)$ ва $b(z)$ функсияҳои маҳдуд, таҳқиқ намудааст. Ӯ муодилаи интегралӣ бо оператори маҳдудро (комилан маҳдуд, агар иловатан $a(z)$ ва $b(z)$ ҳангоми $z = 0$ бефосила ва $a(0) = b(0) = 0$ бошад) дар синфи функсияҳои дар нуқтаи $z = 0$ махсусияти қутбӣ дошта ҳосил намуд. Яккимата ҳалшавандагии муодилаи интегралӣ дар ҳолати фишуранда будани оператор, ки ҳангоми хурд будани нормаи коэффитсиентҳои $a(z)$ ва $b(z)$ ҷой дорад, нишон дода шудааст. Дар ин ҳолат масъалаҳои канории Риман-Гилберт ва хаттӣ ҳамроҳшуда омӯхта шуда тасдиқот доир ба ҳалавандагии ин масъалаҳо ва формулаҳо барои ҳисоби индекс ҳосил карда шудааст.

З.Ҷ. Усмонов [28] ҳолати коэффитсиентҳои намуди $A(z) = 0, B(z) = \bar{z}^{-1}e^{in\varphi}b(z)$-ро, ки дар инҷо $n-$ адади бутун, $\varphi = \arg z,\ b(z)$ функсияи бефосила, $b(0) \neq 0$ ва барои қиматҳои кифоя хурди |z| шартҳои

$$0 < m < |b(z) - b(0)| < M|z|^{\gamma}, \gamma > 0$$

-ро қонеъ менамояд, таҳқиқ намудааст. Ӯ ғояеро пешниҳод намуда буд, ки назарияи с.у.к.р. на бо функсияҳои аналитикӣ, балки бо назарияи ҳалҳои системаи моделӣ бо коэффитсиенти $B_0(z) = \bar{z}^{-1}e^{in\varphi}b(0)$ вобаста аст ва дар асоси ин назарияи мукаммали с.у.к.р.-ро корбаст намуд. Дар як қатор корҳои худ З.Ҷ. Усмонов [27], [28] масъалаҳои бо геометрия алоқанок – масъалаҳо доир ба қатшавии кифоя хурди сатҳи каҷии мусбат дошта бо нуқтаи ҷудогонаи зичшударо омӯхта муодилаҳои мувофиқ бо нуқтаҳои сингулярро ҳосил намуда, маънои геометрии шартҳои сарҳадиро тасвир карда як қатор теоремаҳо доир ба ҳалшавандагии масъалаҳои канориро муқаррар кардааст.

Таҳқиқоти ӯро шогирдонаш Ҳ. Наҷмиддинов [20] ва Р. Ахмедов [2] давом дода, дар ҳолатҳои $B(z) = |z|^{-\alpha}e^{in\varphi}b(z), \alpha > 1$ ва $B(z) = \bar{z}^{-1}\left[\lambda e^{in\varphi} + b(z)\right], \lambda \in C$ ба натиҷаҳои назаррас соҳиб шудаанд. Онҳо тасвирҳои гуногуни ҳалҳоро ҳосил намуда хосиятҳои муҳими ҳалҳоро муқаррар намудаанд, ки ҳам шабеҳи хосиятҳои функсияҳои аналитикӣ ва ҳам аз онҳо фарқ дошта мебошанд; теоремаҳо доир ба ҳалшавандагии масъалаҳои канории навъи масъалаи Риман-Гилберт ва масъалаи хаттӣ ҳамроҳшударо исбот намудаанд.

Дар корҳои Г. Назиров [19] ва Н.К. Блиев [5], [6] масъалаҳои гуногуни бо омӯзиши с.у.к.р. алоқаманд дар ҳолати $A(z) = |z|^{-1}a^*(z)e^{\pm i\varphi}, B(z) = |z|^{-1}b^*(z)e^{\pm i\varphi}$, ки $a^*(z)$ ва $b^*(z)$ ф.а. нисбат ба z ва $\bar{z}$ дар атрофи нуқтаи $z = 0$ мебошад, муоина шудаанд. Г. Назиров ҳангоми $a^*(z) \equiv 0$ ва $b^*(0) = 0$ будан мавҷудияти ҳалҳои намуди махсусро исбот кардааст. Ин натиҷаҳоро А. Мӯҳсинов [17] умумитар намудааст.

А. Тунгатаров [25] ҳолатеро, ки коэффитсиентҳо чунин намуд доранд: $A(z) = 0, B(z) = \bar{z}^{-1}e^{in\varphi}b(z)$, дар ин ҷо $n -$ адади ҷуфти мусбат, $b(z)$ дар G бефосила ва $b(0) \neq 0$, таҳқиқ намудааст. Ӯ асосҳои назарияи с.у.к.р.-ро ба фазоҳои касрии Бесов паҳн намудааст.

Дар корҳои Г.Т. Макацария [14] барои с.у.к.р. методи регуляризаторҳои аналитикии И.Н. Векуа татбиқ шудааст. Ҳангоми $A(z) = |z|^{-\nu}a(z), B(z) = |z|^{-\mu}b(z)$ ва иҷро шудани шартҳои

$$\nu > [\mu] + 1 \ ([\mu] - \text{қисми бутуни адади } \mu), a(0) \neq 0,$$

$$|z|^{-(\nu-|\nu|+1)}\left(a(z) - a(0)e^{in\varphi}\right) \text{ ва } |z|^{-(\mu-[|\mu|])}b(z)\epsilon L_p(G), p > 2, n - \text{бутун},$$

рафтори ҳалҳо ҳангоми $z \to 0$ таҳқиқ шуда ҳолатҳое, ки с.у.к.р. дар атрофи нуқтаи $z = 0$ ҳалли ғайринулии маҳдуд надорад, муайян карда шудааст.

Дар як қатор корҳои Н. Раҷабов [21] ва шогирдонаш [23], [25] инчунин муаллифони дигар [24], [3] синфҳои гуногуни муодилаҳо ва системаҳои навъи эллиптикӣ, гиперболӣ ва омехта, системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусии коэффитсиентҳояш сингулярӣ, муодилаҳои дифференсиалии одӣ ва системаҳои чунин муодилаҳо, ки дар коэффитсиентҳояшон махсусиятҳои нуқтавӣ доранд, таҳқиқот гузаронида шудаанд. Барои чунин муодилаҳо масъалаҳои Коши, хаттӣ ҳамроҳшуда, доир ба ҳалҳои полиномиалӣ, аз ҷумла ҳалҳои маҳдуд ва ғайраҳо омӯхта шудаанд.

Бояд қайд намуд, ки дар даҳсолаҳои охир таҳқиқот доир ба муодилаҳо ва системаҳои коэффитисиентҳояш сингулярӣ равнақу ривоҷ ёфтанд. А. Мӯҳсинов [18] дар корҳои худ формулаҳои тасвири ҳалли баъзе синфҳои муодилаҳои бисёрченак бо ҳосилаҳои хусусии таназзулёбандаи (сингулярӣ) навъи эллиптикӣ ва ҳалли масъалаҳои гуногуни канориро ҳосил намудааст. Муодилаҳо ва системаҳое, ки ӯ омӯхтааст дар хатҳо, ҳамвориҳо ва дигар бисёршаклаҳо коэффитсиентҳои сингулярӣ дошта, баъзе муодилаҳо дар бисёршаклаҳои зикршуда навъи худро иваз мекунанд ё таназзул меёбанд.

Н. Раҷабов и А.Б. Расулов [22] системаи Битсадзеро бо давраи болосингулярӣ, яъне коэффитсиентҳои система дар давра ба нул баробар мешаванд, муоина намудаанд. Барои чунин система як қатор масъалаҳои канорӣ таҳқиқ карда шуда тасвири ҳалҳо ва тасдиқот доир ба ҳалшавандагии масъалаҳои баррасишуда ҳосил карда шудаанд.

Дар корҳои Б. Шарипов [30], [31] баъзе синфҳои с.у.к.р.-и ғайрихаттӣ бо коэффитсиентҳои сингулярӣ ва системаҳо дар дифференсиали пурра бо хати сингулярӣ таҳқиқ карда шуда тасвири ҳалҳо ва шартҳои ҳалшавандагӣ муқаррар карда шудаанд.

Г. Ҷангибеков [12] ва шогирдонаш масъалаи ҳамроҳшударо барои с.у.к.р. дар ҳолати $A(z) = \bar{z}^{-1}a(z), B(z) = \bar{z}^{-1}b(z)$, дар ин ҷо $a(z)$ ва $b(z)$ функсияҳои дар доираи воҳидӣ ченшаванда ва маҳдуд, ки ҳангоми $z \to 0$ қиматҳои ҳудудӣ доранд, таҳқиқ намудаанд. Шартҳои зарурӣ ва кофии ҳалшавандагии масъала ёфта шуда формула барои индекс ҳосил карда шудааст.

Дараҷаи таҳқиқи мавзӯи илмӣ. Оид ба мавзӯи омӯхташуда олимони намоён И.Н. Векуа [7], Н.И. Мусхелишвили [16], Л.Г. Михайлов [15], Н.П. Векуа [8], З.Ҷ. Усмонов [26] – [28], Н.Р. Раджабов [21], [22], Н.К. Блиев [5], [6], В.С. Виноградов [10], Ф.Д. Гахов [11], А. Ҷӯраев [13], Г. Ҷангибеков [12], А. Мӯҳсинов [18], Г.Т. Макацария [14], Х.Н. Наҷмиддинов [20], Г. Назиров [19], А. Тунгатаров [25], Р. Ахмедов [2], Б. Шарипов [30], [31] шогирдон ва пайравони онҳо саҳми назаррас гузоштаанд.

Доир ба таҳқиқоти бисёре аз ин олимон ва натиҷаҳои ба дастовардаи онҳо дар банди пештара гуфта будем. Бояд қайд кард, ки дар ин таҳқиқот методҳои назарияи функсияҳои тағйирёбандаи комплексӣ, муодилаҳои интегралии сингулярӣ ва анализи функсионалӣ истифода шудаанд.

Дар баробари натиҷаҳои муҳим доир ба масъалаҳои бо с.у.к.р. вобаста, як қатор синфи чунин системаҳо, аз ҷумла системаҳои бисёрченак бо коэффитсиентҳои сингулярӣ ва масъалаи ёфтани ҳалҳо аз фазоҳои функсионалии мухталиф омӯхта нашудаанд. Инчунин, дар баробари методҳои дар боло қайдшуда, истифодаи методҳои муосири анализ ва назарияи матритсаҳо барои таҳқиқи с.у.к.р. муҳим мебошад.

Кори диссертатсионӣ ба таҳқиқи масъалаҳои ҳалшавандагии с.у.к.р.-и пештар омӯхта нашуда ва системаҳои бисёрченак бо коэффитсиентҳои сингулярӣ дар фазоҳои функсионалии мушаххас, сохтани ҳалли умумӣ ва ёфтани ҳалли масъалаҳои канорӣ бахшида шудааст. Таҳқиқ ва коркарди методҳои омӯзиши чунин масъалаҳо бегуфтугӯ мубрам аст ва аҳамияти илмӣ дорад.

Робитаи таҳқиқот бо барномаҳо (лоиҳаҳо), мавзӯъҳои илмӣ. Рисолаи мазкур дар доираи лоиҳаи корҳои илмӣ-тадқиқотии кафедраи фанҳои риёзӣ ва табиатшиносии муосири Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон барои солҳои 2016-2020 дар мавзӯи «Таҳқиқи муодилаҳои дифференсиалии навъи эллипсӣ, гиперболӣ ва бозиҳои дифференсиалӣ дар фазоҳои махсуси функсионалӣ» ва солҳои 2021-2025 дар мавзӯи "Муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ: назария ва методикаи таълим" иҷро карда шудааст.

ТАВСИФИ УМУМИИ ТАҲҚИҚОТ

Мақсади таҳқиқот. Омӯзиши баъзе синфҳои муодилаҳои умумикардашудаи Коши-Риман ва системаҳои бисёрченаки чунин муодилаҳо бо коэффитсиентҳои сингулярӣ, сохтани ҳалли умумӣ барои онҳо ва таҳлили ҳалшавандагии масъалаҳои канорӣ.

Вазифаҳои таҳқиқот. Дар робита бо мақсади таҳияшуда чунин масъалаҳо ҳал ва таҳлил карда шаванд:

1. Ёфтани ҳалли ошкори:

а) системаи моделии умумикардашудаи Коши-Риман (с.у.к.р.) бо коэффитсиентҳои сингулярӣ;

б) масъалаи канории Риман-Гилберт;

в) масъалаи ҳамроҳшудаи хаттӣ.

2. Омӯзиши рафтори ҳалли муодилаҳои зикршуда дар атрофи нуқтаи сингулярӣ.

3. Сохтани ҳалли умумии с.у.к.р. бисёрченак бо коэффитсиентҳои сингулярӣ.

4. Омӯзиши масъалаи канории навъи масъалаи Риман-Гилберт барои системаи бисёрченаки зикршуда.

Объекти таҳқиқот. Чунин объектҳо инҳоянд:

1) с.у.к.р. бо коэффисентҳои сингулярии намуди

$$\partial_{\bar{z}}\Psi - \frac{a(z)}{2\bar{z}}\Psi - \frac{b(z)}{2\bar{z}}\overline{\Psi} = f(z), \qquad z \in G, \tag{1}$$

дар инҷо $G -$ соҳае, ки нуқтаи $z = 0$-ро дарбар гирифта бо контури суфтаи Γ маҳдуд аст;

2) с.у.к.р. бисёрченака бо коэффитсиенти сингулярии намуди

$$w_{\bar{z}} + \frac{1}{z^{\alpha}\bar{z}^{\beta}}A\overline{w} = 0, \tag{2}$$

дар инҷо $w \in C^m -$ фазои комплексии m-ченака, $\alpha, \beta -$ ададҳои ҳақиқӣ, $\alpha + \beta > 0$ ва $\alpha - \beta -$ бутун, $A -$ матрисаи комплексии тартиби m.

Предмети таҳқиқот. Аз исботи тасдиқот доир ба ҳалли умумии муодилаҳо ва системаҳои баррасишаванда, инчунин ҳалшавандагии масъалаҳои канории навъи масъалаҳои Риман-Гилберт ва ҳамроҳшуда барои ин объектҳо иборат аст.

Асосҳои назариявии таҳқиқот. Инҳо назарияи функсияҳои аналитикии (ф.а.) умумикардашуда, назарияи функсияҳои тағирёбандаи комплексӣ, назарияи матритсаҳо ва усулҳои муодилаҳои дифференсиалӣ ва анализи функсионалӣ мебошанд.

Навгонии илмии таҳқиқот. Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ нав мебошанд ва аз зеринҳо иборатанд:

- Ҳалҳо аз синфҳои $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G\backslash\{0\})$ ва $C^1(G\backslash\{0\}, \beta)$ муодилаи моделии якҷинсаи

$$\partial_{\bar{z}}\Phi - \frac{\alpha}{2\bar{z}}\Phi - \frac{\lambda}{2\bar{z}}\overline{\Phi} = 0, z \in G \tag{3}$$

дар ин ҷо α, λ доимиҳо ёфта шудаанд;

- Тасвири интегралии ҳалҳои муодилаи моделии (3) аз синфи қайдгардида ҳосил карда шудааст;
- Тамсили ядроҳои $\Omega_1(z, \varsigma), \Omega_2(z, \varsigma)$, ки барои ҳалли муодилаҳои баррасишаванда истифода мешаванд, сохта шудаанд;

- Ядроҳои асосӣ ва ҳалҳои элементарии системаи ҳамроҳшуда сохта шудаанд;
- Рафтори ҳалҳои системаи якҷинсаи ба (1) мувофиқ дар атрофи нуқтаи сингулярии $z = 0$ ошкор карда шудаст;
- Тасдиқот доир ба тартиби нули $z = 0$ ҳалҳо муқаррар карда шуда, мавҷудияти ҳалҳо аз синфи $C^m(G),\ m -$ ихтиёрӣ, ҳалҳои аналитикӣ нисбат ба z ва $\bar{z}$, инчунин мавҷуд набудани ҳалҳои ғайринулӣ аз синфи $C^\infty(G)$ барои муодилаи якҷинсаи (3) муқаррар карда шудаанд;
- Шартҳои ҳалшавандагӣ ва формулаҳои ҳалли масъалаҳои канории навъи масъалаи Риман-Гилберт ва масъалаи хаттии ҳамроҳшуда барои муодилаи (3) ба даст оварда шуданд;
- Муодилаи интегралии дар синфи $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G\backslash\{0\})$ ба системаи (1) баробарқувва ва шартҳои ҳалшавандагии ин муодила ба даст оварда шудаанд;
- Барои с.у.к.р. бисёрченака бо коэффитсиентҳои сингулярии намуди (2) усули сохтани ҳалли умумӣ ва формулаи ҳал ба даст оварда шудааст;
- Барои системаҳои дученакаи намуди (2) бо матритсаи секунҷавӣ ва антидиагоналии коэффитсиентҳо формулаҳои ошкор барои ҳалли умумӣ сохта шудаанд;
- Барои системаҳои дученакаи намуди (2) бо матрисаи антидиагоналии коэффитсиентҳо теоремаҳои ҳалшавандагии масъалаи навъи Риман-Гилберт муқаррар карда шуда формулаҳо барои ҳалли онҳо пешниҳод карда шудааст.

Нуктаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда:

- Формулаҳои ҳал аз синфҳои $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G\backslash\{0\})$ ва $C^1(G\backslash\{0\}, \beta)$, тасвири интегралии ҳалҳо аз синфи зикргардида, теоремаҳо дар бораи тартиби нули $z = 0$ ҳалҳо, мавҷудияти ҳал аз синфи $C^m(G)$, ҳалҳои аналитикӣ аз рӯи z ва $\bar{z}$ ва мавҷуд набудани ҳалли ғайринулии с.у.к.р. (3), ки ба синфи $C^\infty(G)$ тааллуқ дорад;
- Шартҳои ҳалшавандагӣ ва формулаҳои ҳалли масъалаҳои канории навъи масъалаи Риман-Гилберт ва масъалаи хаттӣ ҳамроҳшуда, ки барои с.у.к.р. (3) ҳосил карда шудаанд, муодилаи интегралии ба с.у.к.р. (1) дар синфи $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G\backslash 0)$ баробарқувва буда ва шартҳои ҳалшавандагии ин муодила;
- Усули сохтани ҳалли умумии с.у.к.р. бисёрченаки намуди (2), формулаҳои ҳалли умумӣ барои системаҳои дученаки намуди (2) бо матритсаи секунҷавӣ ва антидиагоналии коэффитсиентҳо ва теоремаҳои ҳалшавандагӣ ва

формулаҳо барои ҳалли масъалаи навъи Риман-Гилберт барои ин система бо матритсаи антидиагоналии коэффитсиентҳо.

Аҳамияти назариявӣ ва илмӣ-амалии кор. Кор асосан хусусияти назариявӣ дорад. Методикаи коркаршудаи таҳқиқотро барои масъалаҳои бо синфҳои дигари с.у.к.р. коэффитсиентҳояш сингулярӣ алоқаманд истифода бурдан мумкин аст.

Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳо. Дар диссертатсия леммаҳо ва теоремаҳо, формулаҳо барои ҳалли муодилаҳо ва системаҳо, инчунин барои ҳалли масъалаҳои канорӣ бо исботҳои қатъӣ ва асоснок таъмин карда шудаанд. Онҳо бо натиҷаҳои муаллифони дигар, ки дар ҳолатҳои хусусӣ ба даст оварда шудаанд, мувофиқат мекунанд.

Мутобиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ (бо шарҳ ва соҳаи таҳқиқот). Кори диссертатсионӣ аз рӯи ихтисоси 01.01.02 – Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ иҷро карда шуда ба таҳқиқи ҳалшавандагӣ, хосиятҳои ҳал ва масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ бахшида шудааст ва ба бандҳои 2, 3 ва 5 фасли III – соҳаҳои таҳқиқоти шиносномаи ихтисос мутобиқат мекунад.

Саҳми шахсии довталаби дараҷаи илмӣ дар таҳқиқот. Мавзӯъ ва самти таҳқиқот аз тарафи довталаб бо маслиҳати роҳбари илмӣ, ки мусоидати машваратӣ низ намудааст, интихоб карда шудааст. Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ, ки дар бахши "Навгонии илмии таҳқиқот" номбар шудаанд, шахсан аз ҷониби муаллиф ба даст оварда шудааст. Довталаб мақолаҳоро ба чоп омода намуда натиҷаҳои диссертатсияро ба тасвиб расонидааст.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар конфронсҳо ва семинарҳои илмии зерин пешниҳод ва баррасӣ гардидаанд:

- Конфронси байналмилалии илмӣ-амалии “Современная наука: Проблемы, идеи, инновации”, 25 декабри соли 2020. Чистопол, Россия;
- Конфронси байналмилалии илмӣ-амалии «World science problems and innovations», 30 майи соли 2021. Пенза, Россия;
- Конфронси VIII Умумироссиягии илмӣ-амалӣ бо иштироки байналмилалӣ «Современные проблемы физико-математических наук», 25-26 ноябри соли 2022. Орёл, Россия;
- Конфронси байналмилалии илмӣ-амалии "Математика дар ҷаҳони муосир", бахшида ба 70-солагии доктори илмҳои физика-математика, профессор Байзоев Саттор, 20 апрели соли 2024. Хуҷанд;

- Конфронси байналмилалии XLVII International Multidisciplinary Conference «Prospects and key tendencies of science in contemporary world», Мадрид, Испания. 2024.
- Мактаби математикии тирамоҳии Уфа – 2024. 2 – 5 октябри соли 2024. Уфа, Россия;
- Дар конфронсҳои ҳарсолаи илмӣ-назариявӣ ва илмӣ-амалии дар Донишгоҳи ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон баргузоршуда;
- Семинари илмӣ-назариявии ДДҲБСТ таҳти роҳбарии доктори илмҳои физика-математика, профессор Байзоев С.

Интишорот аз рӯи мавзӯи диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар 14 мақолаҳо нашр шудаанд, аз ҷумла 6 мақола дар маҷаллаҳои илмии тақризшавандаи аз ҷониби Комиссияи олии аттестатсионии назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон тавсияшуда интишор ёфтаанд. Аз корҳои бо ҳаммуалифӣ иҷро шуда ба диссертатсия натиҷаҳои шахсан аз тарафи довталаб ба даст овардашуда дохил карда шудааст.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, тавсифи умумӣ, панҷ боб, хулоса ва рӯйхати адабиёт бо 138 номгӯй иборат аст. Дар диссертатсия барои формулаҳо ва фаслҳо рақамгузории дукарата истифода мешавад, рақами аввал ба рақами боб ва дуюм ба рақами формула мувофиқат мекунад. Ҳаҷми умумии диссертасия 150 саҳифаро ташкил медиҳад.

Миннатдории муаллиф. Муаллиф ба профессор С. Байзоев ва дотсент Р. Ахмедов барои маслиҳатҳои муфид ҳангоми иҷрои диссертатсия миннатдории бепоёни худро баён мекунад.

ҚИСМҲОИ АСОСИИ ТАҲҚИҚОТ

Мавод ва усулҳои таҳқиқот. Маводди таҳқиқот аз ҳалли масъалаҳо доир ба сохтани ҳалли муодилаҳо ва системаҳои муоинашуда, инчунин ҳалшавандагии масъалаҳои канории навъи масъалаи Риман-Гилберт ва ҳамроҳшудаи хаттӣ барои ин объектҳо иборат аст. Дар диссертатсия усулҳои назарияи ф.а. умумикардашуда, назарияи функсияҳои тағйирёбандаи комплексӣ, назарияи матритсаҳо, муодилаҳои дифференсиалӣ ва анализи функсионалӣ истифода мешаванд.

Натиҷаҳои таҳқиқот. Мухтасар натиҷаҳои кори диссертатсиониро шарҳ медиҳем.

Боби якуми (§§ 1.1, 1.2) диссертатсия ба тафсири аналитикии адабиёт дар мавзӯи таҳқиқшаванда бахшида шудааст. Дар фасли аввал таҳлили корҳо дар бораи с.у.к.р. бо коэффитсиентҳои сингулярӣ оварда шудааст. Фасли дуюм ба шарҳи корҳо доир ба муодилаҳои физикаи математикӣ бо хатҳо ва сатҳҳои сингулярӣ бахшида шудааст.

Боби дуюми (§§2.1 – 2.4) диссертатсия ба муодилаи моделии (3) бахшида шудааст. Муодилаи намуди (3) ҳангоми $\alpha = 0$ будан дар корҳои З.Д. Усмонов [26] ва шогирдонаш омӯхта шуда, бо иҷро шудани шартҳои мувофиқ тасвири ҳалли умумии он дар намуди ошкоро сохта шуда, хосиятҳо ва ҳалли масъалаҳои канории Риман-Гилберт ва ҳамроҳшудаи хаттӣ муқаррар карда шудаанд.

Усули тадқиқи корҳои зикршударо такмил намуда, дар § 2.1 барои муодилаи (3) дар ҳолати $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \neq 0,\ \lambda \neq 0$ функсияҳои $\Omega_1(z,\zeta), \Omega_2(z,\zeta) -$ шабеҳи ядроҳо аз назарияи умумикардашудаи ф.а. сохта шуда дар асоси онҳо тасвири ҳалҳои ин муодила ёфта шудаанд. Дар § 2.2 як қатор хосиятҳои муҳими ин ядроҳо муқаррар карда шудаанд. Дар § 2.3 хосиятҳои асосии оператори

$$S_G f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \left[\frac{\Omega_1(z,\zeta\,)}{\zeta} f(\zeta) + \frac{\Omega_2(z,\zeta\,)}{\zeta}\overline{f(\zeta)}\right] d\xi d\eta,$$

ки дар тадқиқи ҳалшавандагии муодилаи (1) нақши асосӣ мебозад оварда шудаанд. Дар § 2.4 масъалаи ҳалшавандагии муодилаи (1) ба масъалаи баробарқувваи ҳалшавандагии муодилаи интегралии

$$\Psi(z) = \Phi(z) + S_G F + P_{1G}\Psi + P_{2G}\overline{\Psi}, \qquad z \in G, \tag{4}$$

оварда шудааст, дар ин ҷо

$$P_{1G}\Psi = S_G(A\Psi), P_{2G}\Psi = S_G(B\overline{\Psi}),$$

$$A(z) = (2\bar{z})^{-1}[a(z) - a(0)], B(z) = (2\bar{z})^{-1}[b(z) - b(0)],$$

$\Phi(z) \in C(G) \cap C_{\bar{z}}(G\backslash 0) -$ ҳалли муодилаи якҷинсаи намуди (3) бо $\alpha = a(0), \lambda = b(0)$ ва дар асоси методҳои анализи функсионалӣ шартҳои ҳалшавандагии муодилаи (4) пешниҳод карда шудаанд.

Боби 3 ба таҳқиқи минбаъдаи муодилаҳои моделӣ ва асосии (3) ва (1) бахшида шудааст. Дар § 3.1 ядроҳои асосӣ ва ҳалли элементарии муодилаи ҳамроҳшудаи ба муодилаи (3) мувофиқ сохта шудаанд. Дар § 3.2 формулаи умумикардашудаи Коши, интеграли умумикардашудаи навъи Коши барои ҳалҳои муодилаи (3) ба даст оварда шудааст.

Бигзор Γ – контури ҳамвори маҳдуде, ки ҳамвории E-и тағйирёбандаи комплексиро ба соҳаҳои G^+ (дорои нуқтаи $z = 0$) ва G^- (дорои нуқтаи $z = \infty$) тақсим мекунад ва $G_0^+ = G^+\backslash\{0\}$. Теоремаҳои зерин ҷой доранд.

Теоремаи 3.1. *Барои он ки* $\nu(\zeta), \zeta \in \Gamma$ *қимати сарҳадии функсияи* $\Phi^+(z), z \in G^+$ – *ҳалли муодилаи* (3) *аз синфи* $C^1(G_0^+ \cup \Gamma)$ *бошад, иҷрои шарти зерин зарур ва кофӣ аст:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\Omega_1(z,\zeta)}{\zeta}\nu(\zeta)d\zeta - \frac{\Omega_2(z,\zeta)}{\zeta}\overline{\nu(\zeta)}\,\overline{d\zeta} = 0, z \in G^- .$$

Теоремаи 3.2. *Барои он ки* $\nu(\zeta), \zeta \in \Gamma$ *қимати сарҳадии функсияи* $\Phi^-(z), z \in G^-$ – *ҳалли муодилаи* (3) *аз синфи* $C^1(G^- \cup \Gamma)$ *бошад, иҷрои шарти зерин зарур ва кофӣ аст:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\Omega_1(z,\zeta)}{\zeta}\nu(\zeta)d\zeta - \frac{\Omega_2(z,\zeta)}{\zeta}\overline{\nu(\zeta)}\,\overline{d\zeta} = 0, z \in G^+ .$$

Дар § 3.3 ҳалҳои муодилаи (3) аз синфи $C^1(G\backslash\{0\},\beta), \beta > 0$ сохта шуда, як қатор хосияти ҳалҳо дар намуди теоремаҳои зерин муқаррар карда шудаанд. Бигзор α ҳақиқӣ ва $l_0 = \left[\sqrt{\alpha^2 - |\lambda|^2}\right]$ ҳангоми $|\alpha| > |\lambda|$.

Теоремаи 3.6. *Бигзор* α *ҳақиқӣ бошад. Он гоҳ ҳар як ҳалли* $\Phi(z)$ *дар* G *бефосилаи муодилаи* (3) *дар нуқтаи* $z = 0$ *ба нул табдил меёбад ва тартиби ин нул* ν *чунин муайян карда мешавад:*

$$\nu = \begin{cases} \alpha - \mu_k, k = 0,1,\dots,l_0 \text{ и } \alpha + \mu_k, k = 0,1,\dots \text{ ҳангоми } \alpha > |\lambda|, \\ \mu_k - |\alpha|, k = l_0 + 1, l_0 + 2, \dots \text{ҳангоми } \alpha < 0 \text{ ва } |\alpha| > |\lambda|, \\ \alpha + \mu_k, k = 0,1,\dots \text{ ҳангоми } -|\lambda| \le \alpha \le |\lambda|, \end{cases}$$

дар ин ҷо $\mu_k = \sqrt{k^2 + |\lambda|^2}$.

Теоремаи 3.7. *Барои дилхоҳ т муодилаи* (3) *дар* $C^m(G)$ *ҳалшаванда аст.*

Бигзор

$$\Lambda_{1kp} = \left\{(\alpha,\lambda): \alpha > |\lambda|, \alpha - \sqrt{k^2 + |\lambda|^2} = k + 2p\right\}, k = 0,1,\dots,l_0; p = 1,2,\dots,$$
$$\Lambda_{2kp} = \left\{(\alpha,\lambda): \alpha > 0, \alpha + \sqrt{k^2 + |\lambda|^2} = k + 2p\right\}, k = 0,1,\dots; p = 1,2,\dots,$$

$$\Lambda_{3kp} = \left\{(\alpha,\lambda): \alpha < 0, \alpha - \sqrt{k^2 + |\lambda|^2} = k + 2p\right\}, k = l_0 + 1, \dots; p = 1,2, \dots,$$
$$\Lambda_1 = \cup_{k=0}^{l_0}\left(\cup_{p=1}^{\infty}\Lambda_{1kp}\right), \Lambda_2 = \cup_{k=0}^{\infty}\left(\cup_{p=1}^{\infty}\Lambda_{2kp}\right),$$
$$\Lambda_3 = \cup_{k=l_0+1}^{\infty}\left(\cup_{p=1}^{\infty}\Lambda_{3kp}\right), \Lambda = \cup_{j=1}^{3}\Lambda_{jkp}.$$

Теоремаҳои зерин ҷой дорад

Теоремаи 3.8. *Агар* $(\alpha,\lambda) \in \Lambda$, *он гоҳ муодилаи* (3) *дар соҳаи* G *ҳалли аналитикӣ аз рӯи* z *ва* $\bar{z}$ *дошта, дар акси ҳол чунин ҳалро надорад.*

Теоремаи 3.9. *Бигзор* $(\alpha,\lambda) \overline{\in} \Lambda$. *Агар функсияи* $\Psi(z) \in C^m(G)$ *барои ягон* $m > \alpha + |\lambda|$ *ҳалли муодилаи* (3) *буда* $|\Psi(z)| < M, |z| = R$ *бошад, он гоҳ ҳангоми* $z \in G$ *нобаробарии зерин ҷой дорад*

$$|\Psi(z)| < \frac{MR}{R-r}\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha+\mu_{k_m}},$$

дар инҷо $k_m = \sqrt{(m-\alpha)^2 - |\lambda|^2}$.

Теоремаи 3.10. *Агар* $(\alpha,\lambda) \overline{\in} \Lambda$, *он гоҳ муодилаи* (3) *дар синфи* $C^\infty(G)$ *танҳо ҳалли нулӣ дорад.*

Дар § 3.4 масъалаи Риман-Гилберт барои с.у.к.р. (3) дар доираи $G = \{z: |z| < R\}$ бо сарҳади $\Gamma = \{z: |z| = R\}$ баррасӣ шудааст:

ҳалли муодилаи (3) $\Phi(z)$ *аз синфи* $C^1(G\backslash\{0\}) \cap C(G \cup \Gamma)$ *ёфта шавад, ки дар сарҳад шарти зеринро қонеъ гардонад:*

$$Re[z^{-m}\Phi(z)] = h(z). \tag{5}$$

Теоремаҳои 3.11 – 3.15 доир ба ҳалшавандагии масъалаи канории якҷинса (м.к.я.) ва масъалаи канории ғайриякҷинса (м.к.ғ.) исбот карда шудааст.

Теоремаи 3.11. *Бигзор* $m = 0$ *ва* $Im(\lambda - P_{20}) \neq 0$. *Он гоҳ м.к.ғ. (3), (5) ҳалли ягона дорад:*

$$\Phi(z) = \frac{i(\bar{\lambda} - P_{20})h_0}{Im(\lambda - P_{20})}\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1+\mu_{10}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\lambda h_k}{\lambda + \overline{P_{1k}}}e^{ik\varphi} + \frac{\overline{P_{1k}h_k}}{\bar{\lambda} + \overline{P_{1k}}}e^{-ik\varphi}\right\}\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}},$$

дар ин ҷо $h_k -$ *коэффитсиентҳои Фуреи функсияи* h, $\alpha_1 + i\alpha_2 = \alpha$,

$$\mu_{1k}=\left(\frac{1}{2}\sqrt{(k^2+|\lambda|^2-\alpha_2^2)^2+4\alpha_2^2k^2}+k^2+|\lambda|^2-\alpha_2^2\right)^{1/2},$$

$$P_{20}=\mu_{10}+i(\mu_{10}-\alpha_2), P_{1k}=\mu_{1k}-k+i(\mu_{2k}-\alpha_2).$$

Теоремаи 3.12. *Бигзор* $m=0$ *ва* $Im(\lambda-P_{20})=0$. *Он гоҳ м.к.я.* (3), (5) *якто ҳалли хаттӣ новобастаи* $i(\bar{\lambda}-P_{20})c_0r^{\alpha_1+\mu_{10}}$ *дорад, дар ин ҷо* c_0 *– адади ҳақиқии ихтиёрӣ ва барои ҳалшавандагии м.к.ғ. зарур ва кифоя аст, ки* $h_0=0$ *бошад.*

Теоремаҳои зайл дар мақолаи мо [3-М] муқаррар карда шудааст: «Бигзор $m\neq 0$ бошад.

Теоремаи 3.13. *Бигзор* $m>0$ *ва* $\alpha_1\geq 0$. *Агар* $|\alpha|<|\lambda|$ *бошад, он гоҳ м.к.я.* (3), (5) $2m$ *ҳалҳои хаттӣ новобаста (дар майдони ададҳои ҳақиқӣ) дорад ва м.к.ғ. бешарт ҳалшаванда аст.*

Теоремаи 3.14. *Бигзор* $m>0$ *ва* $\alpha_1\geq 0$. *Агар* $|\alpha|\geq|\lambda|$ *бошад, он гоҳ м.к.я.* (3), (5) $4m$ *ҳалҳои хаттӣ новобаста (дар майдони ададҳои ҳақиқӣ) дорад ва м.к.ғ. бешарт ҳалшаванда аст.*

Бояд қайд кард, ки бо шарти теоремаҳои 3.13 ва 3.14 формулаҳои ҳалли масъала ёфта шудаанд.

Теоремаи 3.15. *Бигзор* $m<0$ *бошад. Он гоҳ м.к.я.* (3), (5) *ҳалли ғайринулӣ надорад. М.к.ғ. фақат ва фақат ҳамон вақт ҳал дорад, агар* $h(z)$ $2|m|$ *шартҳои ҳақиқии ҳалшавандагиро қонеъ намояд"* [3-М].

Дар § 3.5 масъалаи ҳамроҳшуда барои муодилаи (3) муоина шудааст. Ишораҳои зеринро ворид мекунем:

$G^+=\{z:|z|<R\}, G^-=\{z:|z|>R\}, \Gamma=\{z:|z|=R\}, \bar{G}^+=G^+\cup\Gamma.$

Масъала. *Ҳалли с.у.к.р.* (3) $\Phi^+(z)$ *аз синфи* $C(\bar{G}^+)\cap C_{\bar{z}}(G^+\backslash 0)$ *ва функсияи дар* G^- *аналитикии* $\Phi^-(z)$, *ки ҳангоми* $z=\infty$ *маҳдуд ва ба сарҳади* Γ *бефосила давом додашаванда, ёфта шаванд, ки шарти зеринро қаноат намоянд:*

$$\Phi^+(t)=t^m\Phi^-(t)+g(t), t\in\Gamma, \tag{6}$$

ки дар ин ҷо m *– бутун,* $g(t)$ *– функсияи додашуда аст.*

Фарз карда мешавад, ки функсияи $g(t)$-ро ба қатори мутлақ ва мунтазам наздикшавандаи Фуре паҳн намудан мумкин аст.

Теоремаи 3.16. *Бигзор* $m\geq 1$. *Он гоҳ ҳалли масъалаи якҷинсаи* (3), (6) *бо қаторҳои зерин муайян карда мешавад:*

$$\Phi_0^+(z) = i(\bar{\lambda} - P_{20})c_0\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1+\mu_{10}} + \sum_{k=1}^{m}\left\{\lambda c_k e^{ik\varphi} + \overline{P_{1k}}\overline{c_k}e^{-ik\varphi}\right\}\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}}, z \in \bar{G}^+,$$

$$\Phi_0^-(z) = i(\bar{\lambda} - P_{20})c_0 z^{-m} + \sum_{k=1}^{m}\{\lambda c_{m-k}R^{-k}z^{k-m} + \overline{P_{1k}}\overline{c_k}R^k z^{-k-m}\}, z \in G^-,$$

дар ин ҷо доимии ихтиёрӣ c_0 *– ҳақиқӣ, боқимонда* c_k *– комплексӣ. Масъалаи ғайриякҷинсаи* (3), (6) *ҳамеша ҳалшаванда аст.*

Бояд қайд кард, ки маҷмӯи ҳалҳои масъалаи якҷинса аз $2m + 1$ доимии ҳақиқии ихтиёрӣ вобаста аст.

Дар ҳолати $m < 0$ теоремаи зерин дуруст аст.

Теоремаи 3.17. *Агар* $m < 0$ *бошад, он гоҳ м.к.я.* (3), (6) *танҳо ҳалли нулӣ дошта, барои ҳалшавандагии м.к.ғ. зарур ва кифоя аст, ки* $g(t)$ $2|m| - 1$ *шартҳои ҳақиқии*

$$Im\left(\frac{g_0}{\bar{\lambda} - P_{20}}\right) = 0, \bar{\lambda}g_{-k} - P_{1k}\overline{g_k} = 0, k = 1, \dots, |m| - 1$$

-ро қонеъ намояд.

Дар § 3.6 рафтори ҳалли муодилаи якҷинсаи

$$\partial_{\bar{z}}\Psi - \frac{a(z)}{2\bar{z}}\Psi - \frac{b(z)}{2\bar{z}}\overline{\Psi} = 0, \qquad z \in G, \tag{7}$$

ба (1) мувофиқ, дар атрофи нуқтаи махсуси $z = 0$ омӯхта шудааст.

Бигзор $a(0) = \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, b(0) = \lambda$ аст. Теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 3.18. *Бигзор* $\Psi(z) -$ *ҳалли муодилаи* (7) *аз синфи* $C(\bar{G}) \cap C_{\bar{z}}(G\backslash 0)$ *бошад. Он гоҳ барои* $\Psi(z)$ *ҳангоми* $z \to 0$ *муносибати*

$$\Psi(z) = \left(\beta_0 + \frac{\lambda}{|\lambda|}\overline{\beta_0}\right)r^{\alpha_1+\mu_{10}} + O(r^{\alpha_1+\mu_{10}+a_0})$$

ҷой дорад, ки дар он

$$a_0 = \frac{1}{4\pi R^{|\lambda|}} \int_0^{2\pi} \Psi\left(Re^{i\theta}\right) d\theta,\ \beta_0 = a_0 - \frac{1}{2\pi} \iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta|\zeta|^{\mu_{10}}} d\xi d\eta,$$

$$\mu_{10} = \begin{cases} \sqrt{|\lambda|^2 - \alpha_2^2} & \text{при } |\lambda| \geq |\alpha_2|, \\ 0 & \text{при } |\lambda| < |\alpha_2|, \end{cases}$$

$$f(\zeta) = \frac{a(\zeta) - a(0)}{2\bar{\zeta}} \Psi(\zeta) + \frac{b(\zeta) - b(0)}{2\bar{\zeta}} \overline{\Psi(\zeta)}.$$

Боби 4 (§§ 4.1–4.3) ба тадқиқи с.у.к.р. бисёрченака бо коэффитсиентҳои сингулярии намуди (2) бахшида шудааст.

Дар § 4.1 нақшаи сохтани ҳалли умумии системаи (2) баён шудааст. Бо гузариш ба координатаҳои қутбӣ ҳалҳои система дар шакли қатори тригонометрӣ аз рӯи $\varphi = argz$ бо коэффитсиентҳои номаълуми $w_n(r)$, ки аз $r = |z|$ вобастаанд, ҷустуҷӯ карда мешавад. Барои ин коэффитсиентҳои номаълум муодилаҳои навъи Бессел ҳосил мешаванд, ки дар онҳо коэффитсиенти назди вектор-функсияи матлуб чунин аст: $n(2\alpha + n)E_m + 4r^{2(1-\alpha-\beta)}A\bar{A}$, $E_m -$ матрисаи воҳидии тартиби m. Вобаста аз α, β ва қиматҳои хоси λ_j матритсаи $A\bar{A}$ ҳалли умумии муодилаҳои зикршуда ёфта шуда, сипас ҳалли умумии системаи ибтидоӣ навишта шудааст. Яке аз натиҷаҳои асосии ин фасл тасдиқоти зерин аст.

Теоремаи 4.1. *Бизгор адади $s = \beta - \alpha - 1$ тоқ ва ҳамаи қиматҳои хоси λ_j матритсаи $A\bar{A}$ нимсода бошад. Он гоҳ ҳалли умумии системаи* (2) *чунин намуд дорад:*

$$w = \sum_{n \geq p}^{\infty} \left\{ w_n(r) e^{in\varphi} + w_{p-n} e^{i(p-n)\varphi} \right\}, \tag{8}$$

дар ин ҷо $p = \frac{s+1}{2}$, $w_n(r) = S\left[u_{1n}, \dots, u_{qn}\right]$, $S -$ матритсаии сутунҳояш аз векторҳои хоси матритсаи $A\bar{A}$, ки ба қимати хоси λ_j мувофиқанд иборат буда, координатаҳои вектор-функсияи u_{jn} вобаста аз қиматҳои α, β ва λ_j бо формулаҳои зерин муайян карда шуда

$$v(r) = r^{-\alpha} Z_\nu \left(\frac{2i\sqrt{\lambda_j}}{1-\gamma} r^{1-\gamma} \right) \text{ ҳангоми } (1-\gamma)\lambda_j \neq 0, \qquad (9)$$

$$v(r) = \begin{cases} C_1 r^{-\alpha+\frac{\mu}{2}} + C_2 r^{-\alpha-\frac{\mu}{2}} \text{ агар } \mu \neq 0, \\ r^{-\alpha}(C_1 + C_2 \ln r) \text{ агар } \mu = 0, \end{cases} \text{ ҳангоми } (1-\gamma)\lambda_j = 0, \qquad (10)$$

$Z_\nu -$ функсияи силиндрикӣ, $\nu = \frac{|\alpha+n|}{1-\gamma}$, $\gamma = \alpha + \beta$, $C_1, C_2 -$ доимиҳои ихтиёрии комплексӣ, $\mu = 2\sqrt{(\alpha+n)^2 + 4\lambda_j}$, вектор-функсиҳои w_{p-n} аз системаи

$$\bar{A} w_{p-n}(r) = \frac{r^\gamma}{2} \left[-\bar{w}'_n(r) + \frac{n}{r} \bar{w}_n(r) \right]$$

муайян карда мешавад.

Айнан чунин тасдиқот дар ҳолати адади $s = \beta - \alpha - 1$ ҷуфт будан низ ҷой дорад.

Дар ҳолате, ки қимати хоси матритсаи $A\bar{A}$ нимсода нест, яъне каратнокии алгебравӣ ва геометрии гуногун дорад, муодилаҳои ғайриякҷинсаи навъи Бессели намуди

$$r^2 v'' + (2\alpha + 1) r v' - \left(n(2\alpha + n) + 4 r^{2(1-\gamma)} \lambda_j \right) v = f(r) \qquad (11)$$

-ро ҳал бояд кард.

Леммаи зерин дар бораи ҳалли умумии муодилаи (11) ҷой дорад.

Леммаи 4.1. *Бигзор $\gamma \neq 1$ ва $\lambda_j \neq 0$. Он гоҳ ҳалли умумии модилаи ғайриякҷинсаи (11) намуди зеринро дорад*

$$v(r) = \frac{r^{-\alpha}}{\gamma - 1} \left\{ J_\nu \left[C_1 + \int r^{3+\alpha} Y_\nu f(r) dr \right] - Y_\nu \left[C_2 + \int r^{3+\alpha} J_\nu f(r) dr \right] \right\},$$

дар инҷо функсияҳои бесселӣ аз аргументи $\frac{2i\sqrt{\lambda_j}}{1-\gamma} r^{1-\gamma}$ вобаста мебошад, C_1, $C_2 -$ доимиҳои комплексии ихтиёрӣ.

Барои возеҳӣ мисолҳои мушаххас оварда шудаанд.

Мисоли 1. Бигзор дар системаи (2) матритсаи коэффитсиентҳои A антидиагоналӣ бошад, яъне ҳамаи элементҳои берун аз диагонали дуюм (ғайриасосӣ) ҷойгиршуда ба нул баробар бошанд. Барои қулайӣ элементҳои дар диагонали дуюм ҷойгиршударо тавассути $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ишора мекунем. Пас матритсаи $A\bar{A}$ диагоналӣ хоҳад буд, яъне

$$A\bar{A} = \mathrm{diag}[a_1\bar{a}_m,\ a_2\bar{a}_{m-1}, \ldots, a_m\bar{a}_1].$$

Бинобар ин қиматҳои хоси матритсаи $A\bar{A}$ нимсода ва ба $\lambda_j = a_j\bar{a}_{m-j+1}$ баробар аст. Аз ин рӯ, дар ин ҳолат тасдиқоти мисли теоремаи 4.1 дуруст аст.

Ҳангоми $a_j \neq 0\ \forall j = 1, \ldots, m$ ҳамаи λ_j ғайринулӣ мешавад ва ҳамаи вектор-функсияҳои u_{jn} бо формулаи намуди (9) муайян карда мешавад. Агар байни ададҳои a_j нул бошад, масалан, $a_k = 0$, он гоҳ $\lambda_k = \lambda_{m-k+1} = 0$ ва вектор-функсиҳои u_{kn} ва $u_{m-k+1,n}$ аз рӯи формулаи намуди (10) муайян карда мешавад.

Мисоли 2. Ҳолатеро дида мебароем, ки матритсаи A секунҷавӣ бо элементҳои $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$ дар диагонали асосӣ аст. Пас матритсаи $A\bar{A}$ секунҷавӣ буда қиматҳои хосаш $\lambda_j = |a_{jj}|^2$ мебошад. Агар ин қиматҳои хос нимсода бошанд, он гоҳ дар ин ҳолат хулосаҳои монанди мисоли 1 дуруст мебошанд.

Дар § 4.2 ҳолати системаи дученака бо матритсаи ғайринулии $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ муоина шудааст. Як тасдиқотро меорем.

Теоремаи 4.2. Бигзор адади $s = \beta - \alpha - 1$ *тоқ ва* $(1-\gamma)ab \neq 0$ *бошад. Он гоҳ ҳалли умумии системаи* (2) *чунин намуд дорад*

$$w = \sum_{n \geq p}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} e^{in\varphi} + \begin{pmatrix} u_{s-n}(r) \\ v_{s-n}(r) \end{pmatrix} e^{i(s-n)\varphi} \right\}, \qquad (12)$$

дар ин ҷо $p = \frac{s+1}{2}$, *функсияҳои* $u_n(r), v_n(r), u_{s-n}(r), v_{s-n}(r)$ *бо формулаҳои поёнӣ муайян карда мешаванд:*

$$u_n(r) = \frac{\pi r^{\delta}}{4(1-\gamma)} \left\{ J_\nu \left[C_1 + \int r^{3-\delta} Y_\nu f_n(r) dr \right] - Y_\nu \left[C_2 + \int r^{3-\delta} J_\nu f_n(r) dr \right] \right\},$$

дар ин ҷо $\delta = \frac{1+n+\gamma}{2}$, $\nu = \frac{|n-1-\gamma|}{2(1-\gamma)}$, *функсҳоии бесселӣ аз аргументи* $\frac{|a|i}{1-\gamma} r^{1-\gamma}$ *вобастаанд,* C_1, C_2 *– доимиҳои комплексии ихтиёрӣ,*

$$f_n(r) = 4(a\bar{c} + \bar{b}c) r^{2(1-\gamma)} v_n + 4c\gamma r^{1-\gamma} \bar{v}_{s-n},$$

$$v_n(r) = r^{-\alpha} Z_\nu\left(\frac{4i|b|}{1-\gamma} r^{1-\gamma}\right), \ v_{s-n}(r) = \frac{r^\gamma}{2\bar{b}}\left[-\bar{v}_n'(r) + \frac{n}{r}\bar{v}_n(r)\right],$$

$$u_{s-n}(r) = \frac{r^\gamma}{2\bar{a}}\left[-\bar{u}_n'(r) + \frac{n}{r}\bar{u}_n(r) - \frac{2c}{r^\gamma}\bar{v}_{s-n}\right].$$

Дар § 4.3 масъалаи Риман-Гилберт барои системаи намуди (2) бо матритсаи антидиагоналии $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ тадқиқ карда шудааст (ниг. ба [6-М]): “Дар аввал ҳалли умумии система сохта шуда, сипас аз он ҳалҳои масъала ҷудо карда шудааст. Натиҷаҳои тадқиқ дар намуди теоремаҳои зерин оварда шудааст.

Теоремаи 4.4. *Бигзор* $\gamma = \alpha + \beta > 0$, $\alpha - \beta -$ *бутун ва* $a \neq 0, b = 0$ *ё* $a = 0, b \neq 0$. *Он гоҳ ҳалли умумии системаи* (2) *намуди зеринро дорад*

$$w = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} e^{in\varphi}, \tag{13}$$

ки дар ин ҷо $u_n(r), v_n(r)$ *вобаста аз қимати* γ *ва коэффитсиентҳои система аз рӯи формулаҳои зерин муайян карда мешавад:*

ҳангоми $a = 0$

$$u_n = C_n r^n, v_n(r) = \begin{cases} r^n\left(D_n + \dfrac{b\bar{C}_n}{(1-\beta)r^{2(\beta-1)}}\right) \text{ ҳангоми } \beta \neq 1, \\ r^n(D_n - 2b\bar{C}_n \ln r) \text{ ҳангоми } \beta = 1, \end{cases}$$

ҳангоми $b = 0$

$$v_n = C_n r^n, \ u_n(r) = \begin{cases} r^n\left(D_n + \dfrac{a\bar{C}_n}{(1-\beta)r^{2(\beta-1)}}\right) \text{ ҳангоми } \beta \neq 1, \\ r^n(D_n - 2b\bar{C}_n \ln r) \text{ ҳангоми } \beta = 1, \end{cases}$$

$C_n, D_n -$ *доимиҳои ихтиёрии комплексӣ.*

Теоремаи 4.5. *Бигзор* $\gamma = \alpha + \beta > 0$, $\alpha - \beta -$ *бутун ва* $ab \neq 0$. *Он гоҳ ҳалли умумии системаи* (2) *намуди зеринро дорад*

$$w = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n(r)e^{in\varphi} \\ v_{s-n}(r)e^{i(s-n)\varphi} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

дар ин ҷо $s = \beta - \alpha - 1$, *функсияҳои* $u_n(r), v_{s-n}(r)$ *вобаста аз қимати* γ *ва коэффитсиентҳои система аз рӯи формулаи зерин муайян карда мешавад:*

ҳангоми $\gamma \neq 1$

$$u_n(r) = r^{-\alpha}[C_n I_\nu(cr^{1-\gamma}) + D_n K_\nu(cr^{1-\gamma})],$$

$$v_{s-n}(r) = \frac{r^{\gamma-\alpha-1}}{2\bar{a}}\{|n+\alpha|(\varepsilon_n - \varepsilon)[\bar{C}_n I_\nu(\bar{c}r^{1-\gamma}) + \bar{D}_n K_\nu(\bar{c}r^{1-\gamma})] -$$

$$-\bar{c}(1-\gamma)r^{1-\gamma}\big[\bar{C}_n I_{\nu+1}(\bar{c}r^{1-\gamma}) - \bar{D}_n K_{\nu+1}(\bar{c}r^{1-\gamma})\big]\big\},$$

дар инҷо $c = \frac{2\sqrt{a\bar{b}}}{|1-\gamma|}, \nu = \left|\frac{n+\alpha}{1-\gamma}\right|$, $I_\nu -$ *функсияи Бесселли аргументи мавҳум*, $K_\nu -$ *функсияи Макдоналд,* $\varepsilon_n = sgn(n+\alpha), \varepsilon = sgn(1-\gamma)$;

ҳангоми $\gamma = 1$

$$u_n(r) = C_n r^{\delta_1} + D_n r^{\delta_2},\ \ v_{s-n}(r) = \frac{n-1}{2\bar{a}}\left(\bar{C}_n\bar{\delta}_1 r^{\bar{\delta}_1} + \bar{D}_n\bar{\delta}_2 r^{\bar{\delta}_2}\right),$$

агар $d = (n+\alpha)^2 + 4a\bar{b} \neq 0$; $\delta_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{(n+\alpha)^2 + 4a\bar{b}}$;

$$u_n(r) = r^{-\alpha}(C_n + D_n lnr),\ v_{s-n}(r) = \frac{r^{-\alpha}}{2\bar{a}}[(n-\alpha)(C_n + D_n lnr) - D_n],$$

агар $d = 0$; $C_n, D_n -$ *ададҳои ихтиёрии комплексӣ.*

Эзоҳ: 1. Наздикшавии қаторҳои (5.4) – (5.7) ва ҳосилаҳои якуми онҳоро аз ҳисоби интихоби домиҳои ихтиёрии C_n, D_n ва хосияти функсияҳои J_ν, Y_ν I_ν ва K_ν таъмин намудан мумкин аст

2. Барои ҳалҳои дар нуқтаи нул бефосила, шартҳои зеринро бояд талаб кард:

$$u_n(0) = v_n(0) = 0\ \forall n \neq 0. \tag{15}$$

Минбаъд масъалаи канории навъи Риман-Гилберт баррасӣ карда шудааст.

Масъалаи I. *Ҳалли* $w(z)=\begin{pmatrix}u(z)\\ v(z)\end{pmatrix}$ *системаи* (2) *аз синфи* $C^1(G\backslash\{0\})\cap C(\bar{G}),\ G=\{z:|z|<1\}$, *ёфта шавад, ки шарти сарҳадии*

$$u\left(e^{i\varphi}\right)=h(\varphi) \tag{16}$$

-ро қаноат намояд, дар ин ҷо $h(\varphi)-$ *функсияи даврии бефосилаи davraш* 2π.

Барои ёфтани ҳалли масъалаи I аз тасвири ҳалҳои системаи (2) ва шартҳои (15), (16) истифода карда мешавад. Дар натиҷа теоремаҳо доир ба ҳалшавандагии масъалаи I ба даст оварда шуданд.

Теоремаи 4.6. *Бигзор* $\gamma<1$ *ва* $\alpha\geq 0$. *Бигзор адади* c *нули функсияи* $I_\nu(z)$ *набуда* $S=\{n\in Z:\ -2\alpha\leq n<0\}$ *бошад. Он гоҳ тасдиқоти зерин дуруст аст:*

i) агар $S\neq\emptyset$ *бошад, пас масъалаи I ҳангоми иҷрошавии шарти* $h_n=0\ \ \forall\, n\in S$ *ҳалшаванда аст;*

ii) агар $S=\emptyset$ *бошад, пас масъалаи I бе талаби ягон шарт ҳалшаванда мебошад.*

Эзоҳ: 1. Масъалаи якҷинса танҳо ҳалли нулӣ дорад” [6-М].

2. Ҳалли масъалаи I дар шакли қатори (14) бо коэффитсиентҳои аз рӯи формулаҳои теоремаи 4.5 муайян кардашаванда, ки дар онҳо $C_n=\frac{h_n}{I_\nu(c)}$ аст, навишта мешавад.

3. Дар ҳолати $S\neq\emptyset$ шумораи шартҳои ҳалшавандагӣ охирнок ва ба [2α] баробар аст.

4. Адади c нули функсияи $I_\nu(z)$ танҳо ҳангоми $\arg a=\arg b\pm\pi$ будан мешавад.

Теоремаи 4.7. *Бигзор* $\gamma<1$ *ва* $\alpha<0$. *Бигзор адади* c *нули функсияи* $I_\nu(z)$ *набошад. Он гоҳ масъалаи I бе талаби ягон шарт ҳалшаванда мебошад, дар ин ҳолат ҳалли масъала дар шакли қатори* (14) *навишта мешавад, ки коэффитсиентҳояш аз рӯи формулаҳои теоремаи 4.5 муайян карда мешаванд, ки дар онҳо* $\varepsilon=1,\ C_n=\frac{h_n-\ D_n\,K_\nu(c)}{I_\nu(c)}\ \forall\, n\in Z,\ D_n-$ *доимиҳои ихтиёрӣ ҳангоми* $n\in S'=\{m\in Z:0<m<-2\alpha\}$ *ва* $D_n=0$ *ҳангоми* $n\,\overline{\in}\,S'$.

Бояд қайд кард, ки ҳангоми иҷро шудани шартҳои теоремаи 4.7 ҳалли масъалаи I аз шумораи охирноки доимиҳо вобаста аст.

Дар корҳои [4-M] ва [6-M] муқаррар карда шудааст: «Ҳангоми $\gamma \neq 1$ тасдиқоти зерин ҷой дорад:

Теоремаи 4.8. *Бигзор* $\gamma > 1$ *ва* $\alpha \geq 0$. *Бигзор адади с нули функсияи* $K_\nu(z)$ *набошад ва* $\bar{S} = \{n \in Z: -2\alpha \leq n \leq 0,\ \alpha > 0\}$. *Он гоҳ тасдиқоти зерин дуруст аст:*

i) агар $\bar{S} \neq \emptyset$ *бошад, пас масъалаи I ҳангоми* $h_n = 0\ \forall\, n \in S$ *ҳалшаванда аст;*

ii) агар $\bar{S} = \emptyset$ *бошад, пас масъалаи I бе талаби ягон шарт ҳалшаванда мешавад.*

Эзоҳ: 1. Ҳалли масъалаи I дар намуди қатори (14) навишта мешавад, ки коэффисиентҳои он аз рӯи формулаҳои зерин муайян карда мешавад:

$$u_n(r) = \begin{cases} C_0 \text{ ҳангоми } n = \alpha = 0, \\ 0 \text{ ҳангоми } -2\alpha \leq n \leq 0, \qquad \alpha > 0, \\ D_n r^{-\alpha} K_\nu(cr^{1-\gamma}) \text{ барои қиматҳои боқимондаи } n, \end{cases}$$

$$v_{s-n}(r) = \frac{r^{\gamma-\alpha-1}}{2\bar{a}} \begin{cases} \bar{D}_n \bar{c}(\gamma-1) r^{1-\gamma} K_{\nu+1}(\bar{c}r^{1-\gamma}) \text{ ҳангоми } n > 0, \\ 0 \text{ ҳангоми } -2\alpha \leq n \leq 0, \\ \bar{D}_n[2(n+\alpha)K_\nu(\bar{c}r^{1-\gamma}) - \\ -\bar{c}(1-\gamma)r^{1-\gamma}K_{\nu+1}(\bar{c}r^{1-\gamma})] \text{ ҳангоми } n < -2\alpha, \end{cases}$$

ки дар ин ҷо $D_n = \frac{h_n}{K_\nu(c)}$, C_0 – доимии ихтиёрии комплексӣ.

2. Дар ҳолати $S \neq \emptyset$ шумораи шартҳои ҳалшавандагӣ охирнок ва ба $[2\alpha]$ +1 баробар аст.

Теоремаи 4.9. *Бигзор* $\gamma > 1$ *ва* $\alpha < 0$. *Бигзор адади с нули функсияи* $K_\nu(z)$ *набошад. Онгоҳ масъалаи I бе талаби ягон шарт ҳалшаванда мебошад, дар ин ҳолат ҳалли масъала дар намуди қатори (14) навишта мешавад, ки коэффисиентҳои он аз рӯи формулаҳои теоремаи 4.5 муайян мешавад ва дар он* $\varepsilon = 1$, $D_n = \frac{h_n - C_n I_\nu(c)}{K_\nu(c)}$ $\forall\, n \in Z$, *доимиҳои* C_n *ихтиёрӣ ҳангоми* $n \in \bar{S'} = \{m: 0 \leq m \leq -2\alpha\}$ *ва* $C_n = 0$ *ҳангоми* $n \,\bar{\in}\, \bar{S'}$.

Эзоҳ: 1. Дар шарти теоремаи 4.9 ҳалли масъалаи I аз шумораи охирноки доимиҳо вобаста аст.

2. Дар шарти теоремаҳои 4.7 ва 4.9 ҳалли масъалаи I бо суммаҳои охирнок ифода карда мешавад ва ин суммаҳо функсияҳои синфи C^1-ро муайян мекунанд” [6-M].

3. Дар шарти теоремаҳои 4.6 ва 4.8 ҳалли масъалаи I бо суммаҳои беохир муайян карда мешавад. Наздикшавии ин суммаҳо ва ҳосилаҳои якуми онҳоро аз ҳисоби шарти суфтагии функсияи сарҳадии $h(\varphi)$ ва хосиятҳои функсияҳои I_ν ва K_ν таъмин намудан мумкин аст.

Аз теоремаҳои 4.1 – 4.9 маълум мешавад, ки ҳалли умумии системаи (2), инчунин ҳалшавандагии масъалаи канории намуди масъалаи Риман-Гилберт аз нишондиҳандаҳои сингулярии $\alpha, \beta,$ қиматҳои хоси матрисаи $A\bar{A}$, каратнокии алгебравӣ ва геометрии ин қиматҳои хос вобаста аст.

ХУЛОСАҲО

Объектҳои таҳқиқоти диссертатсия с.у.к.р. бо коэффитсиентҳои сингулярии намуди (1), аз ҷумла бо коэффитсиентҳои доимии $a(z) \equiv \alpha, b(z) \equiv \lambda$ (муодилаи моделӣ), инчунин с.у.к.р. бисёрченака бо коэффитсиентҳои сингулярии намуди (2) мебошанд. Барои ин системаҳо масъалаҳои сохтани ҳалли умумӣ, таҳлили сохтории ҳалҳои масъалаҳои канорӣ, ба монанди масъалаи Риман-Гилберт ва масъалаи ҳамроҳшудаи хаттӣ омӯхта шудаанд. Дар натиҷаи таҳқиқот натиҷаҳои нави зерин ба даст оварда шуданд:

- формулаҳои ошкор барои ҳалҳои муодилаҳои якҷинсаи моделӣ аз синфҳои $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G \backslash \{0\})$ ва $C^1(G \backslash \{0\}, \beta) -$ маҷмӯи функсияҳои намуди $f(z) = |z|^{-\beta} f_0(z)$, дар инҷо $\beta > 0, f_0 \in C_{\bar{z}}(G \backslash \{0\})$ ва функсияи маҳдуд, пешниҳод шудаанд [1-М];
- тасвири интегралии ҳалли муодилаи якҷинсаи моделӣ аз синфи $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G \backslash \{0\})$ ба даст оварда шудааст [1-М], [2-М];
- шабеҳи ядроҳо аз назарияи регулярии ф.а. умумикардашуда сохта шудааст [1-М], [2-М];
- формулаи умумикардашудаи Коши ва интеграли умумикардашудаи навъи Коши пешниҳод шудаанд, ки барои ҳосил намудани ҳалли муодилаҳои баррасишаванда истифода мешаванд [1-М], [2-М], [8-М] [9-М];
- тасдиқот доир ба тартиби нули $z = 0$ ҳалҳо, мавҷудияти ҳалҳо аз синфи $C^m(G)$, $m -$ ихтиёрӣ, ҳалҳои аналитикӣ нисбат ба z ва $\bar{z}$, инчунин мавҷуд набудани ҳалҳои ғайринулӣ аз синфи $C^\infty(G)$ барои муодилаи якҷинсаи (3) муқаррар карда шудаанд [7-М], [10-М], [11-М];
- шартҳои ҳалшавандагӣ ва формулаҳои ҳалли масъалаҳои канорӣ ба монанди масъалаи Риман-Гилберт ва масъалаи ҳамроҳшудаи хаттӣ барои муодилаи якҷинсаи моделӣ ба даст оварда шуданд [3-М], [12-М];
- муодилаи интегралии дар синфи $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G \backslash \{0\})$ ба системаи (1) баробарқувва ба даст оварда шуда, шартҳои ҳалшавандагии ин муодила ёфта шудаанд [2-М];
- рафтори ҳалҳои системаи якҷинсаи ба (1) мувофиқ дар атрофи нуқтаи сингулярӣ $z = 0$ муайян карда шудаст [11-М];
- барои с.у.к.р. бисёрченака бо коэффитсиентҳои сингулярии намуди (2) усули сохтани ҳалли умумӣ ва формулаи ҳалли он ба даст оварда шудааст [5-М], [14-М];

- барои системаҳои дученакаи намуди (2) бо матритсаи секунҷавӣ ва антидиагоналии коэффитсиентҳо формулаҳои ошкор барои ҳалли умумӣ сохта шудаанд [4-М];
- барои системаҳои дученакаи намуди (2) бо матритсаи антидиагоналии коэффитсиентҳо теоремаҳои ҳалшавандагии масъалаи навъи Риман-Гилберт муқаррар карда шуда формулаҳо барои ҳалли онҳо пешниҳод карда шудааст [6-М].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои дар диссертатсия ба дастомада асосан хусусияти назариявӣ дорад. Натиҷаҳои диссертатсия ва методҳои инкишоф додашудаи таҳқиқотро ҳангоми омӯзиши масъалаҳои канорӣ барои синфҳои дигари муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусии коэффитсиентҳояш сингулярӣ истифода бурдан мумкин аст. Як қатор натиҷаҳои диссертатсияро дар раванди машғулиятҳои таълимӣ бо донишҷӯён ва магистрантҳои самтҳои математикӣ истифода бурдан мумкин аст.

РӮЙХАТИ АДАБИЁТ

А) Рӯйхати манбаъҳои истифодашуда

[1]. Александров, А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. – Москва: Государственное техническое издательство, 1948. – 296 с.

[2]. Ахмедов, Р. Краевые задачи для уравнения $2\bar{z}\partial_{\bar{z}}w - \left(\lambda e^{in\varphi} + b(z)\right)\overline{w} = F$ // Доклады Академии наук Таджикской ССР. – 1987. – Том 30, № 12. – С. 6–9.

[3]. Байзоев, С. Полиномиальные решения переопределенных систем уравнений с сингулярными коэффициентами / Байзоев С., Рахимова М. А. // Современные проблемы математики и её приложений: Материалы Международной научной конференции, посвященной 70-летию академика НАНТ Илолова М. – Душанбе, 2018. – С. 80–81.

[4]. Бицадзе, А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – Москва: Наука, 1981. – 448 с.

[5]. Блиев, Н. К. О существовании аналитического решения у одной эллиптической системы, вырождающейся в точке // Известия Академии наук Казахской ССР. Серия физико-математическая. – 1965. – № 1. – С. 96–104.

[6]. Блиев, Н. К. О необходимом и достаточном условии существования аналитических решений у одной вырождающейся системы // Известия Академии наук Казахской ССР. Серия физико-математическая. – 1967. – № 1. – С. 93–95.

[7]. Векуа, И. Н. Обобщённые аналитические функции. – Москва: Наука, 1986. – 630 с.

[8]. Векуа, Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. – Москва: Наука, 1970. – 421 с.

[9]. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.

[10]. Виноградов, В. С. Об одной теореме Лиувилля для обобщённых аналитических функций // Доклады Академии наук СССР. – 1968. – Том 183, № 3. – С. 503–506.

[11]. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.

[12]. Джангибеков, Г. Задача линейного сопряжения решений обобщённой системы Коши–Римана с сингулярными коэффициентами / Джангибеков Г., Бобоев Э. Д. // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. – № 4. – С. 12–20.

[13]. Джураев, А. Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. – Москва: Наука, 1987. – 415 с.
[14]. Макацария, Г. Т. Уравнение Карлемана–Векуа с полярными особенностями: диссертация … кандидата физико-математических наук. – Тбилиси, 1986. – 111 с.
[15]. Михайлов, Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. – Душанбе, 1963. – 183 с.
[16]. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1968. – 511 с.
[17]. Мухсинов, А. Построение решений в виде двойных степенных рядов сингулярного уравнения эллиптического типа // Доклады Академии наук Таджикской ССР. – 1988. – Том 31, № 9. – С. 499–503.
[18]. Мухсинов, А. Исследования многообразий решений краевых задач для некоторых многомерных вырождающихся (сингулярных) уравнений в частных производных эллиптического типа: автореферат диссертации … доктора физико-математических наук. – Душанбе, 2010. – 34 с.
[19]. Назиров, Г. Аналитические решения некоторых эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами // Доклады Академии наук Таджикской ССР. – 1961. – Том 4, № 3. – С. 3–6.
[20]. Нажмиддинов, Х. Обобщённая система Коши–Римана с точечной особенностью выше первого порядка в коэффициентах / Нажмиддинов Х., Усманов З. Д. // Доклады Академии наук Таджикской ССР. – 1975. – Том 18, № 5. – С. 11–15.
[21]. Раджабов, Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. – Душанбе, 1992. – 236 с.
[22]. Раджабов, Н.Задача линейного сопряжения для системы Бицадзе со сверхсингулярной окружностью / Раджабов Н., Расулов А. Б. // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Том 50, № 4. – С. 529–536.
[23]. Раджабова, Л. Н. К теории одного класса гиперболического уравнения с сингулярными линиями // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2006. – Том 49, № 8. – С. 710–717.
[24]. Рахимова, М. А. Полиномиальные решения переопределённых систем уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2017. – № 4 (169). – С. 3–13.

[25]. Тунгатаров, А. Некоторые иррегулярные случаи обобщённой системы Коши–Римана и решение краевых задач Римана–Гильберта: диссертация … кандидата физико-математических наук. – Алма-Ата, 1978. – 93 с.

[26]. Усмонов, З. Д. Обобщённые системы Коши–Римана с сингулярной точкой. – Душанбе, 1993. – 244 с.

[27]. Усмонов, З. Д. О бесконечно малых изгибаниях поверхностей положительной кривизны с изолированной точкой уплощения // Математический сборник. – 1970. – Том 83 (125), № 12. – С. 596–615.

[28]. Усмонов, З. Д. Бесконечно малые изгибания поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения // Differential Geometry. Banach Center Publications. – Том 12. – Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1984. – С. 241–272.

[29]. Шамсудинов, Ф. М. Об одной переопределённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1. Математика, физика. – 2016. – № 6 (37). – С. 90–107.

[30]. Шарипов, Б. Об одном классе нелинейных обобщённых систем Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Том 51, № 9. – С. 1252–1256.

[31]. Шарипов, Б. Об одном классе систем в полных дифференциалах с сингулярной линией / Шарипов Б., Михайлов Л. Г. // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Том 52, № 6. – С. 696–700.

Б) Феҳристи интишороти илмии довталаби дараҷаи илмӣ

Дар маҷаллаҳои илмии тақризшавандаи аз ҷониби Комиссияи олии аттестатсионии назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва Комиссияи олии аттестатсионии Федератсияи Россия тавсияшуда:

[1-М]. Шокирова, М.М. Интегральное представление решений специального класса модельных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярной точкой [Матн] / М.М. Шокирова, Р. Ахмедов // Номаи донишгоҳ. Силсилаи илмҳои табиатшиносӣ ва иқтисодӣ. Хуҷанд. 2017. №1 (40) – С. 58-64.

[2-М]. Шокирова, М.М. Об одном способе вывода обобщенной интегральной формулы Коши для решений одного класса модельных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярной точкой [Матн] / М.М. Шокирова // Номаи донишгоҳ. Силсилаи илмҳои табиатшиносӣ ва иқтисодӣ. Хуҷанд. 2022. №1 (60). – С. 3 – 8.

[3-М]. Шокирова, М.М. Задача Римана-Гильберта для одного класса обобщенных систем Коши-Римана с сингулярной точкой в круговой области [Матн] / М.М. Шокирова // Номаи донишгоҳ. Силсилаи илмҳои табиатшиносӣ ва иқтисодӣ. Хуҷанд. 2024, №1 (68). – С. 27-34.
[4-М]. Шокирова, М.М. О нахождении общего решения одного класса двумерных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами [Матн] / С. Байзаев, М.М. Шокирова // Номаи донишгоҳ. Силсилаи илмҳои табиатшиносӣ ва иқтисодӣ. Хуҷанд. 2024, №3 (70). – С. 3-10.
[5-М]. Шокирова, М.М. О построении решений одного класса многомерных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами [Матн] / С. Байзаев, М.М. Шокирова // Математические структуры и моделирование. ФР. Омский гос. ун-т. 2025, № 1 (73). – С. 16-22.
[6-М]. Шокирова, М.М. Об общем решении и задаче Римана-Гильберта для одного класса двумерных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами [Матн] / С. Байзаев, М.М. Шокирова // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. 2025. №1. – С. 5 – 16.

Дар нашрияҳои дигар:

[7-М]. Шокирова, М.М. О некоторых свойствах решений модельной обобщенной системы Коши-Римана в окрестности сингулярной точки [Матн] / М.М. Шокирова, Р. Ахмедов // Маҷаллаи байналмиллалии илмии «Символ науки». №10/2015. РФ.Уфа. С. 9-12.
[8-М]. Шокирова, М.М. Интегральная формула Коши для решений модельной обобщенной системы Коши-Римана с сингулярной точкой [Матн] / М.М. Шокирова, Р. Ахмедов, С. Юсупов // Номаи донишгоҳ. Силсилаи илмҳои табиатшиносӣ ва иқтисодӣ. Хуҷанд. 2015. № 4(35). – С. 3 – 10.
[9-М]. Шокирова, М.М. Об одном способе вывода обобщенной интегральной формулы Коши для решений одного класса модельных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярной точкой [Мант] / М.М. Шокирова, Р. Ахмедов // Маводи конференсияи илмӣ-амалии профессорон, омӯзгорон ва муҳаққиқони ҷавони ДДХБСТ таҳти унвони «Илм ва инноватсия баҳри иҷрои ҳадафҳои миллӣ». Бахши инноватсия ва телекоммуникатсия. Хуҷанд: Дабир, 2019. С. 18 – 23.
[10-М]. Шокирова, М.М. Свойства решений одного класса комплексного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с сингулярной граничной точкой [Матн] / М.М. Шокирова // Маводи конфронси II байналмилалии илмӣ-амалии "Современная наука: Проблемы, идеи, инновации". 25.12.2020. ФР.Чистополь. – С. 22 – 25.

[11-М]. Шокирова, М.М. О свойствах решений специальной модельной обобщенной системы Коши-Римана в окрестности сингулярной точкой [Матн] / М.М. Шокирова // Маҷмӯаи мақолаҳои конфронси LIV байналмилалии илмӣ-амалии «Word science: problems and innovations». ФР. Пенза. 30.05.2021. – С. 10 – 12.
[12-М]. Шокирова, М.М. Задача Дирихле для решений специальной модельной обобщенной системы Коши-Римана в окрестности сингулярной точки [Матн] / М.М. Шокирова // Конфронси VIII Умумироссиягии илмӣ-амалӣ бо иштироки байналмилалӣ «Современные проблемы физико-математических наук». ФР. Орёл. 25-26 ноября 2022 г. – С. 150 – 154.
[13-М]. Шокирова, М.М. О свойствах решений основных ядер модельной обобщенной системы Коши-Римана в окрестности сингулярной точкой [Матн] / М.М. Шокирова // Маҷмӯаи мақолаҳои конфронси XLVII Internationonal Multidisciplinary Conference «Prospects and key tendencies of science in contemporary world». Испания. Мадрид. 2024. – С. 92 – 99.
[14-М]. Шокирова, М.М. О регулярных решениях одного класса многомерных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами [Матн] / С. Байзаев, М.М. Шокирова // Маводи конф. байналмиллалии илмии “Уфимская математическая школа – 2024”. ФР. Уфа. 2 – 5 октября 2024. Ҷилди 2. – С. 22-23.

АННОТАТСИЯ

ба диссертатсияи Шокирова Мухбира Мухторхоновна дар мавзӯи «Таҳқиқи баъзе синфҳои системаи умумикардашудаи Коши-Риман бо нуқтаи сингулярӣ» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.02 – Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ

Калимаҳои калидӣ: системаи умумикардашудаи Коши-Риман, коэффитсиентҳои сингулярӣ, ҳалли умумӣ, масъалаҳои Риман-Гилберт ва ҳамроҳшудаи хаттӣ.

Мақсади таҳқиқот. Омӯзиши системаи умумикардашудаи Коши-Риман (с.у.к.р.) бо коэффитсиентҳои сингулярии намуди

$$\Psi_{\bar{z}} - \bar{z}^{-1}a(z)\Psi + \bar{z}^{-1}b(z)\overline{\Psi} = f(z), \tag{1}$$

аз ҷумла, бо коэффитсиентҳои доимӣ $a(z) \equiv \alpha, b(z) \equiv \lambda$ (муодилаи моделӣ), инчунин с.у.к.р. бисёрченака бо коэффитсиентҳои сингулярии намуди

$$w_{\bar{z}} + z^{-\alpha}\bar{z}^{-\beta}A\bar{w} = 0, \tag{2}$$

дар ин ҷо $w \in C^m -$ фазои комплексии m-ченака, $\alpha, \beta -$ ададҳои ҳақиқӣ, $\alpha + \beta > 0$ ва $\alpha - \beta -$ бутун, $A -$ матритсаи комплексии тартиби m.

Методҳои таҳқиқот. Дар диссертатсия методҳои назарияи функсияҳои умумикардашудаи аналитикӣ (ф.у.а.) ва тағйирёбандаи комплексӣ, матритсаҳо, муодилаҳои дифференсиалӣ ва таҳлили функсионалӣ истифода шудааст.

Навгонии илмии таҳқиқот. Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ нав мебошанд ва аз зеринҳо иборатанд: ҳалҳои муодилаи якҷинсаи моделӣ аз синфҳои $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G\backslash\{0\})$ ва $C^1(G\backslash\{0\}, \beta) -$ маҷмӯи функсияҳои намуди $f(z) = |z|^{-\beta}f_0(z)$, ки дар инҷо $\beta > 0, f_0 \in C_{\bar{z}}(G\backslash\{0\})$ ва функсияи маҳдуд, сохта шудаанд; тасвири интегралии ҳалҳои муодилаи моделӣ аз синфи қайдгардида ҳосил карда шудааст; шабеҳи ядроҳо аз назарияи ф.у.а., инчунин формулаи умумикардашудаи Коши ва интеграли умумикардашудаи навъи Коши, ки барои ҳалли муодилаҳои баррасишаванда истифода мешаванд, сохта шудаанд; ядроҳои асосӣ ва ҳалҳои элементарии муодилаи ҳамроҳшуда сохта шудаанд; рафтори ҳалҳои системаи якҷинсаи ба (1) мувофиқ дар атрофи нуқтаи сингулярӣ $z = 0$ муайян карда шудаст; тасдиқот доир ба тартиби нули $z = 0$ ҳалҳо муқаррар карда шуда, мавҷудияти ҳалҳо аз синфи $C^m(G)$, $m -$ ихтиёрӣ, ҳалҳои аналитикӣ нисбат ба z ва $\bar{z}$, инчунин мавҷуд набудани ҳалҳои ғайринулӣ аз синфи $C^\infty(G)$ барои муодилаи якҷинсаи моделӣ муқаррар карда шудаанд; шартҳои ҳалшавандагӣ ва формулаҳои ҳалли масъалаҳои канории навъи Риман-Гилберт ва хаттии ҳамроҳшуда барои муодилаи моделӣ ба даст оварда шуданд; муодилаи интегралии дар синфи $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G\backslash\{0\})$ ба системаи (1) баробарқувва ба даст оварда шуда, шартҳои ҳалшавандагии ин муодила ёфта шудаанд; барои с.у.к.р. бисёрченака бо коэффитсиентҳои сингулярии намуди (2) методи сохтани ҳалли умумӣ ва формулаи ҳалли он ба даст оварда шуд; барои системаҳои дученакаи намуди (2) бо матритсаи секунҷавӣ ва антидиагоналии коэффитсиентҳо формулаҳои ошкор барои ҳалли умумӣ сохта шудаанд; барои системаҳои дученакаи намуди (2) бо матрисаи антидиагоналии коэффитсиентҳо теоремаҳои ҳалшавандагии масъалаи навъи Риман-Гилберт муқаррар карда шуда формулаҳо барои ҳалли онҳо пешниҳод карда шудааст.

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии кор. Кор хусусияти назариявӣ дорад. Усулҳои дар диссертатсия таҳияшуда ва натиҷаҳои бадастомадаро ҳангоми таҳқиқи синфҳои дигари системаҳои муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусии коэффитсиентҳояш сингулярӣ истифода бурдан мумкин аст.

АННОТАЦИЯ

диссертации Шокировой Мухбиры Мухторхоновны «Исследование некоторых классов обобщённых систем Коши-Римана с сингулярной точкой» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: обобщённые системы Коши-Римана, сингулярные коэффициенты, общее решение, задачи Римана-Гильберта и линейного сопряжения.

Цель исследования. Изучение обобщенных систем Коши-Римана (о.с.к.р.) с сингулярными коэффициентами вида

$$\Psi_{\bar{z}} - \bar{z}^{-1}a(z)\Psi + \bar{z}^{-1}b(z)\overline{\Psi} = f(z), \qquad (1)$$

в частности, с постоянными коэффициентами $a(z) \equiv \alpha, b(z) \equiv \lambda$ (модельное уравнение), а также многомерные о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами вида

$$w_{\bar{z}} + z^{-\alpha}\bar{z}^{-\beta}A\overline{w} = 0, \qquad (2)$$

где $w \in C^m -$ комплексное m-мерное пространство, $\alpha, \beta -$ вещественные числа, такие что $\alpha + \beta > 0$ и $\alpha - \beta -$ целое, $A -$ комплексная матрица порядка m.

Методы исследования. В диссертации используются методы теорий обобщенных аналитических функций (о.а.ф.), функций комплексного переменного, матриц, дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Научная новизна исследования. Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем: построены решения модельного однородного уравнения из классов $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G\backslash\{0\})$ и $C^1(G\backslash\{0\}, \beta) -$ множество функций f, представимых в виде $f(z) = |z|^{-\beta}f_0(z)$, где $\beta > 0, f_0 \in C_{\bar{z}}(G\backslash\{0\})$ и ограниченная функция; получено интегральное представление решений модельного уравнения из указанного класса; построены аналоги ядер из теории регулярных о.а.ф., а также обобщённая формула Коши и обобщённый интеграл типа Коши, используемые для получения решений рассматриваемых уравнений; построены основные ядра и элементарные решения сопряженного уравнения; выявлено поведение решений однородной системы соответствующей (1) в окрестности сингулярной точки $z = 0$; установлены утверждения о порядке нуля $z = 0$ решений, о существовании решений из класса $C^m(G)$, $m -$ произвольный, аналитических по z и $\bar{z}$ решений, а также отсутствия ненулевых решений, принадлежащих классу $C^\infty(G)$ однородного модельного уравнения; получены условия разрешимости и формулы решений граничных задач типа задачи Римана-Гильберта и задачи линейного сопряжения для модельного уравнения; получено интегральное уравнение, эквивалентное системе (1) в классе $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G\backslash\{0\})$ и найдены условия разрешимости этого уравнения; для многомерных о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами вида (2) получен метод построения общего решения и формулы для решений; для двумерных систем вида (2) с треугольной и антидиагональной матрицей коэффициентов построены явные формулы для общего решения; для двумерных систем вида (2) с антидиагональной матрицей коэффициентов установлены теоремы разрешимости задачи типа Римана-Гильберта и представлены формулы для решения.

Рекомендации по практическому использованию результатов. Работа имеет теоретический характер. Методы, развитые в диссертации и полученные результаты можно применять при исследовании других классов систем уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами.

ANNOTATION

of Mukhbira Mukhtorkhonovna Shokova's dissertation "Study of some classes of generalized Cauchy-Riemann systems with a singular point" for the degree of Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, specialty 01.01.02 – Differential equations, dynamical systems and optimal control

Keywords: generalized Cauchy-Riemann systems (g.c.r.s.), singular coefficients, general solution, Riemann-Hilbert and linear conjugation problems.

The purpose of the study. The study of g.c.r.s. systems with singular coefficients of the form

$$\Psi_{\bar{z}} - \bar{z}^{-1}a(z)\Psi + \bar{z}^{-1}b(z)\overline{\Psi} = f(z), \quad (1)$$

in particular, with constant coefficients $a(z) \equiv \alpha, b(z) \equiv \lambda$ (model equation), and multidimensional g.c.r.s. with singular coefficients of the form

$$w_{\bar{z}} + z^{-\alpha}\bar{z}^{-\beta}A\bar{w} = 0, \quad (2)$$

where $w \in C^m$ is a complex m-dimensional space, α, β are real numbers such that $\alpha + \beta > 0$ and $\alpha - \beta$ is an integer, A is a complex matrix of order m.

Research methods. The dissertation the methods of theorys of generalized analytical functions (g.a.f.), functions of complex variables, matrices, differential equations and functional analysis are used.

Scientific novelty of the research. The results of the dissertation are new and consist in the following: solutions of a model homogeneous equation from classes $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G\backslash\{0\})$ and $C^1(G\backslash\{0\}, \beta)$ are the set of functions f, represented as $f(z) = |z|^{-\beta}f_0(z)$, where $\beta > 0, f_0 \in C_{\bar{z}}(G\backslash\{0\})$ and a bounded function; an integral representation of solutions of a model equation from the specified class is obtained; analogues of kernels from the theory of regular g.a.f. are constructed, as well as a generalized Cauchy formula and a generalized Cauchy integral used to obtain solutions of the equations under consideration; basic kernels and elementary solutions of the conjugate equation are constructed; the behavior of solutions of a homogeneous of the system corresponding to (1) in the vicinity of the singular point $z = 0$; statements are established about the order of zero $z = 0$; solutions, about the existence of solutions from the class $C^m(G)$, m is arbitrary, z and $\bar{z}$-analytic solutions, as well as the absence of nonzero solutions belonging to the class $C^\infty(G)$ homogeneous model equation; solvability conditions and formulas for solutions of boundary value problems such as the Riemann-Hilbert problem and the linear conjugation problem for a model equation are obtained; an integral equation equivalent to system (1) in class $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G\backslash\{0\})$ and the conditions for the solvability of this equation are found; for multidimensional linear equations with singular coefficients of the form (2), a method for constructing a general solution and formulas for solutions are obtained; for two-dimensional systems of the form (2) with a triangular and antidiagonal matrix of coefficients, explicit formulas for the general solution are constructed; for two-dimensional systems of the form (2) with an antidiagonal matrix of coefficients, solvability theorems for a Riemann-Hilbert type problem are established and formulas for solving them are presented.

Recommendations for the practical use of the results. The work is theoretical in nature. The methods developed in the dissertation and the results obtained can be applied in the study of other classes of systems of partial differential equations with singular coefficients.