

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРАВА,
БИЗНЕСА И ПОЛИТИКИ**

На правах рукописи



УДК 517.9
ББК 22.161.6
Ш 78

Шокирова Мухбира Мухторхоновна

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОБОБЩЁННЫХ
СИСТЕМ КОШИ-РИМАНА С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ**

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Байзаев Саттор

Худжанд - 2025

Оглавление

Основные обозначения и сокращения	4
Введение	5
Глава 1. Аналитический обзор работ, посвященных уравнениям математической физики с сингулярными коэффициентами	15
§ 1.1. Анализ научных результатов по обобщенной системе Коши-Римана с сингулярными коэффициентами	15
§ 1.2. Обзор об исследованиях по уравнениям математической физики с сингулярными линиями	21
Глава 2. Построение основного интегрального уравнения	23
§2.1. Построение общего решения модельной системы.	23
§2.2. Исследование функций Ω_1 и Ω_2	29
§2.3. Свойства основного оператора	36
§2.4. Приведение общей системы к интегральному уравнению.	39
Глава 3. Исследование модельной системы.	42
§3.1. Основные ядра и элементарные решения сопряжённого уравнения	42
§3.2. Обобщённая формула Коши и обобщённый интеграл типа Коши	44
§3.3. Дальнейшее изучение модельной системы	50
§ 3.4. Задача Римана-Гильберта для модельной системы	54
§ 3.5. Задача сопряжения для модельной системы	73
§ 3.6. Поведение решений в особой точке	78
Глава 4. Многомерные обобщенные системы Коши-Римана с сингулярными коэффициентами	85
§ 4.1. Построение общего решения	85
§ 4.2. Системы с треугольной матрицей	94
§ 4.3. Задача Римана-Гильберта для системы с антидиагональной матрицей	104

Глава 5. Анализ и обсуждение результатов.....	120
Выводы	132
Рекомендации по практическому использованию результатов	133
Список использованной литературы	134

Перечень сокращений и условных обозначений

$z = x + iy = re^{i\varphi}$, $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\psi}$ – комплексные переменные;

$\partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ – оператор комплексного дифференцирования;

E – комплексная плоскость;

G – ограниченная область плоскости E , содержащая точку $z = 0$;

Γ – граница области G ; $\bar{G} = G \cup \Gamma$;

$C(G)$ – класс непрерывных в G функций;

$C^m(G)$ – класс m раз непрерывно дифференцируемых в G функций;

$C_0(G)$ – класс непрерывных в $G \setminus \{0\}$ и ограниченных функций;

$C_{\bar{z}}(G)$ – класс функций, допускающих в G непрерывную обобщенную производную по $\bar{z}$;

$C^1(G \setminus \{0\}, \beta)$ – множество функций f , представимых в виде $f(z) = |z|^{-\beta} f_0(z)$, где $\beta > 0$, $f_0 \in C_{\bar{z}}(G \setminus \{0\})$ и ограниченная функция;

$L_p(G)$ – класс функций, суммируемых в G со степенью $p \geq 1$;

о.с.к.р. – обобщенная система Коши-Римана;

о.д.у. – обыкновенные дифференциальные уравнения;

а.ф. – аналитическая функция;

к.р. – краевая задача;

о.к.р. – однородная краевая задача;

н.к.р. – неоднородная краевая задача;

с.л.а.у. – система линейных алгебраических уравнений.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Дифференциальные уравнения являются эффективным средством исследования различных процессов природы, естествознания, технических и других наук. В последние десятилетия в связи с решением прикладных задач, во многих разделах математической физики, геометрии, гидродинамики, газовой динамики, теории упругости и др. появились новые задачи, которые приводят к исследованию дифференциальных уравнений специального вида (см., например, [3], [21], [28], [34]). В этих уравнениях в отдельных точках, вдоль линий или вообще на множестве точек более сложной структуры происходит вырождение порядка или типа, или коэффициенты стремятся к бесконечности. Такие уравнения называются вырождающимися уравнениями или уравнения с сингулярными коэффициентами.

В диссертации исследуются обобщенные уравнения Коши-Римана

$$\partial_{\bar{z}}w + A(z)w + B(z)\bar{w} = 0$$

и многомерные системы таких уравнений с сингулярными коэффициентами.

Необходимость исследования о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами впервые было указано И.Н. Векуа [28]. Он рассмотрел случай, когда коэффициенты $A(z)$ и $B(z)$ являются квазисуммируемыми и при таком предположении для решений системы установил представление, называемое представлением второго рода, на основе которого устанавливаются разрешимость системы и основные свойства решений.

Л.Г. Михайлов [48] исследовал случай, когда коэффициенты имеют вид: $A(z) = |z|^{-1}a(z)$, $B(z) = |z|^{-1}b(z)$, где $a(z)$ и $b(z)$ ограниченные функции и получил интегральное уравнение с ограниченным (вполне непрерывным, если дополнительно функции $a(z)$ и $b(z)$ непрерывны при $z = 0$ и $a(0) = b(0) = 0$)) оператором в специальных классах функций с полярными особенностями в точке $z = 0$. Однозначная разрешимость интегрального уравнения доказана при

условии сжатости оператора, которое обеспечивается за счет малости нормы коэффициентов $a(z)$ и $b(z)$. В этом случае изучены граничные задачи типа задач Римана-Гильберта и задачи линейного сопряжения и получены соответствующие утверждения о разрешимости таких задач и формулы для подсчета индекса.

З.Д. Усманов [98] исследовал случай, когда коэффициенты имеют вид: $A(z) = 0, B(z) = \bar{z}^{-1} e^{in\varphi} b(z)$, где n – целое число, $\varphi = \arg z$, $b(z)$ непрерывна и при достаточно малых $|z|$ выполняются условия

$$b(0) \neq 0, 0 < m < |b(z) - b(0)| < M|z|^\gamma, \gamma > 0.$$

Им была выдвинута идея о том, что в этом случае теория будет увязываться не с а.ф., а с теорией решений модельной системы с коэффициентом $B_0(z) = \bar{z}^{-1} e^{in\varphi} b(0)$ и на этой основе он построил соответствующую полную теорию. В ряде своих работ З.Д. Усманов [85], [96] исследовал задачи, связанные с геометрией, а именно были изучены задачи о бесконечно малых изгибаниях поверхностей положительной кривизны с изолированной точкой уплощения: получил соответствующие уравнения с сингулярными точками, описал геометрический смысл краевых условий и установил ряд теорем разрешимости граничных задач.

Его ученики Х. Нажмиддинов [58] и Р. Ахмедов [6], [7] продолжая исследования уравнений для случаев $B(z) = |z|^{-\alpha} e^{in\varphi} b(z), \alpha > 1$ и $B(z) = \bar{z}^{-1} [\lambda e^{in\varphi} + b(z)], \lambda \in \mathbb{C}$ соответственно, достигли существенных научных результатов. Они получили различные представления решений, установили важнейшие их свойства как подобные свойствам аналитических функций, так и отличающиеся от них, установили теоремы разрешимости граничных задач типа задачи Римана-Гильберта и задачи линейного сопряжения.

В работах Г. Назирова [60] и Н.К. Блиева [22] – [24] рассматривались различные вопросы, связанные с изучением о.с.к.р., в предположении, что

$A(z) = |z|^{-1}a^*(z)e^{\pm i\varphi}, B(z) = |z|^{-1}b^*(z)e^{\pm i\varphi}$, причем $a^*(z)$ и $b^*(z)$ а.ф. по z и $\bar{z}$ в окрестности точки $z = 0$. Г. Назыровым при $a^*(z) \equiv 0$ и $b^*(0) = 0$ доказано существование решений специального вида. Эти результаты обобщены А. Мухсиновым [54].

А. Тунгатаров [83], [84] исследовал случай, когда коэффициенты имеют вид: $A(z) = 0, B(z) = \bar{z}^{-1}e^{in\varphi}b(z)$, где n – четное неотрицательное число, $b(z)$ непрерывна в $G, b(0) \neq 0$. Он основы теории о.с.к.р. распространил на дробные пространства Бесова.

В работах Г.Т. Макадаря [47] для о.с.к.р. применен метод аналитических регуляризаторов И.Н. Векуа. При $A(z) = |z|^{-\nu}a(z), B(z) = |z|^{-\mu}b(z)$ и выполнении условий

$$\nu > [\mu] + 1 \quad ([\mu] - \text{целая числа } \mu), a(0) \neq 0,$$

$$|z|^{-(\nu-|\nu|+1)}(a(z) - a(0)e^{in\varphi}) \text{ и } |z|^{-(\mu-[\mu])}b(z) \in L_p(G), p > n, n - \text{целое,}$$

исследовано поведение решений при $z \rightarrow 0$. Выявлены случаи, когда о.с.к.р. в окрестности точки $z = 0$ не имеет ненулевых ограниченных решений.

В ряде работ Н. Раджабова [65], [72] и его учеников [100] – [103], а также других авторов (см. [18], [41], [75], [108]) проводились исследования с различными классами уравнений и систем эллиптического, гиперболического и смешанного типов, переопределенных систем уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами, о.д.у. и систем, имеющие точечные особенности в коэффициентах. Для таких уравнений изучены задачи Коши, задача линейного сопряжения, задача о полиномиальных решениях, в частности ограниченных решениях, и др.

Следует отметить, что в последние десятилетия получили дальнейшее развитие исследования по уравнениям и системам с сингулярными коэффициентами. А. Мухсинов (см., например, [55] – [57]) в своих работах

получил формулы представления решений некоторых классов многомерных вырождающихся (сингулярных) уравнений в частных производных эллиптического типа и решения разнообразных граничных задач. Рассматриваемые им уравнения имеют сингулярные коэффициенты на линиях, плоскостях и других многообразиях, причем некоторые уравнения на указанных многообразиях меняют тип или вырождаются.

Н. Раджабов и А.Б. Расулов [70] рассматривали систему Бицадзе со сверхсингулярной окружностью, т.е. коэффициенты системы обращаются в нуль на окружности. Для этой системы исследованы ряд граничных задач, получены представления решений и утверждения о разрешимости рассматриваемых задач.

В работах Б. Шарипова [106], [107] исследованы некоторые классы нелинейных о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами и систем в полных дифференциалах с сингулярной линией, получены представления решений и условия разрешимости.

Г. Джангибеков [37] и его ученики рассматривали задачу сопряжения для о.с.к.р., когда $A(z) = \bar{z}^{-1}a(z)$, $B(z) = \bar{z}^{-1}b(z)$, где $a(z)$ и $b(z)$ измеримые и ограниченные в единичном круге функции, имеющие предельные значения при $z \rightarrow 0$. Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи и получена формула для индекса.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Существенный вклад в разработке изучаемой проблемы внесли И.Н. Векуа [28], [29], [122], Н.И. Мусхелишвили [52], Н.П. Векуа [30], Л.Г. Михайлов (см., напр., [48] – [50], [107]), З.Д. Усманов (см., напр., [85], [98]), Н.Р. Раджабов (см., напр., [64], [65]), Н.К. Блиев [22] – [26], В.С. Виноградов [31] – [33], Ф.Д. Гахов [36], А. Джураев [38], Г. Джангибеков [37], Г.Т. Макацария [47], Х.Н. Нажмиддинов [58], [59], Г. Назиров [60], А. Тунгатаров [83], [84], Н. Усмонов [99], Р. Ахмедов (см., напр., [4], [5]), Б. Шарипов [104] – [107] и другие. Об исследованиях многих из этих ученых и полученных результатах было сказано в предыдущем пункте (в первой главе приводится подробный обзор работ, близких к тематике настоящей диссертации). Отметим, что в указанных исследованиях были использованы

методы теории функций комплексного переменного, сингулярных интегральных уравнений и функционального анализа.

Несмотря на полученные существенные результаты по проблемам, связанными с о.с.к.р., тем не менее остаются не изученными ряд классов таких систем, в том числе многомерные системы с сингулярными коэффициентами и задачи нахождения решений из различных функциональных пространств. Представляет интерес, наряду с выше указанными методами, использование современных методов анализа и теории матриц для исследования о.с.к.р.

Диссертационная работа посвящена исследованию задач о разрешимости ранее не рассмотренных классов о.с.к.р. и многомерных систем с сингулярными коэффициентами в конкретных функциональных пространствах, вопросам построения общего решения и нахождению решений граничных задач. Исследование и разработка методов изучения этих задач несомненно являются актуальными и представляют научный интерес.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры математических дисциплин и современного естествознания Таджикского госуниверситета права, бизнеса и политики на 2016-2020 гг. по теме «Исследование дифференциальных уравнений эллиптического, гиперболического типов и дифференциальных игр в специальных функциональных пространствах» и на 2021 – 2025 гг. по теме “Дифференциальные уравнения с частными производными: теория и методика преподавания”.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Изучение некоторых классов о.с.к.р. и многомерных о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами, построение для них общего решения и анализ разрешимости граничных задач.

Задачи исследования. Они заключаются в следующем:

1. Нахождение явного решения:
 - а) модельной о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами;
 - б) граничной задачи Римана-Гильберта;
 - в) задачи линейного сопряжения;
2. Изучение поведения решения указанных систем в окрестности сингулярной точки.
3. Построение общего решения многомерных о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами.
4. Изучение граничной задачи типа задачи Римана-Гильберта для указанной многомерной системы.

Объект исследования. Такими объектами являются:

- 1) О.с.к.р. с сингулярными коэффициентами вида

$$\partial_{\bar{z}}\Psi - \frac{a(z)}{2\bar{z}}\Psi - \frac{b(z)}{2\bar{z}}\bar{\Psi} = f(z), \quad z \in G, \quad (0.1)$$

здесь G — область, содержащая точку $z = 0$ и ограниченная замкнутым гладким контуром Γ ;

- 2) многомерная о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами вида

$$w_{\bar{z}} + \frac{1}{z^{\alpha}\bar{z}^{\beta}}A\bar{w} = 0, \quad (0.2)$$

где $w \in C^m$ — комплексное m -мерное пространство, α, β — вещественные числа, причем $\alpha + \beta > 0$ и $\alpha - \beta$ — целое, A — комплексная матрица порядка m .

Предмет исследования. Таковыми являются доказательства утверждений об общем решении, о разрешимости граничных задач типа задачи Римана-Гильберта и сопряжения для рассматриваемых уравнений и систем.

Теоретические основы исследования. Таковыми являются теория обобщенных аналитических функций (а.ф.), теория функций комплексного переменного, теория матриц и методы дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Научная новизна исследования. Новизна полученных в диссертации результатов заключается в следующем:

- Найдены многообразия решений из классов $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G \setminus 0)$ и $C^1(G \setminus \{0\}, \beta)$ о.с.к.р. вида

$$\partial_{\bar{z}}\Phi - \frac{\alpha}{2\bar{z}}\Phi - \frac{\lambda}{2\bar{z}}\bar{\Phi} = 0, z \in G, \quad (0.3)$$

где α, λ — постоянные;

- Найдено интегральное представление решений из указанного класса для о.с.к.р. вида (0.3);

- Построены аналоги ядер $\Omega_1(z, \zeta)$, $\Omega_2(z, \zeta)$, используемые для получения решений рассматриваемых о.с.к.р.;

- Построены основные ядра и элементарные решения сопряженной системы;

- Выявлено поведение решений однородной системы соответствующей (0.1) в окрестности сингулярной точки $z = 0$;

- Установлены утверждения о порядке нуля $z = 0$ решений, о существовании решений из класса $C^m(G)$, m — произвольный, аналитических по z и $\bar{z}$ решений, а также отсутствия ненулевых решений, принадлежащих классу $C^\infty(G)$ о.с.к.р. (0.3);

- Получены условия разрешимости и формулы решений граничных задач типа задачи Римана-Гильберта и задачи линейного сопряжения для о.с.к.р. (0.3);

- Получены интегральное уравнение, эквивалентное о.с.к.р. (0.1) в классе $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G \setminus 0)$ и соответствующие условия разрешимости;
- Для о.с.к.р. вида (0.2) предложена схема построения общего решения и получены формулы решений;
- Для двумерных о.с.к.р. вида (0.2) с треугольной, а также антидиагональной матрицей коэффициентов построены явные формулы для общего решения;
- Для двумерных о.с.к.р. вида (0.2) с антидиагональной матрицей коэффициентов установлены теоремы разрешимости задачи типа Римана-Гильберта и представлены формулы для решения.

Положения, выносимые на защиту.

- Формулы решений из классов $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G \setminus 0)$ и $C^1(G_0, \beta)$, интегральное представление решений из указанного класса, теоремы о порядке нуля $z = 0$ решений, о существовании решений из класса $C^m(G)$, m – произвольный, аналитических по z и $\bar{z}$ решений и отсутствия ненулевых решений, принадлежащих классу $C^\infty(G)$ для модельного уравнения (0.3);
- Условия разрешимости и формулы решений граничных задач типа задачи Римана-Гильберта и задачи линейного сопряжения для модельного уравнения (0.3), полученное интегральное уравнение, эквивалентное системе (0.1) в классе $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G \setminus 0)$ и условия разрешимости этого уравнения;
- Метод построения общего решения и формулы для решений многомерных о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами вида (0.2), теоремы разрешимости и формулы для решения задачи типа Римана-Гильберта для двумерных систем вида (0.2) с антидиагональной матрицей коэффициентов.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа в основном имеет теоретический характер. Разработанную методику исследования можно применять в задачах, связанных с другим классами о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами.

Степень достоверности результатов. Установленные в диссертации леммы и теоремы, формулы для решений уравнений и систем, а также для решений граничных задач обеспечены строгими и обоснованными

доказательствами. Они согласуются с результатами других авторов, полученных в частных случаях.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 01.02.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, в которой исследованы разрешимость уравнений с частными производными, свойства решений и краевые задачи для них и соответствует пунктам 2, 3 и 5 раздела III – области исследований паспорта научной специальности.

Личный вклад соискателя учёной степени. Тема и направление диссертационного исследования выбраны соискателем по согласованию с научным руководителем, который также оказывал консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, перечисленные в разделе «Научная новизна исследования» получены лично автором. Подготовка статей к публикации, апробация полученных результатов диссертации выполнены соискателем.

Апробация и применение результатов диссертации. Основные результаты диссертации представлялись и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

- Международная научно-практическая конференция “Современная наука: Проблемы, идеи, инновации”, 25 декабря 2020 года. Чистополь, РФ;
- Международная научно-практическая конференция «Word science problems and innovations», 30 мая 2021 года. Пенза, РФ;
- VIII Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук», 25-26 ноября 2022 г. Орёл, РФ;
- Международная научно-практическая конференция «Математика в современном мире», посвященная 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Байзаева Саттора, 20 апреля 2024 года. Худжанд;

- Международная конференция XLVII International Multidisciplinary Conference «Prospects and key tendencies of science in contemporary world», 2024 г. Мадрид, Испания;

- Уфимская осенняя математическая школа – 2024. 2 – 5 октября 2024 г. Уфа, РФ;

- Научный семинар при ТГУПБП под руководством доктора физико-математических наук, профессора Байзаева С.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации отражены в 14 статьях, 6 из которых опубликованы в рецензируемых научных изданиях перечня рекомендованного ВАК при Президенте Республики Таджикистан. Из совместных работ в диссертацию включены результаты, полученные лично соискателем.

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения, общей характеристики, пяти глав, заключения и списка литературы, состоящей из 138 наименований. В диссертации для формул и параграфов используется двойная нумерация, первый номер совпадает с номером главы, а второй – с номерами формул. Общий объём диссертации 150 страницы машинописного текста.

ГЛАВА 1

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР РАБОТ, ПОСВЯЩЕННЫХ УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1.1. Анализ научных результатов по обобщенной системе Коши-Римана с сингулярными коэффициентами

О.с.к.р. называется эллиптическая система вида

$$\partial_{\bar{z}}w + A(z)w + B(z)\bar{w} = 0, \quad (1.1)$$

где $z = x + iy$, $w = w(z)$ – искомая комплекснозначная функция, $A(z), B(z)$ – заданные в некоторой области G функции.

Когда коэффициенты $A(z)$ и $B(z)$ принадлежат классу $L_p(G)$, $p > 2$ уравнение (1.1) называют регулярной о.с.к.р. Полная теория таких систем построена в научных трудах И.В. Векуа и американского математика Л. Берса, их учеников и последователей (см., например, [20], [28], [109], [110], [117]). В монографии [28] также предложен метод исследования уравнения (1.1) в случае когда $A(z)$ и $B(z)$ не принадлежат классу $L_p(G)$, $p > 2$, но являются квазисуммируемыми, т.е. существуют а.ф. – регуляризаторы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, $z \in G$, такие что $\varphi(z) \cdot A(z)$ и $\psi(z) \cdot B(z) \in L_p(G)$, $p > 2$. В таком случае уравнение (1.1) названо квазирегулярной о.с.к.р. Для её решений И.В. Векуа установил формулу

$$w(z) = \Phi(z)e^{\omega(z)}, \quad (1.2)$$

где $\Phi(z)$ – а.ф. в области G , а $\omega(z)$ определяется через коэффициенты уравнения и функций $\varphi(z), \psi(z)$ (см. [29], [123]).

Формула (1.2) может быть использована для исследования решений в окрестности изолированных сингулярных точек коэффициентов $A(z)$ и $B(z)$.

В связи с этим внимание исследователей сосредоточилось на рассмотрении специальных классов уравнения (1.1) с квазисуммируемыми коэффициентами:

$$\partial_{\bar{z}} w + \frac{a(z)}{|z|^\nu} w + \frac{b(z)}{|z|^\mu} \bar{w} = 0, z \in G, \quad (1.3)$$

где числа $\nu \geq 1$ и $\mu \geq 1$.

При $\nu = \mu = 1$ и ограниченности $a(z)$ и $b(z)$ уравнение (1.3) изучалось Л.Г. Михайловым [48]. Применяя к (1.3) интегральный оператор теории о.с.к.р.

$$T_G(\cdot) = \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{(\cdot)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \zeta = \xi + i\eta \quad (1.4)$$

он получил интегральное уравнение вида

$$w(z) - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{a(\zeta)w(\zeta) + b(\zeta)\bar{w}(\zeta)}{|\zeta|(\zeta - z)} d\xi d\eta = \Phi(z), \quad (1.5)$$

где $\Phi(z)$ – а.ф. переменной z .

Л.Г. Михайлов ввел специальные классы функций с полярными особенностями в точке $z = 0$, в которых оператор уравнения (1.5) ограничен, а если дополнительно $a(z)$ и $b(z)$ непрерывны при $z = 0$ и $a(0) = b(0) = 0$, то и вполне непрерывен. Однозначная разрешимость (1.5) доказана при условии сжатости оператора, которое обеспечивается за счет малости нормы коэффициентов $a(z)$ и $b(z)$. В этом случае между множествами $\{\omega\}$ и $\{\Phi\}$ устанавливается взаимно-однозначное соответствие, благодаря чему удастся получить решение граничных задач Римана-Гильберта и линейного сопряжения.

Слишком общая информация относительно $a(z)$ и $b(z)$, а именно их принадлежность классу ограниченных функций является одной из причин, по которой не удастся построить полную теорию уравнения (1.5).

З.Д. Усмановым была выдвинута идея о том, что теория квазирегулярных систем будет увязываться не с а.ф., а с теорией решений некоторых модельных

уравнений с особыми коэффициентами. Именно в таком плане развивались его исследования для уравнения

$$\partial_{\bar{z}} w + \frac{b(z)}{2\bar{z}} e^{in\varphi} \bar{w} = F(z), \quad z \in G, \quad (1.6)$$

здесь n – целое число, $\varphi = \arg z$, $b(z)$ непрерывна в G , $b(0) \neq 0$ и при достаточно малых $|z|$ выполняются условия:

$$0 < m < |b(z) - b(0)| < M|z|^\gamma, \gamma > 0 \text{ и } F(z) \in L_p(G), p > 2.$$

В качестве модельной системы принимается следующая система

$$\partial_{\bar{z}} \Phi + \frac{b(0)}{2\bar{z}} e^{in\varphi} \bar{\Phi} = 0, \quad z \in G. \quad (1.7)$$

Как отмечено в наших работах «Исследование уравнения (1.6) базируется на интегральном уравнении с вполне непрерывным оператором, которое устанавливает связь многообразий непрерывных решений уравнений (1.6) и (1.7). На основе этой связи изучаются свойства решений $w(z)$ через аналогичные свойства решений $\Phi(z)$ модельного уравнения (1.7). Полная теория уравнения (1.6) построена при $n = 0$ в [86] – [92]. В случае $n \neq 0$ в [94] получено интегральное уравнение, устанавливающее связь между непрерывными решениями (1.6) и (1.7)» [1-А], [3-А].

По указанной схеме в работах Наджмиддинова Х.Н. и Усманова З.Д. [59] развивались исследования о.с.к.р. с сингулярной точкой порядка больше единицы:

$$\partial_{\bar{z}} W - \frac{b(z)}{2r^{1+2\nu}} e^{i(n+1)\varphi} \bar{W} = 0, z \in G. \quad (1.8)$$

здесь $z = re^{i\varphi}$, n – целое и ν – положительное число, $b(z)$ – непрерывна в G , $b(0) \neq 0$ и $|b(z) - b(0)| < M|z|^{6\nu+\varepsilon}$, где M и ε – положительные постоянные.

А. Тунгатаров основы теории уравнения (1.6) для четных неотрицательных n распространил на дробные пространства Бесова [83], [84]. Отметим также работы К.Н. Оспанова, посвященные сингулярным эллиптическим системам первого порядка (см., например, [61]).

Различные вопросы, связанные с изучением уравнения (1.3), рассматривались в работах Г. Назирова [60], Н.К. Блиева [22] – [24] в предположении, что $\nu = \mu = 1$, $a(z) = a^*(z)e^{\pm i\varphi}$, $b(z) = b^*(z)e^{\pm i\varphi}$, ($\varphi = \arg z$), причем $a^*(z)$ и $b^*(z)$ а.ф. по z и $\bar{z}$ в окрестности точки $z = 0$. В [60] при $a(z) \equiv 0$ и $b^*(0) = 0$ доказано существование решения специального вида.

Эти результаты обобщены А. Мухсиновым в [54]. В работах Г.Т. Макацария (см., например, [47], [117]) для уравнения (1.3) применен метод аналитических регуляризаторов И.Н. Векуа. При условиях

$$\nu > [\mu] + 1 \text{ } ([\mu] - \text{целая числа } \mu), a(0) \neq 0, \\ |z|^{-(\nu-|\nu|+1)}(a(z) - a(0)e^{in\varphi}) \text{ и } |z|^{-(\mu-[\mu])}b(z) \in L_p(G), p > 2, n - \text{целое,}$$

исследовано поведение решений при $z \rightarrow 0$. Выявлены случаи, когда (1.3) в окрестности точки $z = 0$ не имеет ненулевых ограниченных решений.

В.С. Виноградовым в [31] изучено уравнение (1.1) при $A(z) = a = \text{const}$ и $B(z) = b = \text{const}$, которое путем замены независимой переменной по формуле $\zeta = \frac{1}{z}$ приводится к виду

$$\partial_{\bar{\zeta}}\omega - \frac{a}{\bar{\zeta}^2}\omega - \frac{b}{\bar{\zeta}^2}\bar{\omega} = 0.$$

В других его работах [32], [33] аналогичная задача рассматривается для $A(z)$ и $B(z)$, отличных от константы.

Как установил З.Д. Усманов «Уравнение (1.6) при $n = 0$ и $F(z) \equiv 0$ описывает бесконечно малые изгибания поверхностей положительной кривизны с изолированной точкой уплощения, в окрестности которой поверхность имеет специальную структуру» [85], [96]. Когда поверхность имеет в окрестности точки уплощения более общую структуру, коэффициент $b(z)$ остается непрерывным в $G \setminus \{0\}$, причем

$$b(z) = \lambda(\varphi) + O(|z|^v), z \rightarrow 0, \quad (1.9)$$

где $\lambda(\varphi)$ - периодическая с периодом 2π функция, разложимая в абсолютно сходящийся ряд Фурье по $\varphi = \arg z$ и v - некоторое положительное число.

Уравнение (1.6) с коэффициентом $b(z)$, обладающим указанным свойством было изучено Р. Ахмедовым [6], [7], [11]:

$$\partial_{\bar{z}} w - \frac{\lambda e^{in\varphi + b(z)}}{2\bar{z}} \bar{w} = \frac{F(z)}{2\bar{z}}, z \in G, \quad (1.10)$$

где $z = re^{i\varphi}$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, n - целое, $w(z)$ - искомая, $b(z)$ и $F(z)$ - заданные функции. В работах [8] - [10], [104] - [106] изучены ряд других классов систем с сингулярными коэффициентами.

В ряде работ Н. Раджабова и его учеников (см., например, [65], [72], [100] - [103]), а также других авторов (см. [18], [41], [75], [109], [112], [116]) проводились исследования с другими уравнениями и системами эллиптического, гиперболического и смешанного типов, переопределенных систем уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами, о.д.у. и систем, имеющие точечные особенности в коэффициентах. Для таких уравнений изучены задачи Коши, задача линейного сопряжения, задача о полиномиальных решениях и др.

Большое количество исследований проведено С.А. Исмоковым и его учениками по вырождающимся уравнениям с частными производными и дифференциальным операторам (см., например, [42]).

1.2. Обзор об исследованиях по уравнениям математической физики с сингулярными линиями

Дальнейшим развитием теории по уравнениям математической физики с точечными сингулярностями является изучение уравнений, коэффициенты которых обращаются в бесконечность на некоторых линиях, поверхностях и других множествах.

В ряде работ Н. Раджабова и его учеников построены интегральные представления решений и их обращения для обобщенной системы Коши-Римана с сингулярной линией, проводились исследования с другими уравнениями и системами эллиптического, гиперболического и смешанного типов (см., например, [65], [68], [73], [114], [119], [122]). Для таких уравнений изучены задачи Коши, задача линейного сопряжения и др. В работах Н. Раджабова и А.Б. Расулова [69], [70] для системы Бицадзе со сверхсингулярной точкой и окружностью исследованы ряд граничных задач.

Большое количество работ посвящено интегральным уравнениям с особенностями в коэффициентах и (или) в ядре, которые имеют тесную связь с дифференциальными уравнениями и системами таких уравнений, имеющие особенности. Прежде всего укажем монографии И.И. Мусхелишвили [52], Н.П. Векуа [30], С.Г. Михлина [51], Л.Г. Михайлова [50], А. Джураева [38], Н. Раджабова [67], Г.С. Литвинчука [46], см. также [62], [97]. В цикле работ Н. Раджабова, Л.Н. Раджабовой, их учеников и последователей проводились исследования по интегральным уравнениям типа Вольтерра с сингулярными многообразиями – множество граничных и внутренних особых точек и некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с особенностями в ядре (см., например, [39], [40], [66], [71], [74], [115], [118], [119], [120], [121], [123], [124]). В этих работах уравнения рассматривались в различных функциональных пространствах, изучались проблемы разрешимости, формулы представления решений и применения в задачах, касающихся сингулярных дифференциальных уравнений.

В ряде работ А. Сатторова и его учеников (см., например, [76] – [78]) исследованы вырождающиеся дифференциальные уравнения первого рода вида Гельмгольца на плоскости и в пространстве; найдены решения задач типов Коши.

А. Мухсинов в своих работах получил формулы представления решений некоторых классов многомерных вырождающихся (сингулярных) уравнений в частных производных эллиптического типа и решения разнообразных граничных задач (см., например, [55] – [57]). Рассматриваемые им уравнения имеют сингулярные коэффициенты на линиях, плоскостях и других многообразиях, причем некоторые уравнения на указанных многообразиях меняют тип или вырождаются.

Отметим, что в [19], [21], [79] изучены вопросы о представлении решений те или иного характера, единственности решения краевых задач для вырождающихся уравнений с частными производными, а в [81] задача построения нормально-регулярных и конечных решений вырожденных гипергеометрических систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Несмотря на огромное количество работ, посвященных дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами, имеются не изученные уравнения или задачи. В числе таких уравнений входят о.с.к.р. вида (0.1) и многомерные о.с.к.р. вида (0.2), исследованию которых посвящается настоящая диссертационная работа.

ГЛАВА 2

ПОСТРОЕНИЕ ОСНОВНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В этой главе устанавливается связь о.с.к.р. с интегральным уравнением; приводятся результаты, опубликованные в работах [1-А], [2-А], [8-А].

2.1. Построение общего решения модельной системы

В этом параграфе будет предложена схема нахождения решений о.с.к.р. вида

$$\partial_{\bar{z}}\Psi - \frac{\alpha}{2\bar{z}}\Psi - \frac{\lambda}{2\bar{z}}\bar{\Psi} = f(z), \quad z \in G, \quad (2.1)$$

где $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \neq 0$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ – постоянные, $\Psi(z)$ – неизвестная, а $f(z)$ – заданная в круге $G = \{z: |z| < R\}$ функции.

Как известно общее решение о.с.к.р. (2.1) можно записать в виде суммы

$$\Psi(z) = \Phi(z) + S_G f, \quad z \in G, \quad (2.2)$$

общего решения однородной о.с.к.р.

$$\partial_{\bar{z}}\Phi - \frac{\alpha}{2\bar{z}}\Phi - \frac{\lambda}{2\bar{z}}\bar{\Phi} = 0, \quad z \in G, \quad (2.3)$$

и частного решения неоднородной о.с.к.р. (2.1).

Будем находить общее решение о.с.к.р., записанную в полярных координатах:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} - \frac{\alpha}{r}\Psi - \frac{\lambda}{r}\bar{\Psi} = 0, \quad (2.4)$$

в виде ряда

$$\Psi(z) = \sum_k \Psi_k(r) e^{ik\varphi} \quad (2.5)$$

Подставляя в уравнение (2.4) после несложных процедур для функций $\Psi_k(r)$ и $\bar{\Psi}_k(r)$ получаем систему о.д.у.:

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_k}{dr} - (k + \alpha)\Psi_k - \lambda\bar{\Psi}_{-k} &= 0, \\ \frac{d\bar{\Psi}_k}{dr} + (k - \bar{\alpha})\bar{\Psi}_k - \bar{\lambda}\Psi_k &= 0.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Из теории систем о.д.у. известно, что общее решение системы (2.6) следует искать в виде

$$\begin{aligned}\Psi_k(r) &= r^{\chi_{1k}}(A_{1k}\cos(\chi_{2k}\ln r) + A_{2k}\sin(\chi_{2k}\ln r)), \\ \bar{\Psi}_{-k}(r) &= r^{\chi_{1k}}(B_{1k}\cos(\chi_{2k}\ln r) + B_{2k}\sin(\chi_{2k}\ln r)),\end{aligned}\tag{2.7}$$

где $\chi_{1k} + i\chi_{2k} = \chi_k$ и $A_{1k}, A_{2k}, B_{1k}, B_{2k}$ — произвольные комплексные числа. Подставляя (2.7) в систему (2.6), после выполнения несложных вычислений, получим следующую однородную с.л.а.у. для определения коэффициентов $A_{1k}, A_{2k}, B_{1k}, B_{2k}$:

$$\begin{aligned}(\chi_{1k} - k - \alpha)A_{1k} + \chi_{2k}A_{2k} - \lambda B_{1k} &= 0, \\ \chi_{2k}A_{1k} - (\chi_{1k} - k - \alpha)A_{2k} + \lambda B_{2k} &= 0, \\ (\chi_{1k} + k - \bar{\alpha})B_{1k} + \chi_{2k}B_{2k} - \bar{\lambda}A_{1k} &= 0, \\ \chi_{2k}B_{1k} - (\chi_{1k} + k - \bar{\alpha})B_{2k} + \bar{\lambda}A_{2k} &= 0.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Далее изложим наши результаты из [2-A]: «Для определения χ получим характеристическое уравнение

$$\chi^2 - 2\alpha_1\chi - k^2 - 2i\alpha_2k + |\alpha|^2 - |\lambda|^2 = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$\chi_1 = \alpha_1 + \sqrt{k^2 + |\lambda|^2 - \alpha_2^2 + 2i\alpha_2 k}, \quad \chi_2 = \alpha_1 - \sqrt{k^2 + |\lambda|^2 - \alpha_2^2 + 2i\alpha_2 k}.$$

Пусть

$$\mu_k = \mu_{1k} + i\mu_{2k} = \sqrt{k^2 + |\lambda|^2 - \alpha_2^2 + 2i\alpha_2 k}.$$

Отсюда имеем два значения μ :

$$\begin{aligned} \mu_{1k} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{(k^2 + |\lambda|^2 - \alpha_2^2)^2 + 4\alpha_2^2 k^2} + (k^2 + |\lambda|^2 - \alpha_2^2) \right)}, \\ \mu_{2k} &= (\operatorname{sgn} \alpha_2) \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{(k^2 + |\lambda|^2 - \alpha_2^2)^2 + 4\alpha_2^2 k^2} - (k^2 + |\lambda|^2 - \alpha_2^2) \right)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Следовательно, имеем две характеристические числа:

$$\chi_1 = \alpha_1 + \mu_{1k} + i\mu_{2k}, \quad \chi_2 = \alpha_1 - \mu_{1k} - i\mu_{2k},$$

где μ_{1k} и μ_{2k} даются формулами (2.9)» [2-A].

Для первого характеристического значения $\chi_1 = \alpha_1 + \mu_{1k} + i\mu_{2k}$ получим $\chi_{1k} = \alpha_1 + \mu_{1k}$ и $\chi_{2k} = \mu_{2k}$. Тогда из с.л.а.у. (2.8), находим:

$$A_{1k} = \lambda a_k, \quad A_{2k} = i\lambda a_k, \quad B_{1k} = P_{1k} a_k, \quad B_{2k} = iP_{1k} a_k,$$

где $P_{1k} = (\mu_{1k} - k) + i(\mu_{2k} - \alpha_2)$ и a_k — произвольные комплексные постоянные. Подставляя найденные значения $A_{1k}, A_{2k}, B_{1k}, B_{2k}, \chi_{1k}, \chi_{2k}$ в (2.7), получим:

$$\Psi_{k1}(r) = \lambda a_k g_k(r) r^{\alpha_1 + \mu_{1k}}, \quad \bar{\Psi}_{k1}(r) = P_{1k} a_k g_k(r) r^{\alpha_1 + \mu_{1k}},$$

где

$$g_k(r) = \cos(\mu_{2k} \ln r) + i \sin(\mu_{2k} \ln r).$$

Для второго характеристического значения $\chi_2 = \alpha_1 - \mu_{1k} - i\mu_{2k}$ получим $\chi_{1k} = \alpha_1 - \mu_{1k}$ и $\chi_{2k} = -\mu_{2k}$. Аналогично как выше, будем иметь:

$$\begin{aligned} \Psi_{k2}(r) &= \lambda b_k \bar{g}_k(r) r^{\alpha_1 - \mu_{1k}}, \\ \Psi_{k2}(r) &= -P_{2k} b_k \bar{g}_k(r) r^{\alpha_1 - \mu_{1k}}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $P_{2k} = (\mu_{1k} + k) + i(\mu_{2k} + \alpha_2)$ и b_k — произвольные комплексные числа.

Следовательно, общее решение о.с.к.р. (2.6) даются формулами

$$\begin{aligned} \Psi_k(r) &= \lambda a_k g_k(r) r^{\alpha_1 + \mu_{1k}} + b_k \bar{g}_k(r) r^{\alpha_1 - \mu_{1k}}, \\ \Psi_{-k}(r) &= P_{1k} a_k g_k(r) r^{\alpha_1 + \mu_{1k}} - P_{2k} b_k \bar{g}_k(r) r^{\alpha_1 - \mu_{1k}}, \end{aligned} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.11)$$

В случае, когда $k = 0$ из (2.6) получим уравнение

$$r \frac{d\Psi_0}{dr} - \alpha \Psi_0 - \lambda \bar{\Psi}_0 = 0. \quad (2.12)$$

Подыскав решение однородной системы (2.12) в виде

$$\Psi_0(r) = r^{\chi_{10}} (A_{10} \cos(\chi_{20} \ln r) + A_{20} \sin(\chi_{20} \ln r)), \quad (2.13)$$

приходим к трём случаям:

1) когда $|\lambda|^2 > \alpha_2^2$; 2) когда $|\lambda|^2 < \alpha_2^2$; 3) когда $|\lambda|^2 = \alpha_2^2$.

В первом случае, когда $|\lambda|^2 > \alpha_2^2$ получим $\chi_{20} = 0$ и две вещественные значения $\chi_{10} = \alpha_1 + \mu_{10}$ и $\chi_{10} = \alpha_1 - \mu_{10}$, где $\mu_{10} = \sqrt{|\lambda|^2 - |\alpha_2|^2}$ и, соответственно, два решения однородного уравнения (2.12):

$$\begin{aligned}\Psi_{01}(r) &= i(\lambda - P_{20})a_0 r^{\alpha_1 + \mu_{10}}, \\ \Psi_{02}(r) &= i(\lambda + P_{10})b_0 r^{\alpha_1 - \mu_{10}},\end{aligned}\tag{2.14}$$

где a_0, b_0 - произвольные вещественные числа.

Во втором случае, когда $|\lambda|^2 < \alpha_2^2$ будем иметь $\chi_{10} = 0$ и $\chi_{20} = \pm\mu_0$, где $\mu_{10} = \sqrt{|\lambda|^2 - |\alpha_2|^2}$. Далее, подставляя две пары чисел ($\chi_{10} = 0, \chi_{20} = \mu_0$) и ($\chi_{10} = 0, \chi_{20} = -\mu_0$) по отдельности в формулу (2.13), для $\Psi_0(r)$ получим еще два решения:

$$\begin{aligned}\Psi_{01}(r) &= [(\alpha_2 + i\lambda)\cos(\mu_0 \ln r) + i\mu_0 \sin(\mu_0 \ln r)]a_0, \\ \Psi_{02}(r) &= [-i\mu_0 \cos(\mu_0 \ln r) + (\alpha_2 + i\lambda)\sin(\mu_0 \ln r)]b_0,\end{aligned}\tag{2.15}$$

где a_0, b_0 - вещественные числа.

В случае, когда $|\lambda|^2 = \alpha_2^2$ будем иметь $\chi_1 = \chi_2$ кратные

$$\Psi_{01}(r) = ia_0 + (\alpha_2 + i\lambda)a_0 \ln r.\tag{2.16}$$

Таким образом, формулами (2.11), (2.14) – (2.16) мы определили все функции $\Psi_k(r), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Подставляя их в ряд (2.5) имеем в круге $G = \{z: |z| < R\}$ общее решение о.с.к.р. (2.4):

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \Psi_{01}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k g_k(r) e^{ik\varphi} + \overline{P_{1k}} \bar{a}_k \bar{g}_k(r) e^{-ik\varphi}) r^{\alpha_1 + \mu_{1k}} +, \\ &+ \Psi_{02}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda b_k \bar{g}_k(r) e^{ik\varphi} - \overline{P_{2k}} \bar{b}_k g_k(r) e^{-ik\varphi}) r^{\alpha_1 - \mu_{1k}},\end{aligned}\tag{2.17}$$

где $\Psi_{01}(r), \Psi_{02}(r)$ даются формулами (2.14) в случае $|\lambda|^2 > \alpha_2^2$, формулами (2.15) в случае $|\lambda|^2 < \alpha_2^2$ и формулами (2.16) в случае $|\lambda|^2 = \alpha_2^2$.

Пусть $\zeta = Re^{i\gamma}$ точка окружности $\Gamma = \{\zeta: |\zeta| = R\}$. Рассматривая (2.17) при $z = \zeta \in \Gamma$, умножая обе части (2.17) на $e^{-ik\gamma}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и интегрируя по Γ получим систему относительно a_k, b_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, из которой находим:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{R^{\alpha_1 - \mu_{10}}}{Im[(\lambda - P_{20})(\bar{\lambda} + \overline{P_{10}})]} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}[(\bar{\lambda} + \overline{P_{10}})\Psi(R, \gamma)d\gamma], \\
b_0 &= \frac{R^{\alpha_1 + \mu_{10}}}{Im[(\lambda - P_{20})(\bar{\lambda} + \overline{P_{10}})]} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}[(\bar{\lambda} - \overline{P_{20}})\Psi(R, \gamma)d\gamma], \\
a_k &= \frac{\overline{g_k}(R)R^{\alpha_1 - \mu_{1k}}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{P_{2k}\Psi(R, \gamma) + \lambda\bar{\Psi}(R, \gamma)}{\lambda\mu_k} \right] \cdot e^{-ik\gamma} d\gamma, \\
b_k &= \frac{g_k(R)R^{\alpha_1 + \mu_{1k}}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{P_{1k}\Psi(R, \gamma) - \lambda\bar{\Psi}(R, \gamma)}{\lambda\mu_k} \right] \cdot e^{-ik\gamma} d\gamma.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Решение однородного уравнения соответствующего (2.1), принадлежащее классу $C^1(G_0)$ представляется в виде ряда

$$\begin{aligned}
\Psi(z) &= i(\lambda + P_{10})b_0r^{\alpha_1 - \mu_{10}} + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda b_k \bar{g}_k(r)e^{ik\varphi} - \overline{P_{2k}} \bar{b}_k g_k(r)e^{-ik\varphi})r^{\alpha_1 - \mu_{1k}} + \\
&+ i(\lambda - P_{20})a_0r^{\alpha_1 + \mu_{10}} + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k g_k(r)e^{ik\varphi} + \overline{P_{1k}} \bar{a}_k \bar{g}_k(r)e^{-ik\varphi})r^{\alpha_1 + \mu_{1k}}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Подставляя в (2.19) выражения a_k, b_k из (2.18) и группируя будем иметь:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Omega_1(z, \zeta)}{\zeta} \Psi(\zeta) d\zeta - \frac{\Omega_2(z, \zeta)}{\zeta} \bar{\Psi}(\zeta) d\bar{\zeta}, \quad z \in G, \tag{2.20}$$

где

$$\Omega_1(z, \zeta) = \begin{cases} \frac{P_{20}}{2\mu_{10}} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1+\mu_{10}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{P_{2k} e^{ik(\varphi-\gamma)}}{2\mu_k} g\left(\frac{r}{\rho}\right) + \frac{\overline{P_{1k}} e^{-ik(\varphi-\gamma)}}{2\overline{\mu_k}} \bar{g}\left(\frac{r}{\rho}\right) \right] \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}}, & r < \rho \\ -\frac{P_{10}}{2\mu_{10}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha_1+\mu_{10}} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{P_{1k} e^{ik(\varphi-\gamma)}}{2\mu_k} \bar{g}\left(\frac{r}{\rho}\right) + \frac{\overline{P_{2k}} e^{-ik(\varphi-\gamma)}}{2\overline{\mu_k}} g\left(\frac{r}{\rho}\right) \right] \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}}, & r > \rho \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\Omega_2(z, \zeta) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\mu_{10}} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1+\mu_{10}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda e^{ik(\varphi-\gamma)}}{2\mu_k} g\left(\frac{r}{\rho}\right) + \frac{\lambda e^{-ik(\varphi-\gamma)}}{2\overline{\mu_k}} \bar{g}\left(\frac{r}{\rho}\right) \right] \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}}, & r < \rho \\ \frac{\lambda}{2\mu_{10}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha_1+\mu_{10}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda e^{ik(\varphi-\gamma)}}{2\mu_k} \bar{g}\left(\frac{r}{\rho}\right) + \frac{\lambda e^{-ik(\varphi-\gamma)}}{2\overline{\mu_k}} g\left(\frac{r}{\rho}\right) \right] \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}}, & r > \rho \end{cases}$$

где $\mu_0 = \sqrt{\alpha_2^2 - |\lambda|^2}$, $\mu_k = \mu_{1k} + i\mu_{2k}$, μ_{1k}, μ_{2k} определяются формулами (2.9),

$$g_k(r) = \cos(\mu_{2k} \ln r) + i \sin(\mu_{2k} \ln r), P_{10} = \mu_0 + i\alpha_2, P_{20} = \mu_0 - i\alpha_2 \quad (2.22)$$

$$P_{1k} = (\mu_{1k} - k) + i(\mu_{2k} - \alpha_2), P_{2k} = (\mu_{1k} + k) + i(\mu_{2k} + \alpha_2).$$

2.2. Исследование функций Ω_1 и Ω_2

Пусть $z = x + iy = re^{i\varphi}$ и $\zeta = \varsigma + i\eta = \rho e^{i\gamma}$. Из формулы (2.21) видно, что точки $z = \zeta = 0$ и $z = \zeta = \infty$ не входят в область определения функций $\Omega_1(z, \zeta)$ и $\Omega_2(z, \zeta)$. Кроме того, детальному анализу необходимо подвергнуть при $|z| = |\zeta|$, поскольку на этом множестве в каждой строке правой части (2.21) содержатся ряды, подозреваемые на расходимость. К примеру, в верхней строке ($|z| < |\zeta|$) для Ω_1 таковым является ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{2k} e^{ik(\varphi-\gamma)}}{2\mu_k} g\left(\frac{r}{\rho}\right) \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}}.$$

В связи со сказанным, в дальнейшем изучение свойств Ω_1 и Ω_2 будет происходить одновременно с выделением их главных особенностей на множестве $|z| = |\zeta|$, а точнее при $z = \zeta$.

В нашей работе [1-A] установлены некоторые утверждения, которые мы воспроизводим ниже.

«Лемма 2.1. *Для функции $\Omega_1(z, \zeta)$ при $(z, \zeta) \in E \times E$ справедливо разложение*

$$\Omega_1(z, \zeta) = \frac{\zeta}{\zeta - z} + \Omega_1^0(z, \zeta), \quad (2.23)$$

где функция $\Omega_1^0(z, \zeta)$ при ненулевом значении одной переменной непрерывна по другой переменной кроме нулевой точки. Функция $\Omega_1(z, \zeta)$ при $z = 0$ и $z = \infty$ имеет нуль порядка μ_{10} » [1-A].

«Доказательство. Вначале докажем последнее утверждение леммы для Ω_1 . Зафиксируем, например, $\zeta = \zeta_0 = \rho_0 e^{i\gamma_0}$ и перепишем Ω_1 в виде

$$\Omega_1 = \begin{cases} \left(\frac{r}{\rho_0}\right)^{\alpha_1 + \mu_{10}} \Omega_1'(z, \zeta_0), & |z| < |\zeta_0|, \\ \left(\frac{\rho_0}{r}\right)^{\alpha_1 + \mu_{10}} \Omega_1''(z, \zeta_0), & |z| > |\zeta_0|, \end{cases} \quad (2.24)$$

где согласно (2.21)

$$\begin{aligned} \Omega_1'(z, \zeta_0) &= \frac{P_{20}}{2\mu_{10}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{P_{2k} e^{ik(\varphi - \gamma_0)}}{2\mu_k} g\left(\frac{r}{\rho_0}\right) + \frac{\overline{P_{1k}} e^{-ik(\varphi - \gamma_0)}}{2\overline{\mu_k}} \bar{g}\left(\frac{r}{\rho_0}\right) \right] \left(\frac{r}{\rho_0}\right)^{\alpha_1 + \mu_{1k} - \mu_{10}}, \\ \Omega_1''(z, \zeta_0) &= -\frac{P_{10}}{2\mu_{10}} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{P_{1k} e^{ik(\varphi - \gamma_0)}}{2\mu_k} \bar{g}\left(\frac{r}{\rho_0}\right) + \frac{\overline{P_{2k}} e^{-ik(\varphi - \gamma_0)}}{2\overline{\mu_k}} g\left(\frac{r}{\rho_0}\right) \right] \left(\frac{\rho_0}{r}\right)^{\alpha_1 + \mu_{1k} - \mu_{10}}. \end{aligned}$$

С использованием обозначений $\mu_{1k}, P_{10}, P_{20}, P_{1k}, P_{2k}$ легко заметить, что функции Ω_1' и Ω_1'' непрерывны z при $z = 0$ и $z = \infty$ соответственно. Тогда из (2.24) следует, что функция Ω_1 при $z = 0$ и $z = \infty$ имеет нуль порядка μ_{10} » [9-А]

Теперь докажем непрерывность Ω_1^0 по отдельности в каждой из областей $|z| \geq |\zeta|$ и $|z| \leq |\zeta|$ и отсутствие разрыва на множестве $|z| = |\zeta|$. Воспользуемся тождеством

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^k e^{ik(\varphi-\gamma)}, & |z| < |\zeta|, \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^k e^{-ik(\varphi-\gamma)}, & |z| > |\zeta|. \end{cases}$$

С его помощью Ω_1^0 при $|z| < |\zeta|$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \Omega_1^0 = & \frac{P_{20}}{2\mu_{10}} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1+\mu_{10}} - 1 \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{P_{2k}}{2\mu_k} g \left(\frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}} - \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \right] e^{ik(\varphi-\gamma)} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{P_{1k}}}{2\mu_k} \bar{g} \left(\frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}} e^{-ik(\varphi-\gamma)} \quad \#(2.25) \end{aligned}$$

Обе суммы в этом соотношении представляют равномерно сходящиеся ряды при $|z| \leq |\zeta|$. Это следует из признака Вейерштрасса в силу неравенств

$$\begin{aligned} \left| \frac{P_{2k}}{2\mu_k} g \left(\frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}} - \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \right| & < \left| \frac{\overline{P_{1k}}}{2\mu_k} \bar{g} \left(\frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}} \right| < \frac{|\lambda|^2}{k^2}, \\ \left| \frac{\overline{P_{1k}}}{2\mu_k} \bar{g} \left(\frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}} \right| & < \frac{|\lambda|^2}{k^2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Здесь мы воспользовались обозначениями (2.8) и соотношениями

$$P_{1k} \cdot P_{2k} = |\lambda|^2, \alpha_1 + \mu_k > k.$$

Теперь непрерывность Ω_1^0 в области $|z| \leq |\zeta|$ является очевидным следствием равномерной сходимости упомянутых рядов, все члены которых при $\zeta \neq 0$ непрерывны по паре переменных z, ζ в области $|z| \leq |\zeta|$.

Совершенно аналогичным образом доказывается непрерывность Ω_1^0 при $|z| \geq |\zeta|$, при этом мы должны основываться на равенстве

$$\begin{aligned} \Omega_1^0 = & -\frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\mu_{10}} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{P_{1k}}{2\mu_k} g\left(\frac{\rho}{r}\right) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha_1 + \mu_{1k}} - \left(\frac{\rho}{r}\right)^k \right] e^{ik(\varphi - \gamma)} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{P_{2k}}}{2\mu_k} \bar{g}\left(\frac{\rho}{r}\right) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha_1 + \mu_{1k}} e^{-ik(\varphi - \gamma)} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Непрерывность функции Ω_1^0 на множестве $|z| = |\zeta|$ следует из того факта, что значения Ω_1^0 , взятые из формул (2.25) и (2.27), при $|z| = |\zeta|$ ($z = \rho$) совпадают.

Приведем следующее свойство функции Ω_2 .

«Лемма 2.2. Функция $\Omega_2(z, \zeta)$ при $(z, \zeta) \in E \times E$ представима в виде

$$\Omega_2(z, \zeta) = \Omega_2^0(z, \zeta) - \begin{cases} \lambda \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right|, & |z| < |\zeta|, \\ \lambda \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right|, & |z| > |\zeta|, \end{cases} \quad (2.28)$$

здесь функция Ω_2^0 непрерывна по z и ζ всюду, за исключением точек $z = \zeta = 0$ и $z = \zeta = \infty$. Для фиксированного $\zeta \neq 0, \infty$ (или $z \neq 0, \infty$) функция Ω_2 при $z = 0$ и $z = \infty$ (при $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$) имеет нуль порядка μ_{10} .

Последнее утверждение доказывается также, как это сделано в лемме 2.1, поэтому остановимся на доказательстве непрерывности Ω_2^0 .

В области $|z| < |\zeta|$ функция Ω_2^0 с учётом тождества

$$\ln \frac{|\zeta|}{|\zeta - z|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} g\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{r}{\rho}\right)^k, \quad |z| < |\zeta|,$$

определяется равенством

$$\begin{aligned} \Omega_2^0 = & \frac{\lambda}{2\mu_{10}} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1 + \mu_{10}} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \left[\frac{1}{2\mu_k} g\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1 + \mu_{1k}} - \frac{1}{k} \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \right] e^{ik(\varphi - \gamma)} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{2\bar{\mu}_k} \bar{g}\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1 + \mu_{1k}} e^{-ik(\varphi - \gamma)} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Все слагаемые правой части непрерывны по z и ζ в области $|z| \leq |\zeta|$. В этой же области рассматриваемый ряд сходится равномерно, ибо

$$\left| \frac{1}{2\mu_k} g\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\mu_{1k}} - \frac{1}{k} \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \right| < \frac{1}{k} - \frac{1}{2\mu_{1k}} < \frac{|\lambda|^2}{k^3}.$$

В силу этого Ω_2^0 является непрерывной функцией при $|z| \leq |\zeta|$.

Аналогичным образом доказывается непрерывность Ω_2^0 в области $|z| \geq |\zeta|$ при этом мы отправляемся от тождества

$$\ln \frac{|\zeta|}{|\zeta - z|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} g\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{\rho}{r}\right)^k, \quad |z| > |\zeta|,$$

и определяем Ω_2^0 по равенству

$$\begin{aligned} \Omega_2^0 = & \frac{\lambda}{2\mu_{10}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha_1 + \mu_{10}} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \left[\frac{1}{2\mu_k} \bar{g}\left(\frac{r}{\rho}\right) \right] \left(\frac{\rho}{r}\right)^{-\alpha_1 + \mu_{1k}} e^{ik(\varphi - \gamma)} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \left[\frac{1}{2\bar{\mu}_k} g\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{-\alpha_1 + \mu_{1k}} - \frac{1}{k} \left(\frac{\rho}{r}\right)^k \right] e^{-ik(\varphi - \gamma)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

При переходе из области $|z| < |\zeta|$ в область $|z| > |\zeta|$ функция Ω_2^0 не претерпевает разрыва, поскольку значения Ω_2^0 , взятые из формул (2.29) и (2.30), при $|z| = |\zeta|$ совпадают» [1-А].

Пусть $\chi(\alpha, |\lambda|) = |\alpha - \mu_s|$. Справедлива следующая

Лемма 2.3. Если $0 < \beta < \min(1, \chi)$, то справедливы неравенства

$$\frac{1}{\pi} \iint_G |\Omega_1^0(z, \varsigma, \nu)| \frac{|z|^\beta}{|\varsigma|^{2+\beta}} d\xi d\eta < 2M_1, \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{\pi} \iint_G |\Omega_2^0(z, \varsigma, \nu)| \frac{|z|^\beta}{|\varsigma|^{2+\beta}} d\xi d\eta < 2M_2, \quad (2.32)$$

здесь постоянные M_1 и M_2 зависят только от $|\lambda|$, причем M_1 и $M_2 \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow 0$.

Доказательство. Неравенства (2.31) и (2.32) доказываются аналогично. Поэтому ограничимся доказательством одного из них, например, (2.32).

Учитывая, что Ω_2 имеет различные аналитические выражения при $|z| < |\varsigma|$ и $|z| > |\varsigma|$, используя свойство адитивности интеграла [45], получим:

$$\frac{1}{\pi} \iint_G |\Omega_2| \frac{|z|^\beta}{|\varsigma|^{2+\beta}} d\xi d\eta \leq \frac{1}{\pi} \iint_{0 \leq |\varsigma| \leq |z|} |\Omega_2| \frac{|z|^\beta}{|\varsigma|^{2+\beta}} d\xi d\eta + \frac{1}{\pi} \iint_{|z| \leq |\varsigma| \leq R} |\Omega_2| \frac{|z|^\beta}{|\varsigma|^{2+\beta}} d\xi d\eta$$

Подставляя сюда выражение для Ω_2 будем иметь:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \iint_{0 \leq \rho \leq r} |\Omega_2| \frac{|z|^\beta}{|\varsigma|^{2+\beta}} d\xi d\eta + \frac{1}{\pi} \iint_{r \leq \rho \leq R} |\Omega_2| \frac{|z|^\beta}{|\varsigma|^{2+\beta}} d\xi d\eta \leq \\ & \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^r \sum_{k=s}^{\infty} \left| \frac{\lambda e^{ik(\varphi-\gamma)} + \lambda e^{-ik(\varphi-\gamma)}}{2\mu_k} \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1 - \mu_{1k}} \right| \frac{r^\beta}{\rho^{1+\beta}} d\rho + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^r \left[- \sum_{k=0}^{s-1} \left| \frac{\lambda e^{ik(\varphi-\gamma)} + \lambda e^{-ik(\varphi-\gamma)}}{2\mu_k} \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1-\mu_{1k}} \right| \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\lambda e^{ik(\varphi-\gamma)} + \lambda e^{-ik(\varphi-\gamma)}}{2\mu_k} \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1-\mu_{1k}} \right| \right] \frac{r^\beta}{\rho^{1+\beta}} d\rho \leq \\
& \leq 2 \sum_{k=s}^{\infty} \frac{|\lambda|}{\mu_k} r^{\alpha_1-\mu_{1k}+\beta} \int_0^r \frac{d\rho}{\rho^{\alpha_1-\mu_{1k}+1+\beta}} - 2 \sum_{k=0}^{s-1} \frac{|\lambda|}{\mu_k} r^{\alpha_1-\mu_{1k}+\beta} \int_r^R \frac{d\rho}{\rho^{\alpha_1-\mu_{1k}+1+\beta}} - \\
& \quad - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda|}{\mu_k} r^{\alpha_1+\mu_{1k}+\beta} \int_r^R \frac{d\rho}{\rho^{\alpha_1-\mu_{1k}+1+\beta}} = 2|\lambda| \left\{ \sum_{k=s}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \cdot \frac{1}{-\alpha_1 + \mu_{1k} - \beta} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{\mu_k} \cdot \left(\frac{1}{-\alpha_1 + \mu_{1k} - \beta} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1-\mu_{1k}+\beta} - \frac{1}{-\alpha_1 + \mu_{1k} - \beta} \right) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=0}^{s-1} \left(\frac{1}{\mu_k \cdot (-\alpha_1 + \mu_{1k} - \beta)} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1-\mu_{1k}+\beta} - \frac{1}{\mu_k \cdot (-\alpha_1 + \mu_{1k} - \beta)} \right) \right\} = 2M_2
\end{aligned}$$

Это подтверждает справедливость неравенства (2.32).

Лемма 2.4. Для ядер Ω_1 и Ω_2 справедливы равенства

$$\partial_{\bar{z}}\Omega_1 = \frac{\alpha}{2\bar{z}}\Omega_1 + \frac{\lambda}{2\bar{z}}\bar{\Omega}_2, \quad \partial_{\bar{z}}\Omega_2 = \frac{\alpha}{2\bar{z}}\Omega_2 + \frac{\lambda}{2\bar{z}}\bar{\Omega}_1, \quad (2.33)$$

$$\partial_{\bar{\zeta}}\Omega_1 = \frac{\alpha}{2\bar{\zeta}}\Omega_1 - \frac{\bar{\lambda}}{2\bar{\zeta}}\Omega_2, \quad \partial_{\bar{\zeta}}\Omega_2 = \frac{\alpha}{2\bar{\zeta}}\Omega_2 - \frac{\lambda}{2\bar{\zeta}}\Omega_1.$$

Справедливость этих равенств следует из (2.21) путем дифференцирования.

В силу равенства (2.23), первое уравнение (2.33) может быть записано так

$$\partial_{\bar{z}}\Omega_1^0 = \frac{i\alpha}{2\bar{z}}\Omega_1 + \frac{\lambda}{2\bar{z}}\bar{\Omega}_2.$$

Также справедливы равенства

$$\iint_G \left[\Omega_1^0 \partial_{\bar{z}} \Psi + \left(\frac{\alpha}{2\bar{z}} \Omega_1 + \frac{\lambda}{2\bar{z}} \overline{\Omega_2} \right) \cdot \Psi \right] dx dy = 0,$$

$$\iint_G \left[\Omega_2^0 \partial_{\bar{z}} \Psi + \left(\frac{\alpha}{2\bar{z}} \Omega_1 + \frac{\lambda}{2\bar{z}} \overline{\Omega_2} \right) \cdot \Psi \right] dx dy = 0,$$

$\forall \Psi(z) \in D_1^0$, которые следуют непосредственно из определения обобщенной производной по $\bar{z}$ в смысле Соболева С.Л.

2.3. Свойства основного оператора

В настоящем параграфе объектом исследования является интегральный оператор вида

$$S_G f = -\frac{1}{\pi} \iint_G \left\{ \frac{\Omega_1(z, \zeta)}{\zeta} f(\zeta) + \frac{\Omega_2(z, \zeta)}{\bar{\zeta}} \overline{f(\zeta)} \right\} d\xi d\eta, \quad (2.34)$$

выполняющий основную роль в разворачивании теории решений рассматриваемой нами о.с.к.р. с сингулярной точкой.

Оператор S_G построен З.Д. Усмановым [94]. Им установлено, что S_G вполне непрерывен из $L_p(G), p > 2$ в $C(G)$ и допускает в $G \setminus \{0\}$ непрерывную производную по $\bar{z}$. Свойства этого оператора в классах О.В. Бесова изучены в работе Н.К. Блиева, А. Тунгатарова [25].

В данном параграфе свойства S_G устанавливаются в классе $C_{0,\beta}(G)$ функций, допускающих слабую особенность в точке $z = 0$. Отметим, что для получения соответствующих результатов, Ω_1 и Ω_2 представляются несколько в ином виде в сравнении с [94].

Оператор S_G можно записать двумя способами:

Первый способ

$$S_G f = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta + S_G^0 f, \quad (2.35)$$

$$S_G^0 f = -\frac{1}{\pi} \iint_G \left\{ \frac{\Omega_1^0(z, \zeta)}{\zeta} f(\zeta) + \frac{\Omega_2^0(z, \zeta)}{\bar{\zeta}} \overline{f(\zeta)} \right\} d\xi d\eta \quad (2.36)$$

следует из (2.33), с учетом (2.24).

Второй способ:

$$\begin{aligned} S_G f = & -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\xi d\eta - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{1}{\bar{\zeta}} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} \overline{f(\zeta)} d\xi d\eta - \\ & - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{1}{\bar{\zeta}} \ln \phi(z, \zeta) \overline{f(\zeta)} d\xi d\eta + S_G^{00} f, \end{aligned}$$

где

$$S_G^{00} f = -\frac{1}{\pi} \iint_G \left\{ \frac{\Omega_1^0(z, \zeta)}{\zeta} f(\zeta) + \frac{\Omega_2^0(z, \zeta)}{\bar{\zeta}} \overline{f(\zeta)} \right\} d\xi d\eta. \quad (2.37)$$

$$\phi(z, \zeta) = \begin{cases} |\zeta|, & \text{если } |z| \leq |\zeta|, \\ |z|, & \text{если } |z| \geq |\zeta|, \end{cases}$$

выводится из (2.33), с учетом (2.27) и (2.28).

Далее по аналогии с работой [11] верны ниже приводимые утверждения.

«Лемма 2.5. Пусть $f \in L_p(\bar{G})$, $p > 2$. Тогда для $h(z) = S_G f$ выполняется неравенство

$$|h(z)| < NR^{\frac{p-2}{p}} \|f\|_{L_G}, z \in E, \quad (2.38)$$

где R — максимальное расстояние от $z = 0$ до границы G и N — константа, не зависящая от R .

Лемма 2.6. Пусть $f \in L_p(\bar{G}), p > 2$. Тогда $h(z) = S_G f$ непрерывна на всей плоскости E .

Лемма 2.7. Оператор S_G действует вполне непрерывно из $L_p(G), p > 2$ в $C(G)$.

Обозначим через $C(G - 0)$ класс функций, непрерывных в области G за исключением точки $z = 0$.

Лемма 2.8. Пусть $f \in C(G - 0) \cap L_p, p > 2$. Тогда $h(z) = S_G f$ допускает производную по $\bar{z}$, непрерывную в $G - 0$ и вне G . В области G функция $h(z)$ является решением уравнения

$$\partial_{\bar{z}} h - \frac{\lambda}{2\bar{z}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{h} d\varphi = f(z)$$

и вне области G удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar{z}} h - \frac{\lambda}{2\bar{z}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{h} d\varphi = 0.$$

Леммы 2.5 – 2.8 доказываются по схеме из [98, стр. 23-28]» [11].

2.4. Приведение общей системы к интегральному уравнению

В этом параграфе рассмотрим общее уравнение

$$\partial_{\bar{z}}\Psi - \frac{a(z)}{2\bar{z}}\Psi - \frac{b(z)}{2\bar{z}}\bar{\Psi} = F(z), \quad z \in G. \quad (2.39)$$

Пусть искомая функция, правая часть и коэффициенты удовлетворяют условиям:

$$w(z) \in C(\bar{G}) \cap C_{\bar{z}}(G - 0), F(z) \in C(G - 0) \cap L_q(\bar{G}), q > 2,$$

$$a(z), b(z) \in C(\bar{G}), a(0) \neq 0, b(0) \neq 0,$$

$$|a(z) - a(0)| < M|z|^\alpha, \alpha > 0,$$

$$|b(z) - b(0)| < M|z|^\alpha, \alpha > 0,$$

причем последние два неравенства выполняются при малых $|z|$. Уравнение (2.39) перепишем в виде

$$\partial_{\bar{z}}\Psi - \frac{a(0)}{2\bar{z}}\Psi(z) - \frac{b(0)}{2\bar{z}}\bar{\Psi}(z) = F(z) + \frac{a(z) - a(0)}{2\bar{z}}\Psi(z) + \frac{b(z) - b(0)}{2\bar{z}}\bar{\Psi}(z),$$
$$z \in G.$$

Введя обозначения

$$\alpha = a(0), \lambda = b(0), f(z) = F(z) + \frac{a(z) - a(0)}{2\bar{z}}\Psi(z) + \frac{b(z) - b(0)}{2\bar{z}}\bar{\Psi}(z),$$

приводим уравнение к виду (2.1). Легко увидеть, что $f \in C(G - 0) \cap L_p(G)$, $p = \min\left(q, \frac{2}{1-\alpha}\right)$. Поэтому в силу формулы (2.2) уравнение (2.39) будет эквивалентно интегральному уравнению для $\Psi(z)$:

$$\Psi(z) = \Phi(z) + S_G F + P_{1G} \Psi + P_{2G} \bar{\Psi}, \quad z \in G, \quad (2.40)$$

здесь

$$P_{1G} \Psi = S_G \left(\frac{a(z) - a(0)}{2\bar{z}} \Psi(z) \right), \quad P_{2G} \Psi = S_G \left(\frac{b(z) - b(0)}{2\bar{z}} \overline{\Psi(z)} \right),$$

и $\Phi(z) \in C(G) \cap C_{\bar{z}}(G \setminus 0)$ – решения уравнения (2.3).

По аналогии с работой [11] «...верна теорема

Теорема 2.1. *Интегральное уравнение (2.40) устанавливает связь между множествами непрерывных в замкнутой области G решений уравнений (2.39) и (2.40). А именно, если $\Psi(z)$ – заданное решение уравнения (2.39), то соответствующее ему решение $\Phi(z)$ уравнения (2.3) определяется единственным образом из формулы (2.40). И обратно, если для решения $\Phi(z)$ уравнения (2.3) интегральное уравнение (2.40) имеет непрерывное решение $\Psi(z)$ то оно будет удовлетворять уравнению (2.39)» [11].*

Пусть

$$P_G \Psi = P_{1G} \Psi + P_{2G} \bar{\Psi}.$$

В силу того, что функции

$$A(z) = (2\bar{z})^{-1}[a(z) - a(0)], \quad B(z) = (2\bar{z})^{-1}[b(z) - b(0)]$$

из класса $L_p(G), p > 2$, оператор P_G действует в пространстве $C(G)$ и в силу леммы 2.5 имеет место оценка

$$|P_G \Psi| < NR^{1-2/p} \left(\|A\|_{L_p(G)} + \|B\|_{L_p(G)} \right) \|\Psi\|_{C(G)}.$$

Следовательно, оператор $P_G: C(G) \rightarrow C(G)$ будет компактным и для нормы этого оператора верна оценка

$$\|P_G\| \leq NR^{1-\frac{2}{p}} \left(\|A\|_{L_p(G)} + \|B\|_{L_p(G)} \right).$$

Если область G имеет малую площадь (R мало) или нормы $\|A\|_{L_p(G)}, \|B\|_{L_p(G)}$ мали, то оператор $P_G: C(G) \rightarrow C(G)$ будет сжимающим.

При выполнении перечисленных условий интегральное уравнение (2.40) имеет единственное решение:

$$\Psi(z) = \Phi(z) + R_G \Phi + S_G F + R_G (S_G F) \quad (2.41)$$

Здесь R_G — резольвента оператора P_G .

Из (2.41) и теоремы 2.1 следует

Следствие 2.1. *Если норма оператора P_G меньше единицы, то равенство (2.41) дает биективное отображение между множествами непрерывных решений уравнений (2.39) и (2.40).*

Таким образом, для исследования общего уравнения (2.39) нужно исследовать модельное уравнение вида (2.1) и далее изучая интегральное уравнение (2.40) получить соответствующие утверждения для исходного уравнения. Этот путь будет изложен в следующей главе.

ГЛАВА 3

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

В этой главе исследуется о.с.к.р.

$$\partial_{\bar{z}}\Phi - \frac{\alpha}{2\bar{z}}\Phi - \frac{\lambda}{2\bar{z}}\bar{\Phi} = 0, \quad z \in G, \quad (3.0)$$

где α, λ – ненулевые комплексные числа, $G = \{z: |z| < R\}$, а также сопряженная к ней система и изучается поведение решений основной системы (0.1) в окрестности сингулярной точки.

Результаты этой главы опубликованы в работах [3-А], [4-А], [9-А] – [14-А].

3.1. Основные ядра и элементарные решения сопряжённого уравнения

Для модельной о.с.к.р. сопряжённым будет уравнение

$$\partial_{\bar{z}}\Phi^* + \frac{\alpha}{2\bar{z}}\Phi^* + \frac{\bar{\lambda}}{2z}\bar{\Phi}^* = 0, \quad z \in G. \quad (3.1)$$

В настоящем параграфе по схеме, описанной в монографиях И.Н. Векуа [28] и З.Д. Усманова [98] на основе уже известных основных ядер модельного уравнения строятся основные ядра и элементарные решения уравнения (3.1) и формулируются их свойства, необходимые для дальнейшего.

3.1.1. Будем называть функции $\frac{\Omega_1^*(z, \zeta)}{\zeta}$ и $\frac{\Omega_2^*(z, \zeta)}{\zeta}$ основными ядрами уравнения (3.1) и определять их по формулам

$$\frac{\Omega_1^*(z, \zeta)}{\zeta} = -\frac{\Omega_1(z, \zeta)}{\zeta}, \quad \frac{\Omega_2^*(z, \zeta)}{\zeta} = -\frac{\overline{\Omega_2(z, \zeta)}}{\zeta}, \quad (3.2)$$

через известные функции $\Omega_1(z, \zeta)$ и $\Omega_2(z, \zeta)$, полученные в §2.2, гл. 2.

Из (2.33) гл. 2 следует

$$\partial_{\bar{z}}\Omega_1^* = \frac{\alpha}{2\bar{z}}\Omega_1^* + \frac{\bar{\lambda}}{2\bar{z}}\overline{\Omega_2^*}, \quad \partial_{\bar{z}}\Omega_2^* = \frac{\alpha}{2\bar{z}}\Omega_2^* + \frac{\lambda}{2\bar{z}}\overline{\Omega_1^*}, \quad (3.3)$$

Из лемм 2.1 и 2.2 извлекаются следующие свойства ядер:

$$\frac{1}{\zeta}\Omega_1^*(z, \zeta) = \frac{1}{\zeta - z} + \tilde{\Omega}_1^*(z, \zeta), \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{\zeta}\Omega_2^*(z, \zeta) = -\frac{\bar{\lambda}}{z} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} + \tilde{\Omega}_2^*(z, \zeta), \quad (3.4')$$

где $\tilde{\Omega}_1^*$ и $\tilde{\Omega}_2^*$ непрерывные по переменным $z, \zeta \in E$ всюду за исключением $z = 0$ и $z = \zeta = \infty$.

3.1.2. Введём в рассмотрение две новые функции $X_1^*(z, \zeta)$ и $X_2^*(z, \zeta)$ по равенствам

$$\begin{aligned} X_1^*(z, \zeta) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_1^*(z, \zeta)}{\zeta} + \frac{\Omega_2^*(z, \zeta)}{\zeta} \right), \\ X_2^*(z, \zeta) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{\Omega_1^*(z, \zeta)}{\zeta} - \frac{\Omega_2^*(z, \zeta)}{\zeta} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из (3.3) следует, что функции $X_1^*(z, \zeta)$ и $X_2^*(z, \zeta)$ удовлетворяют уравнению (3.1) и в силу (3.4), (3.4') верны равенства

$$X_1^*(z, \zeta) = \frac{1}{2(\zeta - z)} - \frac{\bar{\lambda}}{2z} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} + \tilde{X}_1^*(z, \zeta),$$

$$X_2^*(z, \zeta) = \frac{1}{2i(\zeta - z)} - \frac{\bar{\lambda}}{2z} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} + \tilde{X}_2^*(z, \zeta),$$

,

здесь $\tilde{X}_1^*(z, \zeta)$ и $\tilde{X}_2^*(z, \zeta)$ непрерывны по обеим переменным всюду, кроме точек $z = 0$ и $z = \zeta = \infty$.

Функции $X_1^*(z, \zeta)$ и $X_2^*(z, \zeta)$ являются элементарными решениями сопряженного уравнения (3.1).

3.2. Обобщённая формула Коши и обобщённый интеграл типа Коши

Фундаментальная роль при построении теории модельного уравнения принадлежит обобщённой формуле Коши. В настоящем параграфе даётся вывод этой формулы, по аналогии с работой [11]:

3.2.1. Обобщённая формула Коши. Для решений $\Phi(z)$ и $\Phi^*(z)$ о.с.к.р. (3.0) и (3.1) из класса $(G + \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G - 0)$, имеет место тождество Грина

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \Phi(z) \Phi^*(z) dz \right) = 0, \quad (3.6)$$

которое выражает свойство взаимной сопряжённости уравнений (3.0) и (3.1). Доказательство тождества (3.6) проводится аналогично как в монографии И.Н. Векуа [28].

Перейдём непосредственно к выводу обобщённой формулы Коши. Для этих целей в качестве $\Phi^*(z)$ возьмём элементарные решения $X_1^*(z, t)$ и $X_2^*(z, t)$, уравнения (3.1). Пусть для начала $t \in G$ и Γ_ε - окружность $|z - t| = \varepsilon$, достаточно малого радиуса. Используя формулу (3.6) к области с границей $\Gamma + \Gamma_\varepsilon$, получим

$$\int_{\Gamma} X_1^*(z, t) \Phi(z) dz - \overline{X_1^*(z, t) \Phi(z)} d\bar{z} = \int_{\Gamma_\varepsilon} X_1^*(z, t) \Phi(z) dz - \overline{X_1^*(z, t) \Phi(z)} d\bar{z}, \quad (k = 1, 2).$$

Отсюда в силу (3.5) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left[\frac{\Omega_1^*(z, t)}{t} \Phi(z) dz - \frac{\overline{\Omega_2^*(z, t)}}{t} \overline{\Phi(z)} d\bar{z} \right] \\ = \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[\frac{\Omega_1^*(z, t)}{t} \Phi(z) dz - \frac{\overline{\Omega_2^*(z, t)}}{t} \overline{\Phi(z)} d\bar{z} \right]. \end{aligned}$$

С учетом свойства ядер, совершая предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем:

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{\Omega_1^*(z, t)}{t} \Phi(z) dz - \frac{\overline{\Omega_2^*(z, t)}}{t} \overline{\Phi(z)} d\bar{z} \right] = -2\pi i \Phi(t).$$

Подобным образом рассматривается случай когда точка t находится вне круга G и устанавливается справедливость соотношения:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{\Omega_1^*(\zeta, z)}{z} \Phi(\zeta) d\zeta - \frac{\overline{\Omega_2^*(\zeta, z)}}{z} \overline{\Phi(\zeta)} d\bar{\zeta} \right] = \begin{cases} \Phi(z) & \text{при } z \in G, \\ \frac{\alpha}{2} \Phi(z) & \text{при } z \in \Gamma, \\ 0 & \text{при } z \notin G + \Gamma, \end{cases} \quad (3.7)$$

где α обозначает внутренний угол контура Γ в точке z и $\alpha \in (0; 2]$.

Если из (3.7) основные ядра сопряжённого уравнения выразить посредством (3.2) через основные ядра модельного уравнения, то из нашей работы [9-А] следует: «формула (3.7) принимает вид

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{\Omega_1(\zeta, z)}{z} \Phi(\zeta) d\zeta - \frac{\Omega_2(\zeta, z)}{z} \overline{\Phi(\zeta)} d\bar{\zeta} \right] = \begin{cases} \Phi(z) & \text{при } z \in G, \\ \frac{\alpha}{2} \Phi(z) & \text{при } z \in \Gamma, \\ 0 & \text{при } z \notin G + \Gamma, \end{cases} \quad (3.8)$$

Эту формулу мы будем называть обобщённой формулой Коши для модельного уравнения (3.0).

3.2.2. Обобщенный интеграл типа Коши. Пусть Γ - простой гладкий замкнутый контур, делящий плоскость E комплексного переменного на G^+ (содержит точку $z = 0$) и G^- (содержит точку $z = \infty$).

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Omega_1(z, \zeta)}{\zeta} v(\zeta) d\zeta - \frac{\Omega_2(z, \zeta)}{\zeta} \overline{v(\zeta)} d\bar{\zeta}, \quad (3.9)$$

где $\Omega_1(z, \zeta)$ и $\Omega_2(z, \zeta)$ даются формулами (2.24), (2.39) и $v(\zeta)$ - функция, удовлетворяющая на Γ условию Гёльдера. Интеграл (3.9) определяет две самостоятельные функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ соответственно в областях G^+ и G^- . В силу соотношений (2.33) каждая из них является решением уравнения (3.0), причем $\Phi^+(z) \in C^1(G_0 \cup \Gamma)$, $\Phi^-(z) \in C^1(G^- \cup \Gamma)$ и $\Phi^-(\infty) = 0$.

Формулу (3.9) будем называть обобщенным интегралом типа Коши для решения модельного уравнения (3.0)» [9-А].

Рассмотрим значение интеграла (3.9) на линии интегрирования

$$\Phi(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Omega_1(\zeta_0, \zeta)}{\zeta} v(\zeta) d\zeta - \frac{\Omega_2(\zeta_0, \zeta)}{\zeta} \overline{v(\zeta)} d\bar{\zeta}, (\zeta_0 \in \Gamma) \quad (3.10)$$

Отправляясь от свойств Ω_1, Ω_2 и плотности $v(\zeta)$ и осуществляя исследование, аналогичное тому, как это сделано для интеграла типа Коши [52, стр. 106] получим, что (3.10) существует в смысле главного значения по Коши и определяет функцию $\Phi(\zeta_0)$, удовлетворяющую на Γ условию Гёльдера с тем же показателем, что и $v(\zeta)$.

Если теперь в (3.9) положить $z \in G^+$ (или G^-) и затем перейти к пределу при $z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma$, то мы получим аналог известных формул Сохоцкого-Племеля:

$$\Phi^+(\zeta_0) = \frac{1}{2}v(\zeta_0) + \Phi(\zeta_0), \quad \Phi^-(\zeta_0) = -\frac{1}{2}v(\zeta_0) + \Phi(\zeta_0), \quad (3.11)$$

где $\Phi(\zeta_0)$ задана равенством (3.10). Отсюда получаем

$$\Phi^+(\zeta_0) - \Phi^-(\zeta_0) = v(\zeta_0), \quad \Phi^+(\zeta_0) + \Phi^-(\zeta_0) = 2\Phi(\zeta_0)$$

Рассмотрим следующий вопрос: каким условиям должна удовлетворять непрерывная функция $v(\zeta)$, заданная на Γ , для того чтобы она могла быть продолжена в область G^+ (или G^-) функцией являющейся решением уравнения (3.0).

Теорема 3.1. *Для того чтобы $v(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, была граничным значением функции $\Phi^+(z)$, $z \in G^+$, являющейся решением уравнения (3.0) из класса $C^1(G_0^+ \cup \Gamma)$, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Omega_1(z, \zeta)}{\zeta} v(\zeta) d\zeta - \frac{\Omega_2(z, \zeta)}{\zeta} \overline{v(\zeta)} d\bar{\zeta} = 0, \quad z \in G^-.$$

Теорема 3.2. *Для того чтобы $v(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, была граничным значением функции $\Phi^-(z)$, $z \in G^-$, являющейся решением уравнения (3.0) из класса $C^1(G^- \cup \Gamma)$, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Omega_1(z, \zeta)}{\zeta} v(\zeta) d\zeta - \frac{\Omega_2(z, \zeta)}{\zeta} \overline{v(\zeta)} d\bar{\zeta} = 0, \quad z \in G^+.$$

Доказательство этих теорем основано на свойствах обобщённого интеграла Коши и не представляет серьёзных трудностей.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Omega_1(\zeta_0, \zeta)}{\zeta} v(\zeta) d\zeta - \frac{\Omega_2(\zeta_0, \zeta)}{\zeta} \overline{v(\zeta)} d\bar{\zeta} = \mu(\zeta_0), \quad (3.12)$$

где Γ - гладкий замкнутый контур, ζ_0 - произвольная точка на Γ , Ω_1 и Ω_2 - функции, определенные формулами (2.33), $v(\zeta)$ - искомая и $\mu(\zeta)$ - заданная функции, удовлетворяющие на Γ условию Гёльдера.

Теорема 3.3. *Уравнение (3.12) имеет единственное решение, определяемое формулой*

$$v(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Omega_1(\zeta_0, \zeta)}{\zeta} \mu(\zeta) d\zeta - \frac{\Omega_2(\zeta_0, \zeta)}{\zeta} \overline{\mu(\zeta)} d\bar{\zeta}.$$

Доказательство этой теоремы осуществляется по той же схеме, по которой дано обращение интеграла типа Коши в случае замкнутых контуром (см. [52], стр. 138).

3.2.3. О свойствах последовательности решений. Известно [63], что равномерная сходимость последовательности аналитических функций обеспечивает аналитичность её предельной функции. Приведем наши результаты, опубликованные в [1-A]:

«С помощью (3.0) доказывается теорема.

Теорема 3.4. *Пусть $\Phi_n(z), n = 1, 2, \dots$ последовательность решений уравнения (3.0) из класса $C^1(G_0)$. Если эта последовательность сходится равномерно внутри G то предельная функция*

$$\Phi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(z)$$

также будет решением уравнения (3.0) из класса $C^1(G_0)$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что под равномерной сходимостью последовательности в G понимается равномерная сходимость в любой замкнутой ограниченной подобласти, содержащейся в G . Вполне понятно, что представляет интерес рассматривать только такие подобласти Δ , для которых $z = 0$ является внутренней точкой.

Пусть $\partial\Delta$ - граница области Δ и $\Delta \cup \partial\Delta \in G$. Тогда в силу (3.3) при любом n и для $z \in \Delta$ будем иметь

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Omega_1(z, \zeta)}{\zeta} \Phi_n(\zeta) d\zeta - \frac{\Omega_2(z, \zeta)}{\bar{\zeta}} \overline{\Phi_n(\zeta)} d\bar{\zeta}.$$

Поскольку последовательности $\frac{\Omega_1 \Psi_n}{\zeta}$ и $\frac{\Omega_2 \Psi_n}{\bar{\zeta}}$ сходятся равномерно по переменной ζ на контуре $\partial\Delta$, то переходя к пределу в обеих частях последнего равенства, получим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{\Omega_1(z, \zeta)}{\zeta} \Phi(\zeta) d\zeta - \frac{\Omega_2(z, \zeta)}{\bar{\zeta}} \overline{\Phi(\zeta)} d\bar{\zeta}. \quad (3.13)$$

Приведём и другую формулировку этого результата.

Теорема 3.5. Пусть $\Phi_n(z), n = 1, 2, \dots$ последовательность решений уравнения (3.0) из класса $C^1(G_0)$, сходящаяся равномерно на Γ . Тогда предел

$$\Phi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(z)$$

существует в G и определяет решение уравнения (3.0) из того же класса» [1-А].

3.3. Дальнейшее изучение модельной системы

Пусть K - круг $|z| < R$. Подставляя в (3.13) $\zeta = Re^{i\theta}$ и применяя обозначение $\Phi(\theta) = \Phi(Re^{i\theta})$ получим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \Omega_1(z, Re^{i\theta}) \Phi(\theta) - \Omega_2(z, Re^{i\theta}) \overline{\Phi(\theta)} \} d\theta.$$

Обратимся к явному виду ядер Ω_1 и Ω_2 , см. (2.33), гл. 2. Подставляя их выражения (которые соответствуют неравенству $|z| < |\zeta| = R$) под знак интеграла и осуществляя почленное интегрирование, будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \left(a_0 + \frac{\lambda}{|\lambda|} \bar{a}_0 \right) r^{\alpha_1 + \mu_{10}} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{P_{2k} a_k + \lambda \bar{a}_k}{2\mu_k} e^{ik\varphi} + \frac{P_{1k} a_k + \lambda \bar{a}_k}{2\mu_k} e^{-ik\varphi} \right\} r^{\alpha_1 + \mu_{1k}}. \end{aligned}$$

В дальнейшем уравнение (3.0) изучается в классе $C^1(G_0, \beta)$. При $\alpha = 0$ уравнение (3.0), т.е. уравнение

$$\partial_{\bar{z}} \Phi - \frac{\lambda}{2\bar{z}} \bar{\Phi} = 0, \quad z \in G, \quad (3.14)$$

исследовано в монографии [98]. При этом использована замена

$$\Phi(z) = r^\alpha \Psi(z), \quad (3.15)$$

здесь α - действительное, которая определяет биекцию между множествами решений о.с.к.р. (3.0) и (3.14) из классов $C^1(G_0, \beta)$ и $C^1(G_0, \alpha + \beta)$ соответственно.

Отметим, что если $\Phi(z)$ непрерывное решение о.с.к.р. (3.0), в силу эллиптичности системы и аналитичности коэффициентов по $z, \bar{z} \neq 0$, это решение будет принадлежат классу C^∞ , более точно аналитическим по $z, \bar{z} \neq 0$. Поэтому изучение решений о.с.к.р. (3.14) из класса $C^1(G_0, \beta)$ в окрестности сингулярной точки $z = 0$ является актуальным.

Случай $\alpha + \beta \geq 0$. В монографии [98] имеется формула для решения уравнения (3.14) в виде ряда Лорана в круговом кольце $0 < R_0 \leq |z| \leq R_1$, которую можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) = A_0 r^{|\lambda|} + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda A_k e^{ik\varphi} + P_{-k} \bar{A}_k e^{-ik\varphi}) r^{\alpha_1 + \mu_{1k}} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda B_k e^{ik\varphi} - P_k \bar{B}_k e^{-ik\varphi}) r^{\alpha_1 - \mu_{1k}}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

здесь

$$\mu_k = \sqrt{k^2 + |\lambda|^2}, \quad P_k = \mu_k + k, \quad P_{-k} = \mu_k - k,$$

коэффициенты A_k, B_k определяются посредством значений функции $\Phi(z)$ на $\Gamma = \{z: |z| = R\}$.

Если в (3.16) $R_0 \rightarrow 0$, то видно что есть члены, имеющие при $z = 0$ полюс порядка μ_k . Функция $\Phi(z)$ согласно (3.15) не может иметь полюс порядка выше $\alpha + \beta$, поэтому нужно взять $b_k = 0$ и $b_{-k} = 0$ для всех k , удовлетворяющих неравенству $\mu_k > \alpha + \beta$. Из этого неравенства имеем:

$$k > \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - |\lambda|^2}.$$

Поэтому каждое решение уравнения (3.0) из класса $C^1(G_0, \beta), \beta > 0$ будет иметь вид:

$$\Phi(z) = A_0 r^{\alpha_1 + |\lambda|} + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda A_k e^{ik\varphi} + P_{-k} \bar{A}_k e^{-ik\varphi}) r^{\alpha_1 + \mu_{1k}} + \delta \left(B_0 r^{\alpha_1 - |\lambda|} + \sum_{k=1}^{k_0} (\lambda B_k e^{ik\varphi} - P_k \bar{B}_k e^{-ik\varphi}) r^{\alpha_1 - \mu_{1k}} \right), \quad (3.17)$$

здесь $\delta=1$, если $\alpha + \beta \geq |\lambda|$ и $\delta = 0$, если $0 \leq \alpha + \beta \leq |\lambda|$; $k_0 = [\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - |\lambda|^2}]$.

Случай $\alpha + \beta < 0$. Из (3.17) видно, что решение $\Phi(z)$ уравнения (3.14) может иметь нуль порядка не ниже $|\alpha + \beta|$. Повторяя выше проведенное рассуждение можно получить формулу:

$$\Phi(z) = \sum_{k=k_1}^{\infty} (\lambda A_k e^{ik\varphi} + P_{-k} \bar{A}_k e^{-ik\varphi}) r^{\alpha_1 + \mu_{1k}}, \quad (3.18)$$

здесь $k_1 = 0$, если $|\alpha + \beta| < |\lambda|$; $k_1 = k_0^*$, если $\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - |\lambda|^2}$ - целое; $k_1 = k_0^* + 1$, если $\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - |\lambda|^2}$ - нецелое; $k_0 = [\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - |\lambda|^2}]$.

Формулы (3.17) и (3.18) дают общее решение уравнения (3.0) из класса $C^1(G_0, \beta)$.

Пусть $l_0 = [\sqrt{\alpha^2 - |\lambda|^2}]$ при $|\alpha| > |\lambda|$. Справедливы следующие теоремы, которые следуют из формул (3.17) и (3.18).

Теорема 3.6. Пусть α – действительное число и $\Phi(z)$ – непрерывное в G решение о.с.к.р. (3). Тогда $\Phi(0) = 0$ и порядок нуля определяется так:

$$\nu = \begin{cases} \alpha - \mu_k, k = 0, 1, \dots, l_0 \text{ и } \alpha + \mu_k, k = 0, 1, \text{ при } \alpha > |\lambda|, \\ \mu_k - |\alpha|, k = l_0 + 1, l_0 + 2, \quad \text{при } \alpha < 0 \text{ и } |\alpha| > |\lambda|, \\ \alpha + \mu_k, k = 0, 1, \dots \quad \text{при } -|\lambda| \leq \alpha \leq |\lambda|, \end{cases} \quad (3.19)$$

где $\mu_k = \sqrt{k^2 + |\lambda|^2}$.

Теорема 3.7. При любом t уравнение (3.0) разрешимо в $C^m(G)$.

Теперь выясним при каких условиях уравнение (3.0) имеет аналитические по z и $\bar{z}$ решения в области G . Определим множества:

$$\begin{aligned}\Lambda_{1kp} &= \{(\alpha, \lambda): \alpha > |\lambda|, \alpha - \sqrt{k^2 + |\lambda|^2} = k + 2p\}, k = 0, 1, \dots, l_0; p = 1, 2, \dots, \\ \Lambda_{2kp} &= \{(\alpha, \lambda): \alpha > 0, \alpha + \sqrt{k^2 + |\lambda|^2} = k + 2p\}, k = 0, 1, \dots; p = 1, 2, \dots, \\ \Lambda_{3kp} &= \{(\alpha, \lambda): \alpha < 0, \alpha - \sqrt{k^2 + |\lambda|^2} = k + 2p\}, k = l_0 + 1, \dots; p = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \bigcup_{k=0}^{l_0} \left(\bigcup_{p=1}^{\infty} \Lambda_{1kp} \right), \Lambda_2 = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\bigcup_{p=1}^{\infty} \Lambda_{2kp} \right), \\ \Lambda_3 &= \bigcup_{k=l_1}^{\infty} \left(\bigcup_{p=1}^{\infty} \Lambda_{3kp} \right), \Lambda = \bigcup_{j=1}^3 \Lambda_j.\end{aligned}$$

Справедливы следующие теоремы, которые также следуют из формул (3.17) и (3.18).

Теорема 3.8. О.с.к.р. (3.0) имеет ненулевые аналитические по z и $\bar{z}$ решения в области $G \setminus \{0\}$, в том и только том случае когда $(\alpha, \lambda) \in \Lambda$.

Теорема 3.9. Пусть $(\alpha, \lambda) \in \Lambda$ и функция $\Psi(z)$ является решением уравнения (3.0), причем $\Psi(z) \in C^m(G)$ для некоторого $m > \alpha + |\lambda|$ и $|\Psi(z)| < M, |z| = R$. Тогда справедлива оценка

$$|\Psi(z)| < \frac{MR}{R-|z|} \left(\frac{|z|}{R} \right)^{\alpha + \mu_{k_m}}, \quad z \in G,$$

где $k_m = \sqrt{(m - \alpha)^2 - |\lambda|^2}$.

Теорема 3.10. Если $(\alpha, \lambda) \notin \Lambda$, то о.с.к.р. (3.0) в классе $C^\infty(G)$ имеет только нулевое решение.

3.4. Задача Римана-Гильберта для модельной системы

В области $G = \{z: |z| < R\}$ для о.с.к.р. вида

$$\partial_{\bar{z}}\Phi - \frac{\alpha}{2\bar{z}}\Phi - \frac{\lambda}{2\bar{z}}\bar{\Phi} = 0, \quad z \in G, \quad (3.20)$$

где $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \neq 0, \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \neq 0$ - комплексные числа, рассмотрим задачу:

найти в круге G решения $\Phi(z)$ уравнения (3.20) из класса $C^1(G_0, \beta)$, удовлетворяющие на границе Γ условию

$$\operatorname{Re}[z^{-m}\Phi(z)] = h(z), z \in \Gamma. \quad (3.21)$$

Предположим, что граничная функция $h(\varphi) = h(Re^{i\varphi})$ разложима в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье

$$h(\varphi) = h_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} h_k e^{ik\varphi} + \overline{h_k} e^{-ik\varphi}, \quad (3.22)$$

где h_k – коэффициенты Фурье функции h .

При $\alpha = 0$, т.е. уравнение

$$\partial_{\bar{z}}\Phi - \frac{\lambda}{2\bar{z}}\bar{\Phi} = 0, \quad z \in G, \quad (3.23)$$

рассмотрено в работах З.Д. Усманова [88], [89].

Задача Дирихле для (3.20) когда α вещественное число полностью изучено Р. Ахмедовым в [12], им также исследована задача Дирихле для интегро-дифференциального уравнения вида

$$\partial_z \Phi - \frac{\lambda}{2\bar{z}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\Phi} d\varphi = 0, \quad z \in G \quad (3.24)$$

Для нахождения решений задачи (3.20), (3.21) используем формулу общего решения уравнения (3.20):

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & i(\bar{\lambda} - P_{20})a_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 + \mu_{10}} + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k f_k(r) e^{ik\varphi} + \overline{P_{1k}} \bar{a}_k \bar{f}_k(r) e^{-ik\varphi}) \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 + \mu_{1k}} + \\ & + i(\bar{\lambda} + P_{10})b_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 - \mu_{10}} + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda b_k \bar{f}_k(r) e^{ik\varphi} - \overline{P_{2k}} \bar{b}_k f_k(r) e^{-ik\varphi}) \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 - \mu_{1k}}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

здесь

$$\begin{aligned} \mu_{1k} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{(k^2 + |\lambda|^2 - \alpha_2^2)^2 + 4a_2^2 k^2} + (k^2 + |\lambda|^2 - \alpha_2^2) \right)}, \\ \mu_{2k} &= (sgn \alpha_2) \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{(k^2 + |\lambda|^2 - \alpha_2^2)^2 + 4a_2^2 k^2} - (k^2 + |\lambda|^2 - \alpha_2^2) \right)}, \\ P_{1k} &= (\mu_{1k} - k) + i(\mu_{2k} - \alpha_2), P_{2k} = (\mu_{1k} + k) + i(\mu_{2k} + \alpha_2), \\ f_k(r) &= \cos(\mu_{2k} \ln r) + i \sin(\mu_{2k} \ln r), P_{10} = \mu_0 + i\alpha_2, P_{20} = \mu_0 - i\alpha_2, \end{aligned}$$

и a_0, b_0 - произвольные вещественные и $a_k, b_k (k = 1, 2, \dots)$ - комплексные числа.

В (3.25) входят два ряда и каждый член этих рядов является решением уравнения (3.20), причем гладкость этих решений зависит от знака чисел $\alpha_1 - \mu_{10}$ и $\alpha_1 + \mu_{10}$.

Классу $C^1(G)$ принадлежат те члены ряда (3.25), для которых $\alpha_1 + \mu_{1k} \geq 0$ и $\alpha_1 - \mu_{1k} \geq 0$. Очевидно, что если $\alpha_1 \geq 0$ и $|\alpha| \geq |\lambda|$, то $\alpha_1 + \mu_{1k} > 0 \forall k = 0, 1, \dots$ и $\alpha_1 - \mu_{1k} \geq 0$ только для $k \leq k_0$, где $k_0 = \left\lceil \frac{\alpha_1}{|\alpha|} \sqrt{|\alpha|^2 - |\lambda|^2} \right\rceil$. Если $|\alpha| < |\lambda|$, то $\alpha_1 + \mu_{1k} \geq 0$ и $\alpha_1 - \mu_{1k} \geq 0 \forall k = 0, 1, \dots$

Отсюда получаем, что при $\alpha_1 \geq 0$ для решений о.с.к.р. (3.20) из класса $C^1(G_0)$ справедливо разложение:

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & i(\lambda - P_{20})a_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 + \mu_{10}} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k f_k(r) e^{ik\varphi} + \overline{P_{1k}} \bar{a}_k \bar{f}_k(r) e^{-ik\varphi}) \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 + \mu_{1k}} + \\ & + \delta \left[i(\lambda + P_{10})b_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 - \mu_{10}} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda b_k \bar{f}_k(r) e^{ik\varphi} - \overline{P_{2k}} \bar{b}_k f_k(r) e^{-ik\varphi}) \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 - \mu_{1k}} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Здесь $\delta = 1$, если $|\alpha| \geq |\lambda|$ и $\delta = 0$, если $|\alpha| < |\lambda|$.

Следовательно, любое решение о.с.к.р. (3.20) из класса $C^1(G_0)$ при $\alpha_1 + \mu_{1k} > 0$ представимо в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & i(\bar{\lambda} - P_{20})a_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 + \mu_{10}} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k f_k(r) e^{ik\varphi} + \overline{P_{1k}} \bar{a}_k \bar{f}_k(r) e^{-ik\varphi}) \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 + \mu_{1k}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Когда в (3.21) $m = 0$ к.з. называется задача Дирихле.

Далее по отдельности рассмотрим случаи, когда в краевом условии (3.21) $m = 0, m < 0, m > 0$.

Случай $m = 0$. В этом случае относительно разрешимости к.з. справедливы следующие утверждения.

Теорема 3.11. *О.к.з. Дирихле при $Im(\lambda - P_{20}) \neq 0$ имеет только тривиальное решение, а н.к.з. имеет решения*

$$\begin{aligned}\Phi(z) = & \frac{i(\bar{\lambda} - P_{20}) \cdot h_0}{Im(\lambda - P_{20})} \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 + \mu_{10}} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda h_k}{(\lambda + P_k)} e^{ik\varphi} + \frac{\overline{P_{1k}} \bar{h}_k}{(\lambda + \overline{P_k})} e^{-ik\varphi} \right) \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 + \mu_{1k}}\end{aligned}\quad (3.27k)$$

Теорема 3.12. *О.к.з. Дирихле при $Im(\lambda - P_{20}) = 0$ имеет одно линейно независимое решение $i(\lambda - P_{20})c_0 r^{\alpha_1 + \mu_{10}}$, где c_0 - произвольная вещественная константа. Н.к.з. имеет решение тогда и только тогда, когда $h_0 = 0$.*

Подстановка (3.26) и (3.22) в краевое условие (3.21) приводит к бесконечной с.л.а.у. относительно неизвестных a_0, a_k :

$$\begin{cases} ((\lambda - P_{20}) - (\lambda - \bar{P}_{20}))a_0 = h_0, \\ (\lambda + P_{1k})a_k = h_k, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}\quad (3.28k)$$

В начале изучим однородную краевую задачу для (3.20)-(3.21), которой соответствует бесконечная с.л.а.у.

$$\begin{cases} Im((\lambda - P_{20}))a_0 = 0, \\ (\lambda + P_{1k})a_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}\quad (3.29k)$$

Отсюда очевидно, что

а) при условии $Im(\lambda - P_{20}) = 0$ получим, что a_0 - произвольное число и о.з. имеет решения

$$\Phi^*(z) = i(\bar{\lambda} - P_{20})c_0 r^{\alpha_1 + \mu_{10}}\quad (3.30)$$

Где a_0 - произвольная вещественная константа;

б) при условии $Im(\lambda - P_{20}) \neq 0$ получим, что $a_0 = 0$ и о.з. имеет только нулевое решение.

Далее из (3.28к) при условии $Im(\lambda - P_{20}) \neq 0$, определяем значения a_0 , и a_k

$$a_0 = \frac{\lambda h_0}{Im(\lambda - P_{20})} \text{ и } a_k = \frac{h_k}{(\lambda + P_{2k})}.$$

Внося в соотношения (3.26) значения коэффициентов a_0 и a_k , мы получим решения к.з. (3.20)-(3.21) в виде ряда, сходящееся абсолютно и равномерно.

Случай $m > 0$. Подстановка (3.26) и (3.22) в (3.21) приводит к бесконечной с.л.а.у. относительно неизвестных a_0, a_k ($k = 1, 2, \dots$):

$$Re(\lambda a_m) + Re(\lambda b_m) = h_0 R^m, \quad (3.31)$$

$$\lambda a_{m+p} + \bar{\lambda} a_{m-p} + \lambda b_{m+p} + \bar{\lambda} b_{m-p} = h_p R^m, (p = 1, \dots, m-1) \quad (3.32)$$

$$\lambda a_{2m} - i(\lambda - \bar{P}_{20})a_0 + \lambda b_{2m} - i(\lambda + \bar{P}_{10})b_0 = h_m R^m, \quad (3.33)$$

$$\lambda a_{2m+k} + P_{1k}a_k + \lambda b_{2m+k} + P_{2k}b_k = h_{m+k} R^m, (k = 1, 2, \dots, k_0) \quad (3.34)$$

$$\lambda a_{2m+k} + P_{1k}a_k = h_{m+k} R^m (k = k_0 + 1, k_0 + 2, \dots). \quad (3.35)$$

Для о.к.з. (3.20)-(3.21) получим следующую бесконечную с.л.а.у.

$$Re(\lambda a_m) + Re(\lambda b_m) = 0, \quad (3.31)^0$$

$$\lambda a_{m+p} + \bar{\lambda} a_{m-p} + \lambda b_{m+p} + \bar{\lambda} b_{m-p} = 0, (p = 1, \dots, m-1) \quad (3.32)^0$$

$$\lambda a_{2m} - i(\lambda - \bar{P}_{20})a_0 + \lambda b_{2m} - i(\lambda + \bar{P}_{10})b_0 = 0, \quad (3.33)^0$$

$$\lambda a_{2m+k} + P_{1k}a_k + \lambda b_{2m+k} + P_{2k}b_k = 0, (k = 1, 2, \dots, k_0) \quad (3.34)^0$$

$$\lambda a_{2m+k} + P_{1k}a_k = 0 (k = k_0 + 1, k_0 + 2, \dots). \quad (3.35)^0$$

Из (3.31)⁰ находим $a_m = i\bar{\lambda}c_m$, $b_m = -i\bar{\lambda}d_m$, где c_m и d_m произвольные вещественные постоянные. Далее находим $a_{(2k+1)m}$, $b_{(2k+1)m}$, из с.л.а.у.

$$\begin{aligned}
\lambda a_{(2k+1)m} + P_{1(2k-1)m} a_{(2k-1)m} &= 0 \\
\lambda b_{(2k+1)m} + P_{2(2k-1)m} b_{(2k-1)m} &= 0
\end{aligned} \tag{3.36}$$

которые следуют из (3.34)⁰. Из (3.36) получаем

$$\begin{aligned}
a_{(2k+1)m} &= \frac{1}{(-\lambda)^k} \cdot \prod_{\delta=1}^k P_{1(2\delta-1)m} i \bar{\lambda} c_m \quad (k = 1, 2, \dots), \\
b_{(2k+1)m} &= \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda^k} \cdot \prod_{\delta=1}^k P_{2(2\delta-1)m} i \bar{\lambda} d_m \quad (k = 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

В результате получим ненулевое решение о.к.з. в виде:

$$\begin{aligned}
\Phi_m(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \{ \lambda a_{(2k+1)m} e^{i(2k+1)m\varphi} + \bar{P}_{1(2k+1)m} \bar{a}_{(2k+1)m} e^{-i(2k+1)m\varphi} \} \times \\
&\times \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha_1 + \mu_{1(2k+1)m}} + \sum_{k=0}^{\infty} \{ \lambda b_{(2k+1)m} e^{i(2k+1)m\varphi} - \\
&- \bar{P}_{2(2k+1)m} \bar{b}_{(2k+1)m} e^{-i(2k+1)m\varphi} \} \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha_1 - \mu_{1(2k+1)m}}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Ряд (3.37) сходится абсолютно и равномерно в круге $|z| \leq R$.

Взяв c_{m-p} и d_{m-p} произвольными и полагая в (3.32)⁰ $a_{m-p} = c_{m-p}$, $b_{m-p} = -d_{m-p}$ ($p = 1, \dots, m-1$), имеем

$$a_{m+p} = -\left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\right) \bar{c}_{m-p} \text{ и } b_{m+p} = \left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\right) \bar{d}_{m-p},$$

а из рекуррентных соотношений

$$\lambda a_{(2k+1)m-p} + P_{1[(2k-1)m-p]} \bar{a}_{(2k-1)m-p} = 0,$$

$$\lambda a_{(2k+1)m+p} + P_{1[(2k-1)m+p]} \bar{a}_{(2k-1)m+p} = 0,$$

$$\lambda b_{(2k+1)m-p} + P_{2[(2k-1)m-p]} \bar{b}_{(2k-1)m-p} = 0,$$

$$\lambda b_{(2k+1)m+p} + P_{2[(2k-1)m+p]} \bar{b}_{(2k-1)m+p} = 0 \quad k = 1, 2, \dots,$$

которые вытекают из (3.34)⁰, находятся все коэффициенты вида $a_{(2k+1)m \pm p}$ и $b_{(2k+1)m \pm p}$:

$$\begin{aligned} a_{(2k+1)m-p} &= \frac{1}{(-\lambda)^k} \cdot \prod_{\delta=1}^k P_{1(2\delta-1)m-p} c_{m-p}, \\ a_{(2k+1)m+p} &= \frac{1}{(-\lambda)^k} \cdot \prod_{\delta=1}^k P_{1(2\delta-1)m+p} \left(-\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\right) \bar{c}_{m-p}, \\ b_{(2k+1)m-p} &= \frac{1}{(-\lambda)^{k+1}} \cdot \prod_{\delta=1}^k P_{2(2\delta-1)m-p} d_{m-p}, \\ b_{(2k+1)m+p} &= \frac{1}{(-\lambda)^k} \cdot \prod_{\delta=1}^k P_{2(2\delta-1)m+p} \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \bar{d}_{m-p}, \quad (p = 1, 2, \dots, m-1) \end{aligned} \tag{3.38}$$

В результате получим ненулевые решения о.к.з. (3.20)-(3.21):

$$\begin{aligned}
\Phi_{m-p}(z) = & \sum_{k=0}^{\infty} \{ \lambda a_{(2k+1)m-p} e^{i[(2k+1)m-p]\varphi} + \\
& + \bar{P}_{1[(2k+1)m-p]} \bar{a}_{(2k+1)m-p} e^{-i[(2k+1)m-p]\varphi} \} \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha_1 + \mu_1(2k+1)m-p} + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \{ \lambda a_{(2k+1)m+p} e^{i[(2k+1)m+p]\varphi} + \\
& + \bar{P}_{1[(2k+1)m+p]} \bar{a}_{(2k+1)m+p} e^{-i[(2k+1)m+p]\varphi} \} \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha_1 + \mu_1(2k+1)m+p} + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \{ \lambda b_{(2k+1)m-p} e^{i[(2k+1)m-p]\varphi} + \\
& + \bar{P}_{2[(2k+1)m-p]} \bar{b}_{(2k+1)m-p} e^{-i[(2k+1)m-p]\varphi} \} \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha_1 - \mu_1(2k+1)m-p} + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \{ \lambda b_{(2k+1)m+p} e^{i[(2k+1)m+p]\varphi} + \\
& + \bar{P}_{2[(2k+1)m+p]} \bar{b}_{(2k+1)m+p} e^{-i[(2k+1)m+p]\varphi} \} \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha_1 - \mu_1(2k+1)m+p},
\end{aligned} \tag{3.39}$$

где $a_{(2k+1)m \pm p}$ находятся по формулам (3.38). Ряд (3.39) сходится абсолютно и равномерно в круге $|z| \leq R$.

В (3.33)⁰ полагая $a_0 = c_0, b_0 = -d_0$, где c_0 и d_0 - произвольные вещественные константы, получим $a_{2m} = i((\lambda - \bar{P}_{20})/\lambda)c_0$, а из с.л.а.у.

$$\lambda a_{(2k+1)m} + P_{12m} a_{2m} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\lambda b_{(2k+1)m} + P_{22m} b_{2m} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

вытекающая из (3.34)⁰-(3.35)⁰ можно найти все $a_{2m(k+1)}$ и $a_{2m(k+1)}$

$$\begin{aligned}
a_{2m(k+1)} &= (-1)^k \frac{1}{(-\lambda)^{k+1}} \cdot \prod_{\delta=1}^k P_{1\delta m} (\lambda - \bar{P}_{20}) c_0, \\
b_{2m(k+1)} &= (-1)^{k+1} \frac{1}{\lambda^{k+1}} \cdot \prod_{\delta=1}^k P_{2\delta m} (\lambda + \bar{P}_{10}) d_0.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Произвольные константы c_0 и d_0 позволяют найти одно ненулевое решение о.к.з. (3.20)-(3.21)

$$\begin{aligned}
\Phi_0(z) &= i(\bar{\lambda} - P_{20})a_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 + \mu_{10}} + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_{2mk} e^{2imk\varphi} + \bar{P}_{12mk} \bar{a}_{2mk} e^{-2imk\varphi}) \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 + \mu_{12mk}} + \\
&+ i(\bar{\lambda} + P_{10})b_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 + \mu_{10}} + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda b_{2mk} e^{2imk\varphi} - \bar{P}_{22mk} \bar{b}_{2mk} e^{-2imk\varphi}) \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 - \mu_{12mk}},
\end{aligned} \tag{3.41}$$

где вместо a_{2mk} и b_{2mk} нужно пользоваться (3.40). Ряд (3.41) сходится абсолютно и равномерно в круге $|z| \leq R$.

Таким образом, общее решение о.к.з. (3.20)-(3.21) имеет вид:

$$\Phi^*(z) = \Phi_0(z) + \sum_{p=1}^{m-1} \Phi_{m-p}(z) + \Phi_m(z). \tag{3.42}$$

О.к.з. (3.20)-(3.21) имеет $2m$ линейно независимых решений.

Теперь изучим н.к.з. (3.20)-(3.21). Из принципа суперпозиции следует, что функция

$$H(z) = \sum_{p=0}^{\infty} H_p(z), \tag{3.43}$$

где

$$\begin{aligned}
H_p(z) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda a_{(2k+1)m+p}^{(p)} e^{i[(2k+1)m+p]\varphi} + \right. \\
& + \bar{P}_{1[(2k+1)m+p]} \bar{a}_{(2k+1)m+p} e^{-i[(2k+1)m+p]\varphi} \left. \right\} \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha_1 + \mu_1(2k+1)m+p} \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda b_{(2k+1)m+p}^{(p)} e^{i[(2k+1)m+p]\varphi} - \right. \\
& \left. - \bar{P}_{2[(2k+1)m+p]} \bar{b}_{(2k+1)m+p} e^{-i[(2k+1)m+p]\varphi} \right\} \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha_1 - \mu_1(2k+1)m+p}
\end{aligned}$$

причём для любых $p = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned}
a_{m+p}^{(p)} = \frac{1}{\lambda} h_p R^m, a_{(2k+1)m+p}^{(p)} = \frac{1}{(-\lambda)^k} \cdot \prod_{\delta=1}^k P_{1[(2\delta-1)m+p]} \frac{1}{\lambda} R^m h_p, \\
b_{m+p}^{(p)} = \frac{1}{\lambda} h_p R^m, b_{(2k+1)m+p}^{(p)} = \frac{1}{(-\lambda)^k} \cdot \prod_{\delta=1}^k P_{2[(2\delta-1)m+p]} \frac{1}{\lambda} R^m h_p
\end{aligned}$$

будет частным решением уравнения (3.20).

Далее нетрудно проверить, что

$$Re[z^{-m} H_p] = \frac{1}{2} (h_k e^{ik\varphi} + \overline{h_k} e^{-ik\varphi}), \text{ при } |z| = R.$$

Отсюда следует, что $H(z)$ удовлетворяет условию (3.21).

На основании формул (3.26) и (3.31) – (3.43) можно доказать следующие теоремы:

Теорема 3.13. Пусть $\alpha_1 = Re \alpha \geq 0$ и $|\alpha| < |\lambda|$. Тогда о.к.з. имеет $2m$ линейно независимых (над полем вещественных чисел) решений, а н.к.з. всегда имеет решение

$$\Phi(z) = \Phi^*(z) + H(z),$$

где $\Phi^*(z)$ задаётся формулой (3.42), а $H(z)$ формулой (3.43).

Теорема 3.14. Пусть $\alpha_1 = \operatorname{Re} \alpha \geq 0$ и $|\alpha| \geq |\lambda|$. Тогда о.к.з. имеет 4m линейно независимых (над полем вещественных чисел) решений, а н.к.з. всегда имеет решение

$$\Phi(z) = \Phi^*(z) + \Phi^{**}(z) + H(z).$$

Случай $m < 0$. В этом случае справедлива

Теорема 3.15. О.к.з. имеет только нулевое решение. Н.к.з. разрешима в том и только том случае, когда для функции $h(z)$ выполняются $2|m|$ вещественных условий:

$$h_0 + \operatorname{Re} \left(\frac{(-1)^\beta}{\lambda^\beta} h_{2\beta|m|} \cdot \prod_{\delta=0}^{\beta-1} P_{1(2\delta+1)|m|} \right) = 0 \quad (3.44)_0$$

$$\begin{aligned} & h_0 + \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{(-1)^\beta}{\lambda^\beta} h_{2\beta|m|+p} \cdot \prod_{\delta=0}^{\beta-1} P_{1(2\delta+1)|m|+p} + \\ & + \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{(-1)^\beta}{\lambda^\beta} h_{2\beta|m|-p} \cdot \prod_{\delta=0}^{\beta-1} P_{1(2\delta+1)|m|-p} = 0 \quad (p = 1, \dots, |m| - 1) \end{aligned} \quad (3.44)_p$$

$$\operatorname{Im} \frac{1}{(\bar{\lambda} - P_{20})} \left(h_m + \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{(-1)^\beta}{\lambda^\beta} h_{2\beta|m|} \cdot \prod_{\delta=0}^{\beta-1} P_{1(2\delta+1)|m|} \right) = 0 \quad (3.44)_m$$

При выполнении этих условий решение задачи даётся формулой

$$\begin{aligned}
\Phi(z) = & \sum_{p=0}^{|m|-1} \sum_{k=0}^{\infty} \{ \lambda a_{(2k+1)|m|-p} e^{i[(2k+1)|m|-p]\varphi} + \\
& + \bar{P}_{1[(2k+1)|m|-p]} \bar{a}_{(2k+1)|m|-p} e^{-i[(2k+1)|m|-p]\varphi} \} \times \\
& \times \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha_1 + \mu_1(2k+1)|m|-p} + \sum_{p=1}^{|m|} \sum_{k=0}^{\infty} \{ \lambda a_{(2k+1)|m|+p} e^{i[(2k+1)|m|+p]\varphi} + \\
& + \bar{P}_{1[(2k+1)|m|+p]} \bar{a}_{(2k+1)|m|+p} e^{-i[(2k+1)|m|+p]\varphi} \} \times \\
& \times \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha_1 + \mu_1(2k+1)|m|+p} + i(\bar{\lambda} - P_{20})a_0 \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha_1 - \mu_{10}}, \quad (3.45)
\end{aligned}$$

где

$$a_0 = R^m Re \frac{1}{(\bar{\lambda} - P_{20})} \left(h_{|m|} + \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{(-1)^\gamma}{\lambda^\gamma} h_{(2\gamma+1)|m|} \cdot \prod_{\delta=0}^{\gamma} P_{1\delta|m|} \right),$$

$$\begin{aligned}
a_{(2k+1)|m|\pm p} = & \frac{R^m}{\lambda} \left(h_{(2k+1)|m|\pm p} \right. \\
& \left. + \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{(-1)^\gamma}{\lambda^\gamma} h_{(2\gamma+k+1)|m|\pm p} \cdot \prod_{\delta=0}^{\gamma} P_{1(2\delta+2k+1)|m|\pm p} \right).
\end{aligned}$$

Доказательство. Подставив (3.26) в (3.21) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $e^{i\varphi}$, получим

$$P_{1|m|} Re a_{|m|} = h_0 R^m, \quad (3.46)$$

$$P_{1|m|+p} a_{|m|+p} + P_{1|m|-p} a_{|m|-p} = h_p R^m, (p = 1, \dots, |m| - 1) \quad (3.47)$$

$$P_{12|m|} a_{2m} + i(\lambda - \bar{P}_{20})a_0 = h_m R^m, \quad (3.48)$$

$$P_{12|m|+k} a_{2|m|+k} + \lambda a_k = h_{|m|+k} R^m, (k = 1, 2, \dots) \quad (3.49)$$

Из (3.46) определяем

$$a_{|m|} = \frac{R^m}{P_{1|m|}} (ic_{|m|} + h_0),$$

где $c_{|m|}$ - произвольная вещественная константа, затем из соотношения (3.49), которому в данном случае удобно придать вид

$$P_{1(2k+1)|m|} a_{(2k+1)|m|} + \lambda a_{(2k-1)|m|} = h_{2k|m|} R^m, k = 1, 2, \dots,$$

Находим

$$a_{(2k+1)|m|} = \frac{(-\lambda)^k R^m}{\prod_{\delta=0}^k P_{1[(2\delta+1)|m|]}} \cdot \left(ic_{|m|} + \sum_{\beta=0}^k \frac{h_{2\beta|m|}}{(-\lambda)^\beta} \prod_{\delta=1}^{\beta-1} P_{1(2\delta+1)|m|} \right) \quad (3.50)$$

Теперь рассмотрим уравнение (3.47). Положив в нём

$$a_{|m|-p} = \frac{R^m}{P_{1|m|-p}} c_{|m|-p} \quad (p = 1, \dots, m-1).$$

где $c_{|m|-p}$ - произвольная комплексная константа, получим

$$a_{|m|+p} = \frac{R^m}{P_{1|m|+p}} (c_{|m|+p} + h_p) \quad (p = 1, \dots, m-1)$$

Через известные константы $a_{|m|-p}$ и $a_{|m|+p}$ с помощью уравнения (3.49), из которого извлекается рекуррентная формула

$$P_{1[(2k+1)|m|\pm p]} a_{(2k+1)|m|\pm p} + \lambda a_{(2k-1)|m|\pm p} = h_{2k|m|\pm p} R^m,$$

вычисляются все коэффициенты вида $a_{(2k+1)|m|\pm p}, k = 1, 2, \dots$

$$a_{(2k+1)|m|-p} = \frac{(-\lambda)^k R^m}{\prod_{\delta=0}^k P_{1[(2\delta-1)|m|-p]}} \times$$

$$\times \left(c_{|m|-p} + \sum_{\beta=1}^k \frac{h_{2\beta|m|-p}}{(-\lambda)^\beta} \prod_{\delta=0}^{\beta-1} P_{1[(2\delta+1)|m|-p]} \right) \quad (3.51)$$

$$a_{(2k+1)|m|+p} = \frac{(-\lambda)^k R^m}{\prod_{\delta=0}^k P_{1[(2\delta-1)|m|+p]}} \times$$

$$\times \left(h_p - \bar{c}_{|m|+p} + \sum_{\beta=1}^k \frac{h_{2\beta|m|+p}}{(-\lambda)^\beta} \prod_{\delta=0}^{\beta-1} P_{1[(2\delta+1)|m|+p]} \right) \quad (3.51)_0$$

Задав в (3.48) коэффициент a_0 равенством $a_0 = c_0 R^m$, где c_0 - произвольная вещественная константа, определим

$$a_{2m} = \frac{R^m}{P_{12|m|}} (h_{|m|} - i(\bar{\lambda} - P_{20})c_0).$$

Затем, извлекая из (3.49) рекуррентную формулу

$$P_{1[(2k+1)|m|]} a_{(2k+1)|m|} + \lambda a_{2k|m|} = R^m h_{(2k+1)|m|},$$

вычислим с её помощью $a_{(2k+1)|m|}$, $k = 1, 2, \dots$

$$a_{(2k+1)|m|} = \frac{(-\lambda)^k R^m}{\prod_{\delta=0}^k P_{1[(2\delta+1)|m|]}} \times$$

$$\times \left(h_{|m|} - i(\bar{\lambda} - P_{20})c_0 + \sum_{\beta=1}^k \frac{h_{(2\beta+1)|m|}}{(-\lambda)^\beta} \prod_{\delta=0}^{\beta-1} P_{1[(2\delta+1)|m|]} \right) \quad (3.52)$$

Итак, мы выразили все неизвестные постоянные a_k ($k = 0, 1, \dots$) в формуле (3.26) через две произвольные вещественные постоянные $c_0, c_{|m|}$, $m - 1$ комплексные постоянные $c_0, \dots, c_{|m|-1}$ и коэффициенты Фурье граничной функции h .

Осталось исследовать сходимости рядов, представляющих решение задачи.

У ряда (3.26) все коэффициенты кроме $a_{(2k+1)|m|}$, $k = 1, 2, \dots$ равны нулю, поэтому

$$\Phi_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{q(k)} \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha_1 + \mu_{q(k)}}, \#(3.53)$$

где $q(k) = (2k + 1)|m|$ и

$$A_{q(k)} = \lambda a_{q(k)} e^{iq(k)\varphi} + P_{1q(k)} \bar{a}_{q(k)} e^{-iq(k)\varphi} \quad (3.54)$$

Ряд (3.53) формально удовлетворяет н.к.з. (3.20)-(3.21) с $h_j = 0$ при j не равных $2k|m|$, $k=0, 1, \dots$

Чтобы ряд (3.53) был сходящимся, необходимо:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_{q(k)} \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha_1 + \mu_{q(k)}} = 0, |z| \leq R. \quad (3.55)$$

Используя (3.50), (3.54), принятое ранее обозначение $P_{1s} = \mu_s - s - i\alpha_2$ и очевидное соотношение

$$\frac{1}{|\lambda|} P_{1s} = \frac{|\lambda|}{\mu_s + s - i\alpha_2}, \quad (3.56)$$

мы устанавливаем, что (3.55) может иметь только в том случае, когда $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{(2k+1)|m|} = 0$, т.е.

$$ic_{|m|} - h_0 + \sum_{\beta=1}^k \frac{h_{2\beta|m|}}{(-\lambda)^\beta} \prod_{\delta=0}^{\beta-1} P_{1[(2\delta+1)|m|]} = 0 \quad (3.57)$$

Отсюда равенство (3.44)₀ и следующее равенство:

$$c_{|m|} - Im \left(\sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{h_{2\beta|m|}}{(-\lambda)^\beta} \prod_{\delta=0}^{\beta-1} P_{1[(2\delta+1)|m|]} \right) = 0.$$

Из последнего равенства определяются постоянные $c_{|m|}$. В частном случае, когда речь идёт об однородной краевой задаче (3.20), (3.21) ($h(\varphi) = 0$), очевидно имеем $c_{|m|} = 0$, а из (3.50) следует, что $a_{(2k+1)|m|} = 0, k = 0, 1, \dots$. Это значит, что константа $c_{|m|}$ не порождает нетривиальное решение краевой задачи.

Теперь положим, что условие (3.57) выполнено. С его помощью (3.50) преобразуется к виду

$$a_{(2k+1)|m|} = \frac{R^m}{\lambda} \left(h_{2(k+1)|m|} + \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{h_{2(\gamma+k+1)|m|}}{(-\lambda)^\gamma} \prod_{\delta=0}^{\gamma} P_{1[(2\delta+2k+1)|m|]} \right).$$

Используя это равенство в формуле (3.53) и опуская несложные промежуточные выкладки, получим

$$\left| \Phi_{|m|}(z) < \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p|m|} |h_{2p|m|}| \right|, \quad (3.58)$$

где $a_{2|m|} = 1$ и

$$a_{2(p+1)|m|} = 1 + \frac{P_{12(p+1)|m|}}{|\lambda|} a_{2p|m|}, (p = 1, 2, \dots).$$

Отсюда и на основе (3.56) легко установить, что $a_{2p|m|}, (p = 1, 2, \dots)$ ограничены сверху одним и тем же числом. Но тогда из (3.58), ввиду абсолютной сходимости ряда Фурье функции $h(\varphi)$, следует равномерная сходимость ряда (3.53) и непрерывность её суммы $\Phi_{|m|(z)}$ при $|z| \leq R$

Аналогично исследуя ряды для $\Phi_{|m|-p}(z)$ и $\Phi_0(z)$ получаем, что для их сходимости необходимо:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{(2k+1)|m|\pm p} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{(2k+1)|m|} = 0.$$

В согласии с (3.51)⁻, (3.52)⁺ и (3.52) это эквивалентно соотношениям

$$c_{|m|-p} + \sum_{\beta=1}^k \frac{h_{2\beta|m|-p}}{(-\lambda)^\beta} \prod_{\delta=0}^{\beta-1} P_{1[(2\delta+1)|m|-p]} = 0, \quad (3.59^-)$$

$$h_p - \bar{c}_{|m|+p} + \sum_{\beta=1}^k \frac{h_{2\beta|m|+p}}{(-\lambda)^\beta} \prod_{\delta=0}^{\beta-1} P_{1[(2\delta+1)|m|+p]} = 0 \quad (3.59^+)$$

$$h_{|m|} - i(\bar{\lambda} - P_{20})c_0 + \sum_{\beta=1}^k \frac{h_{(2\beta+1)|m|}}{(-\lambda)^\beta} \prod_{\delta=0}^{\beta-1} P_{1[(2\delta+1)|m|]} = 0. \quad (3.60)$$

Из равенств (3.59⁻) и (3.59⁺) получим условия разрешимости (3.44)_p.

Что касается равенства (3.50), то поделив его предварительно на $\bar{\lambda} - P_{20}$ и далее отделив действительную и мнимую части, устанавливаем, что первая из них используется для нахождения неизвестной вещественной константы c_0 , а вторая является необходимым условием разрешимости, которое выписано формулой (3.44)_m.

Соотношения (3.59)[±] - (3.60) показывают, что константы $c_0, c_{|m|\pm p}$ не порождают нетривиальные решения однородной краевой задачи (они равны нулю при $h(\varphi) = 0$). Эти соотношения являются не только необходимыми, но и

достаточными условиями разрешимости краевой задачи. Для доказательства этого утверждения предварительно следует преобразовать формулы (3.50) - (3.51)[±] с помощью (3.40)[±] - (3.41).

Окончательные выражения коэффициентов выписаны в теореме 3.15 вслед за формулой (3.45). Равномерная сходимость рядов $\Phi_0(z)$ и $\Phi_{|m|-p}(z)$ проверяется по той же схеме, что и для ряда $\Phi_{|m|}(z)$.

Остаётся сказать, что сумма

$$\Phi_0(z) + \sum_{p=1}^{|m|-1} \Phi_{|m|-p}(z) + \Phi_{|m|}(z)$$

задаёт единственное непрерывное в области $|z| \leq R$ решение н.к.з. (3.20)-(3.21), причём его явный вид представлен в формулировке теоремы 3.15 под номером (3.45). Теорема 3.15 доказана.

Условия разрешимости (3.44) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)\varphi} U_k(Re^{i\varphi}) h(\varphi) d\varphi &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, |m|, \\ \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)\varphi} U_k^*(Re^{i\varphi}) h(\varphi) d\varphi &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, |m| - 1, \end{aligned} \quad (3.61)$$

где функции $U_0(z), U_{|m|}(z), U_k(z), U_k^*(z), k = 1, 2, \dots, |m| - 1$, образуют полную систему линейно независимых (в смысле комбинации с вещественными коэффициентами) решений о.с.к.р. (3.20) с граничным условием

$$Re[i e^{i(m+1)\varphi} U] = 0 \text{ на } |z| = R, \quad (3.62)$$

причём решения отыскиваются в классе $C_{0,1}(G)$.

Для проверки этого утверждения следует в явном виде построить полную систему линейно независимых решений задачи (3.20), (3.62). Для этого необходимо обратиться к выражениям Ω_1^* и Ω_2^* из (3.2) и (3.3), выписать на их основе обобщённый интеграл типа Коши (3.14), а затем представление решений уравнения (3.20) в виде аналога степенного ряда. В конечном счёте получим

$$U(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \{ -\bar{\lambda} b_k e^{ik\varphi} + Q_k \bar{b}_k e^{-i(k+2)\varphi} \} r^{\alpha_1 + \nu_k}, \quad (3.63)$$

где $\nu = \sqrt{(k+1)^2 + |\lambda|^2} - 1$, $Q_k = \nu_k - k$, b_k - произвольные комплексные константы.

Вообще говоря, это представление выписано для значений λ , удовлетворяющих неравенству $1 \leq |\lambda| \leq \infty$. Для случая $0 < |\lambda| < 1$ суммирование в (3.63) начинается с $k = 0$, т.е. $b_{-1} = 0$.

Исследовав задачи (3.20), (3.62), избегая излишней громоздкости, приводим характеристику двумя свойствами.

Первое заключается в том, что

$$U_0(z) = 0 (|z|^{\alpha_1 + \mu_0 - 1}), U_{|m|}(z) = 0 (|z|^{\alpha_1 + \mu_{|m|} - 1}), \\ U_k(z), U_k^*(z) = 0 (|z|^{\alpha_1 + \mu_k - 1}), z \rightarrow 0, \mu_k^2 = |\lambda|^2 + k^2.$$

Описания второго свойства удобно осуществить через вспомогательные функции $u_k(\varphi)$ и $\nu_k(\varphi)$, $k = 0, 1, \dots, |m|$, которые определяются следящим образом:

$$u_0(\varphi) = U_0(Re^{i\varphi}), u_{|m|}(\varphi) = U_{|m|}(Re^{i\varphi}), \\ u_k(\varphi) = B_k^{-1} [U_k(Re^{i\varphi}) + iU_k^*(Re^{i\varphi})], k = 1, \dots, |m| - 1,$$

где

$$B_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)\varphi} [U_k(Re^{i\varphi}) + iU_k^*(Re^{i\varphi})] h(\varphi) d\varphi,$$

$$v_0(\varphi) = 1, v_k(\varphi) = Re(B_k e^{ik\varphi}), k = 1, \dots, |m| - 1,$$

$$v_{|m|}(\varphi) = Re(i(\bar{\lambda} - P_{20}) e^{i|m|\varphi}).$$

Второе свойство линейно независимых решений состоит в том, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)\varphi} u_p(\varphi) v_p(\varphi) d\varphi = \delta_{pq}, (p, q = 0, 1, \dots, |m|) \quad (3.64)$$

где $\delta_{pq} = 0$ при $p \neq q$ и $\delta_{pq} = -1$ при $p = q$.

Предположим теперь, что $\Phi(z)$ удовлетворяет краевому условию

$$Re[z^{-m}\Phi] = h^*(z) \text{ на } |z| = R \quad (3.65)$$

где

$$h^*(z) = h(z) + B_0 v_0(\varphi) + B_{|m|} v_{|m|}(\varphi) + \sum_{k=1}^{|m|-1} v_k(\varphi),$$

причём константы B_p для индексов $p = 0$ и $p = |m|$ определяются по формуле

$$B_p = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)\varphi} U_p(Re^{i\varphi}) h(\varphi) d\varphi.$$

Из теоремы 3.15. и соотношения (3.65) вытекает

Следствие 3.1. *Н.к.з. (3.20)-(3.21) при $m < 0$ однозначно разрешима.*

3.5. Задача сопряжения для модельной системы

Введем обозначения $G^+ = \{z: |z| < R\}$, $\Gamma = \{z: |z| = R\}$ и $G^- = \{z: |z| > R\}$, $\bar{G}^+ = G^+ \cup \Gamma$.

Задача. Найти решение $\Phi^+(z)$ о.с.к.р. (3.20) из класса $C(G^+ + \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G^+ - 0)$, и аналитическую в области G^- функцию $\Phi^-(z)$, ограниченную при $z = \infty$ и непрерывно продолжимую на Γ , удовлетворяющие условию

$$\Phi^+(t) = t^m \Phi^-(t) + g(t), t \in \Gamma, \quad (3.67)$$

где m – целое, $g(t)$ – заданная функция.

Для решения этой задачи будем считать, что функция $g(t)$ имеет ряд Фурье:

$$\begin{aligned} g(Re^{i\varphi}) &= \sum_{-\infty}^{\infty} g_k e^{ik\varphi}, \\ g_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(Re^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi, k = 0, \pm 1, \dots \end{aligned} \quad (3.68)$$

который сходится абсолютно и равномерно и будем использовать следующие разложения:

$$\Phi^+(z) = i(\bar{\lambda} - P_{20})a_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 + \mu_{10}} + \sum_{k=1}^m \{\lambda a_k e^{ik\varphi} + \overline{P_{1k}} \overline{a_k} e^{-ik\varphi}\} \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 + \mu_{1k}}, z < R \quad (3.69)$$

$$\Phi^-(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}, \quad z > R$$

Формулировка окончательных результатов существенно зависит от числа m .

Теорема 3.16. Пусть $m \geq 1$. Тогда о.к.з. (3.67) имеет $2m + 1$ линейно независимых решения

$$\begin{aligned}\Phi_0^+(z) &= i(\bar{\lambda} - P_{20})c_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 + \mu_{10}} + \sum_{k=1}^m \{\lambda c_k e^{ik\varphi} + \overline{P_{1k}} \bar{c}_k e^{-ik\varphi}\} \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 + \mu_{1k}}, z \in \bar{G}^+, \\ \Phi_0^-(z) &= i(\bar{\lambda} - P_{20})c_0 z^{-m} + \sum_{k=1}^m \{\lambda c_{m-k} R^{-k} z^{k-m} + \overline{P_{1k}} \bar{c}_k R^k z^{-k-m}\}, z \in G^-, \quad (3.70)\end{aligned}$$

где c_k – произвольные постоянные, причем c_0 – вещественная. При этом н.к.з. всегда разрешима.

Доказательство. В силу условия (3.67) для неизвестных коэффициентов a_k, b_k получим с.л.а.у.

$$i(\bar{\lambda} - P_{20})a_0 = b_m + g_0, \quad (3.71)$$

$$\lambda a_p = b_{m-p} R^p + g_p, (p = 1, 2, \dots, m) \quad (3.72)$$

$$\lambda a_k = g_k, k = 1, 2, \dots \quad (3.73)$$

$$P_{1k} \bar{a}_k = b_{m+k} R^{-k} + g_{-k}, (k = 1, 2, \dots) \quad (3.74)$$

Взяв $a_0 = c_0, a_p = c_p, p = 1, 2, \dots, m$, здесь c_0 – вещественная, c_k – комплексные произвольные постоянные, из равенств (3.71), (3.72), (3.74) получаем:

$$\begin{aligned}b_m &= i(\bar{\lambda} - P_{20})c_0 - g_0, \\ b_{m-p} &= \lambda c_p R^{-p} - g_p R^{-p}, \\ b_{m+k} &= P_{1k} \bar{c}_k R^p - g_{-p} R^p, p = 1, 2, \dots, m.\end{aligned}$$

Из равенств (3.68) и (3.74) находим:

$$a_k = \frac{1}{\lambda} g_k, \quad k \geq m+1,$$

$$b_{m+k} = \frac{1}{\lambda} P_{1k} \bar{g}_k R^k - g_{-k} R^k, \quad k \geq m+1$$

Теперь подставим эти выражения в ряды (3.69), каждый ряд перепишем как сумму двух рядов – ряды, в которых входят члены, имеющие постоянные c_0, c_k , и ряды, члены которых не имеют эти постоянные. Такие ряды это ряды (3.70), которые определяют все ненулевые решения однородной задачи сопряжения и ряды вида

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}^+(z) &= \sum_{k=m+1}^{\infty} \left\{ g_k e^{ik\varphi} + \frac{P_{1k}}{\bar{\lambda}} \bar{g}_k e^{-ik\varphi} \right\} \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha_1 + \mu_{1k}}, |z| \leq R, \\ R^m \hat{\Phi}^-(z) &= - \sum_{k=m+1}^{\infty} g_{m-k} \left(\frac{R}{z} \right)^k - \sum_{k=m+1}^{2m} g_{-(k-m)} \left(\frac{R}{z} \right)^k + \\ &+ \sum_{k=2m+1}^{\infty} \left(\frac{P_{1(k-m)}}{\bar{\lambda}} \bar{g}_{k-m} - g_{m-k} \right) \left(\frac{R}{z} \right)^k, |z| \geq R. \end{aligned}$$

Равномерная сходимость этих рядов в указанных областях является очевидным следствием абсолютной сходимости ряда Фурье функции $g(z)$, $|z| = R$. Очевидно также, что пара $\hat{\Phi}^+$ и $\hat{\Phi}^-$ является частным решением неоднородной задачи сопряжения. Теорема 3.16 доказана.

Рассмотрим задачу сопряжения при $m < 0$. В этом случае справедлива следующая

Теорема 3.17. *Если $m < 0$, то о.к.з. (3.67) имеет только нулевое решение, а н.к.з разрешима в том и только том случае, когда $g(z)$ удовлетворяет $2|m| - 1$ вещественным условиям*

$$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{(\bar{\lambda} - P_{20})} g_0 \right) = 0, \bar{\lambda} g_{-k} - P_{1k} \bar{g}_k = 0, (k = 1, \dots, |m| - 1) \quad (3.75)$$

Доказательство. С учётом того, что $m = -|m| < 0$, подстановка рядов (3.68), (3.69) в краевое условие (3.67) приводит к следующей системе

$$i(\bar{\lambda} - P_{20})a_0 = g_0, \quad (3.76)$$

$$\lambda a_k = g_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.77)$$

$$P_{-s}\bar{a}_s = g_{-s}, \quad s = 1, \dots, |m| - 1, \quad (3.78)$$

$$P_{1k}\bar{a}_k = b_{k-|m|}R^{-k} + g_{-k}, \quad k \geq m. \quad (3.79)$$

Поделив соотношения (3.76) на $i(\bar{\lambda} - P_{20})$ и затем отделив действительную и мнимые части получим соотношение

$$a_0 = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\bar{\lambda} - P_{20}} g_0 \right) \quad (3.80)$$

и первое равенство из (3.75). Из (3.77) имеем

$$a_k = \frac{1}{\lambda} g_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.81)$$

Если подставить значение a_k в (3.78) и (3.79), то из (3.78) следуют $|m| - 1$ комплексных равенств второй группы из (3.75), затем из (3.79) находим неизвестные b_k :

$$R^{-(k+|m|)}b_k = \frac{P_{1(k+|m|)}}{\bar{\lambda}} \bar{g}_{k+|m|} - g_{-(k+|m|)}. \quad (3.82)$$

Из (3.80) – (3.82) видно, что при $g(z) \equiv 0$ все a_k, b_k будут нулевыми.

Если $g(z) \neq 0$ и выполнено (3.76), то задача сопряжения имеет единственное решение

$$\begin{aligned}\Phi^+(z) &= i(\bar{\lambda} - P_{20})Re\left(\frac{1}{i(\bar{\lambda} - P_{20})}g_0\right)\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{g_k e^{ik\varphi} + \frac{\overline{P_{1k}}}{\bar{\lambda}}\overline{g_k} e^{-ik\varphi}\right\}\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}}, \\ \Phi^-(z) &= R^{|m|}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{P_{1(k+|m|)}}{\bar{\lambda}}\bar{g}_{k+|m|} - g_{-(k+|m|)}\right)\left(\frac{R}{z}\right)^k.\end{aligned}$$

Очевидно, эти ряды равномерно и абсолютно сходятся. Теорема 3.17 доказана.

Рассмотрим теперь вместо (3.67) краевое условие вида

$$\Phi^+(z) = z^m \Phi^-(z) + g^*(z), \quad |z| = R, \quad (3.83)$$

где

$$g^*(z) = g(z) + i(\bar{\lambda} - P_{20})Im\left(\frac{g_0}{i(\bar{\lambda} - P_{20})}\right) - \sum_{k=1}^{|m|-1}\left(g_k - \frac{\overline{P_{1k}}}{\bar{\lambda}}\right)e^{-ik\varphi}.$$

Из теоремы 3.17 вытекает

Следствие 3.2. *При $m < 0$ н.к.з. сопряжения с граничным условием (3.83) имеет единственное решение.*

3.6. Поведение решений в особой точке

По отношению к модельному уравнению (3.0) общим будем называть уравнение вида

$$\partial_{\bar{z}}\Psi - \frac{a(z)}{2\bar{z}}\Psi - \frac{b(z)}{2\bar{z}}\bar{\Psi} = F(z), \quad z \in G, \quad (3.84)$$

в котором особая точка $z = 0$ является внутренней для области G , $\Psi(z)$ - искомая, $F(z), a(z), b(z)$ - заданные функции, причём $F(z) \in C(G - 0) \cap L_p(G), p > 2$, $a(z), b(z) \in C(G), a(0) \neq 0, b(0) \neq 0$ и

$$\begin{aligned} |a(z) - a(0)| &< M|z|^\beta, \\ |b(z) - b(0)| &< M|z|^\beta, \end{aligned} \quad \beta > 0,$$

по крайней мере для z , принадлежащих некоторой малой окрестности начала координат.

Исследование данного уравнения развёртывается на базе теории модельного уравнения. Интегральное уравнение (2.40) главы 2, устанавливающее связь многообразий решений общего и модельного уравнений, применяется в качестве главного инструмента, с помощью которого те или иные результаты, полученные для модельного объекта, перебрасываются на объект более сложной природы.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\partial_{\bar{z}} \Psi - \frac{a(z)}{2\bar{z}} \Psi - \frac{b(z)}{2\bar{z}} \bar{\Psi} = 0, \quad z \in G, \quad (3.85)$$

в котором коэффициенты $a(z)$ и $b(z)$ подчинены условиям, упомянутым выше. Пусть $\Psi(z)$ какое-либо его решение из класса $C(G) \cap C_{\bar{z}}(G - 0)$. Изучим асимптотическое поведение $\Psi(z)$ в окрестности точки $z = 0$, для чего воспользуемся представлением решений в следующем виде

$$\Psi(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi} \iint_G \left[\frac{\Omega_1(z, \zeta)}{\zeta} f(\zeta) + \frac{\Omega_2(z, \zeta)}{\zeta} \bar{f}(\zeta) \right] d\xi d\eta, \quad (3.86)$$

где

$$f(\zeta) = \frac{a(\zeta) - a(0)}{2\bar{\zeta}} \Psi(\zeta) + \frac{b(\zeta) - b(0)}{2\bar{\zeta}} \bar{\Psi}(\zeta) \quad (3.87)$$

и $\Phi(z)$ - непрерывное решение модельного уравнения, однозначно определяемое по заданному $\Psi(z)$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Omega_1(z, \zeta)}{\zeta} \Psi(\zeta) d\zeta - \frac{\Omega_2(z, \zeta)}{\zeta} \bar{\Psi}(\zeta) d\bar{\zeta}.$$

Данное представление решений является результатом применения формулы (3.10) (глава 3, §3.2) к уравнению (3.85), которое предварительно следует переписать к виду (3.9) из указанного параграфа, используя обозначения (3.87) и $\alpha = a(0), \lambda = b(0)$.

Вполне понятно, что мы можем ограничиться случаем, когда область G - круг радиуса R с центром в точке $z = 0$ Тогда $\Phi(z)$ также, как это сделано в §3.3, может быть представлена степенным рядом

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(z) &= \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \frac{P_{2k}a_k + \lambda\bar{a}_k}{2\mu_{1k}} e^{ik\varphi} + \frac{P_{1k}a_k + \lambda\bar{a}_k}{2\mu_{1k}} e^{-ik\varphi} \right\} r^{\alpha_1 + \mu_{1k}}, \\ \Phi(z) &= \left(a_0 + \frac{\lambda}{|\lambda|} \bar{a}_0 \right) r^{\alpha_1 + \mu_{10}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{P_{2k}a_k + \lambda\bar{a}_k}{2\mu_{1k}} e^{ik\varphi} + \frac{P_{1k}a_k + \lambda\bar{a}_k}{2\mu_{1k}} e^{-ik\varphi} \right\} r^{\alpha_1 + \mu_{1k}}, \end{aligned} \quad (3.88)$$

где $\lambda = b(0)$ и

$$a_k = \frac{R^{-\mu_k}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(Re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta, k = 0, \pm 1, \dots \quad (3.89)$$

Теорема 3.18. Для решения $\Psi(z)$ уравнения (3.85) из класса $C(G) \cap C_{\bar{z}}(G - 0)$ справедливо соотношение

$$\Psi(z) = \left(\beta_0 + \frac{\lambda}{|\lambda|} \beta_0 \right) r^{\alpha_1 + \mu_{10}} + O(r^{\alpha_1 + \mu_{10} + a_0}), r \rightarrow 0 \quad (3.90)$$

Если же $\Psi(z)$ подчиняется условиям вида

$$P_s a_s + \lambda \bar{a}_s = \frac{1}{2\pi} \iint_G \left[\frac{P_s}{\zeta} f(\zeta) + \frac{\lambda}{\bar{\zeta}} \overline{f(\zeta)} \right] e^{-iky} \frac{d\xi d\eta}{\rho^{\mu_s}}, (s = 0, 1, \dots, k-1) \quad (3.91)$$

где $a_s, \bar{a}_s, f(\zeta)$ определены равенствами (3.89) и (3.87), то асимптотическое поведение $\Psi(z)$ в окрестности точки $z = 0$ будет характеризоваться формулой

$$\Psi(z) = \left(\frac{P_{2k} \beta_k + \lambda \bar{\beta}_k}{\mu_{1k}} e^{ik\varphi} + \frac{P_{1k} \beta_k + \lambda \bar{\beta}_k}{\mu_{1k}} e^{-ik\varphi} \right) r^{\alpha_1 + \mu_{1k}} + O(r^{\alpha_1 + \mu_{1k} + a_k}), r \rightarrow 0 \quad (3.92)$$

здесь a_k ($k = 0, 1, \dots$) - некоторые положительные числа и

$$\beta_k = a_k - \frac{1}{2\pi} \iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta} e^{-iky} \frac{d\xi d\eta}{\rho^{\mu_s}}, k = 0, \pm 1, \dots \quad (3.93)$$

Доказательство. Будем считать, что $\alpha \leq \alpha_1 \leq \alpha_1 + \mu_{10}$. Прежде всего имеем соотношение

$$\Psi(z) = O(|z|^{a-\varepsilon}), z \rightarrow 0, \quad (3.94)$$

где ε - сколь угодно малое положительное число. Из (3.86) имеем

$$\frac{\Psi(z)}{|z|^{a-\varepsilon}} = \frac{\Phi(z)}{|z|^{a-\varepsilon}} + J_1(z), \quad (3.95)$$

где

$$J_1(z) = \frac{1}{\pi} \iint_G \left[\frac{\Omega_1^{(1)}(z, \zeta)}{\zeta} f^{(1)}(\zeta) d\zeta - \frac{\Omega_2^{(1)}(z, \zeta)}{\zeta} \overline{f^{(1)}(\zeta)} \right] d\xi d\eta,$$

причём

$$f^{(1)} = \frac{f(\zeta)}{|\zeta|^{a-\varepsilon}}, \quad \Omega_k^{(1)} = \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{a-\varepsilon} \Omega_k(z, \zeta), k = 1, 2.$$

Проверим, что правая часть (3.95) ограничена при $z = 0$. Ограниченность первого слагаемого следует из (3.92) в силу условия $a \leq \alpha_1 + \mu_{10}$. Остается рассмотреть $J_1(z)$. Представляя $\Omega_1^{(1)}(z, \zeta)$ в виде

$$\Omega_1^{(1)}(z, \zeta) = \frac{\zeta}{\zeta - z} + \Omega_1^{(1)0}(z, \zeta),$$

будем иметь

$$J_1(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f^{(1)}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta - \frac{1}{\pi} \iint_G \left[\frac{\Omega_1^{(1)0}(z, \zeta)}{\zeta} f^{(1)}(\zeta) d\zeta - \frac{\Omega_2^{(1)0}(z, \zeta)}{\zeta} \overline{f^{(1)}(\zeta)} \right] d\xi d\eta.$$

На основе этой формулы ограниченность $J_1(z)$ устанавливается по той же схеме, по которой в лемме 2.5 главы 2 получена оценка сверху для функции $h(z)$. Отметим только, что $f^{(1)}(\zeta) \in L_p(G)$, где p подчиняется неравенствам $2 < p < \frac{2}{1-\varepsilon}$.

Теперь из ограниченности правой части (3.95) следует (3.94). Запишем соотношение (3.86) в виде

$$\frac{\Psi(z)}{|z|^{2(a-\varepsilon)}} = \frac{\Phi(z)}{|z|^{2(a-\varepsilon)}} + J_2(z), \quad (3.96)$$

)

где

$$J_2(z) = \frac{1}{\pi} \iint_G \left[\frac{\Omega_1^{(2)}(z, \zeta)}{\zeta} f^{(2)}(\zeta) d\zeta - \frac{\Omega_2^{(2)}(z, \zeta)}{\zeta} \overline{f^{(2)}(\zeta)} \right] d\xi d\eta,$$

причём

$$f^{(2)} = \frac{f(\zeta)}{|\zeta|^{2a-2\varepsilon}}, \quad \Omega_k^{(2)} = \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{2a-2\varepsilon} \Omega_k(z, \zeta), \quad k = 1, 2.$$

Устанавливая аналогично предыдущему ограниченность правой части (3.96), мы приходим к равенству $\Psi(z) = O(|z|^{2a-2\varepsilon}), z \rightarrow 0$. Продолжая получим

$$\Psi(z) = O(|z|^{\alpha_1 + \mu_{10}}), z \rightarrow 0.$$

Теперь вернёмся к соотношению (3.86) и преобразуем его к следующему виду:

$$\Psi(z) = \left(\beta_0 + \frac{\lambda}{|\lambda|} \beta_0 \right) r^{|\lambda|} - \frac{1}{\pi} \iint_G \left[\frac{\tilde{\Omega}_1(z, \zeta)}{\zeta} f(\zeta) d\zeta - \frac{\tilde{\Omega}_2(z, \zeta)}{\zeta} \bar{f}(\zeta) \right] d\xi d\eta, \quad (3.97)$$

где β_0 определена равенством (3.93),

$$\tilde{\Phi}(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \frac{P_{2k} a_k + \lambda \bar{a}_{-k}}{\mu_{1k}} e^{ik\varphi} + \frac{P_{1k} a_{-k} + \lambda \bar{a}_k}{\mu_{1k}} e^{-ik\varphi} \right\} r^{\alpha_1 + \mu_{1k}}$$

а ядра $\tilde{\Omega}_1(z, \zeta)$ и $\tilde{\Omega}_2(z, \zeta)$ пишутся в виде рядов аналогичных (2.21) из главы 2.

Для того чтобы из (3.97) получить (3.96), остаётся проверить, что второе и третье слагаемое в формуле (3.97) имеют в точке $z = 0$ нуль порядка $\alpha_1 + \mu_{10} +$

a_0 . Для второго слагаемого, т.е. для $\tilde{\Phi}(z)$, это очевидно. Для третьего проверка осуществляется также, как и при доказательстве (3.94).

Таким образом мы получим (3.90). Что касается формулы (3.92), то её справедливость устанавливается методом полной индукции. Докажем (3.92) при $k = 1$.

Прежде всего мы должны положить

$$\beta_0 + \frac{\lambda}{|\lambda|} \beta_0 = 0$$

что в силу принятого обозначение (3.93) эквивалентно условию (3.91) при $s = 0$. С учётом (3.98) равенство (3.97) примет вид

$$\Psi(z) = \tilde{\Phi}(z) - \frac{1}{\pi} \iint_G \left[\frac{\tilde{\Omega}_1(z, \zeta)}{\zeta} f(\zeta) d\zeta - \frac{\tilde{\Omega}_2(z, \zeta)}{\zeta} \bar{f}(\zeta) \right] d\xi d\eta \quad (3.99)$$

Если $\alpha_1 + \mu_{10} + a \leq \mu_1 |\lambda| + a \leq \mu_1$, то (3.99) мы можем записать следующим образом

$$\frac{\Psi(z)}{|z|^{\alpha_1 + \mu_{10} + a - s}} = \frac{\tilde{\Phi}(z)}{|z|^{\alpha_1 + \mu_{10} + a - s}} + \tilde{J}_1(z) \quad (3.100)$$

где

$$\tilde{J}(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \left[\frac{\tilde{\Omega}_1^{(1)}(z, \zeta)}{\zeta} \tilde{f}^{(1)}(\zeta) d\zeta - \frac{\tilde{\Omega}_2^{(1)}(z, \zeta)}{\zeta} \overline{\tilde{f}^{(1)}(\zeta)} \right] d\xi d\eta,$$

причём

$$\tilde{f}^{(1)}(\zeta) \frac{\Psi(z)}{|\zeta|^{\alpha_1 + \mu_{10} + a - s}} \text{ и } \tilde{\Omega}_k^{(1)}(z, \zeta) = \left(\frac{\zeta}{z}\right)^{\alpha_1 + \mu_{10} + a - \varepsilon} \widetilde{\Omega}_k(z, \zeta), k = 1, 2. \quad (3.100)$$

И опять, аналогично предыдущему, доказывается ограниченность правой части (3.100). Это приводит к соотношению $\Psi(z) = O(|z|^{\alpha_1 + \mu_{10} + a - s}), z \rightarrow 0$. Затем получаем $\Psi(z) = O(|z|^{\alpha_1 + \mu_{10} + 2a - 2\varepsilon}), z \rightarrow 0$. и т.д., а через конечное число раз приходим к соотношению $\Psi(z) = O(|z|^{\alpha_1 + \mu_{10}}), z \rightarrow 0$.

Теперь следует вернуться к (3.99) и переписать эту формулу в виде

$$\begin{aligned} \Psi(z) = & \left(\frac{P_{21}\beta_1 + \lambda\bar{\beta}_1}{\mu_{11}} e^{i\varphi} + \frac{P_{11}\beta_1 + \lambda\bar{\beta}_1}{\mu_{11}} e^{-i\varphi} \right) r^{\alpha_1 + \mu_{11}} + \tilde{\Phi}(z) \\ & - \frac{1}{\pi} \iint_G \left[\frac{\tilde{\Omega}_1(z, \zeta)}{\zeta} f(\zeta) d\zeta - \frac{\tilde{\Omega}_2(z, \zeta)}{\zeta} \bar{f}(\zeta) \right] d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (3.101)$$

где β_1 и β_{-1} определены равенством (3.93). И опять таки проверяется, что второе и третье слагаемые в формуле (3.101) имеют в точке $z = 0$ нуль порядка $\alpha_1 + \mu_{11} + a_1$ где a_1 - некоторое положительное число.

Теорема 3.18 доказана.

ГЛАВА 4

МНОГОМЕРНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Эта глава посвящена многомерным о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами. Построены общее решение и решения граничных задач.

Результаты этой главы опубликованы в работах [5-А] – [7-А], [14-А].

4.1. Построение общего решения

Как было указано в обзорной главе 1 теория о.с.к.р.

$$w_{\bar{z}} + a(z)w + b(z)\bar{w} = 0, \quad (4.1)$$

где $z = x + iy$, $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, в регулярном случае, т.е. когда коэффициенты $a(z)$ и $b(z)$ принадлежат пространству $L_{p,2}(C)$, $p > 2$, разработана И.Н. Векуа, Л. Берсом и их последователями (см., например, [1], [2], [28], [108]). Системы вида (4.1) с сингулярными коэффициентами исследованы в работах И.Н. Векуа [29], Л.Г. Михайлова [48], З.Д. Усманова [86], [93], [95] и др. (см., например, [98]). Случай коэффициентов, определенных и ограниченных во всей плоскости C рассмотрены в ряде работ С. Байзаева и Э. Мухамадиева (см., например, [13] - [15], [53]).

В настоящем параграфе из нашей работы [14-А] «излагается схема построения общего решения для многомерной о.с.к.р. вида

$$w_{\bar{z}} + \frac{1}{z^\alpha \bar{z}^\beta} A \bar{w} = 0, \quad (4.2)$$

где $w \in C^m$ – комплексное m -мерное пространство, α, β – вещественные числа, такие что $\alpha + \beta > 0$ и $\alpha - \beta$ – целое, A – комплексная матрица порядка m » [14-А].

В полярных координатах система (4.2) имеет вид:

$$w_r + \frac{i}{r} w_\varphi + \frac{2}{r^{\alpha+\beta}} e^{i(\beta-\alpha-1)\varphi} A \bar{w} = 0, \quad (4.3)$$

где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Решения системы (4.3) будем искать в виде тригонометрического ряда

$$w(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n(r) e^{in\varphi}, \quad (4.4)$$

с неизвестными коэффициентами — вектор-функциями $w_n(r)$. Подставляя в систему (4.3) имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(w'_n - \frac{n}{r} w_n \right) e^{in\varphi} + \frac{2}{r^\gamma} e^{i(s-n)\varphi} A \bar{w}_n \right] = 0,$$

здесь $\gamma = \alpha + \beta$, $s = \beta - \alpha - 1$. Заменяя в ряде $\sum_{n=-\infty}^{\infty} A \bar{w}_n e^{i(s-n)\varphi}$ индекс n на $s - n$ и приравнявая коэффициенты при $e^{in\varphi}$ для неизвестных $w_n(r)$ получим систему уравнений вида

$$w'_n - \frac{n}{r} w_n + \frac{2}{r^\gamma} A \bar{w}_{s-n} = 0, n \in Z. \quad (4.5)$$

Отсюда заменяя n на $-n$ и переходя к сопряженным величинам, получаем еще одну систему уравнений

$$\bar{w}'_{s-n} + \frac{2}{r^\gamma} \bar{A} w_n - \frac{s-n}{r} \bar{w}_{s-n} = 0, n \in Z. \quad (4.6)$$

Возможны два случая: 1) s – нечетное; 2) s – четное.

Случай 1: s – нечетное. Тогда $n \neq s - n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим уравнения (4.5) и (4.6) как систему о.д.у. с неизвестными вектор-функциями $w_n(r)$ и $\omega_n(r) = \bar{w}_{s-n}(r)$:

$$\begin{cases} w'_n - \frac{n}{r}w_n + \frac{2}{r^\gamma}Aw_n = 0, \\ \omega'_n + \frac{2}{r^\gamma}\bar{A}w_n - \frac{s-n}{r}\omega_n = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

При изменении n от $p = \frac{s+1}{2}$ до $+\infty$ выражение $s - n$ меняется от $p - 1$ до $-\infty$, поэтому в системе (4.7) можно полагать, что $n \geq p$.

Стандартным образом из системы (4.7) переходим к о.д.у. второго порядка:

$$w''_n + \frac{\gamma - s}{r}w'_n - \left(\frac{n(n - s + \gamma - 1)}{r^2}E_m + \frac{4}{r^{2\gamma}}A\bar{A} \right)w_n = 0,$$

здесь E_m – единичная матрица порядка m . Это уравнение перепишем в виде

$$r^2w''_n + (2\alpha + 1)rw'_n - (n(2\alpha + n)E_m + 4r^{2(1-\gamma)}A\bar{A})w_n = 0. \quad (4.8)$$

Из уравнения (4.8) определим $w_n(r)$ для индексов $n \geq p$, а остальные $w_{s-n}(r)$ находим из системы

$$\bar{A}w_{s-n}(r) = \frac{r^\gamma}{2} \left[-\bar{w}'_n(r) + \frac{n}{r}\bar{w}_n(r) \right], \quad (4.9)$$

которая следует из первого уравнения системы (4.7).

Пусть S – матрица, приводящая матрицу $A\bar{A}$ к квазидиагональному жордановому виду [35]

$$\Lambda = \text{diag}[\Lambda_1, \dots, \Lambda_q],$$

где Λ_j – клетки Жордана порядка μ_j :

$$\Lambda_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_j \end{bmatrix},$$

λ_j – собственные значения матрицы $A\bar{A}$, $\mu_1 + \dots + \mu_q = m$. Тогда $A\bar{A} = S\Lambda S^{-1}$ и систему уравнений (4.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & r^2(S^{-1}w_n)'' + (2\alpha + 1)r(S^{-1}w_n)' - \\ & - (n(2\alpha + n)E_m + 4r^{2(1-\gamma)}A\bar{A})S^{-1}w_n = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

В начале рассмотрим случай, когда все собственные значения λ_j матрицы $A\bar{A}$ полупростые [35], т.е. все клетки Жордана Λ_j диагональные. В таком случае система (4.10) разбивается на q системы меньшего размера:

$$r^2 u_{jn}'' + (2\alpha + 1)r u_{jn}' - (n(2\alpha + n)E_{\mu_j} + 4r^{2(1-\gamma)}\Lambda_j)u_{jn} = 0, j = \overline{1, q}, \quad (4.11)$$

здесь E_{μ_j} – единичная матрица порядка μ_j , $[u_{1n}, \dots, u_{qn}] = S^{-1}w_n$, u_{jn} – вектор размера μ_j . Так как Λ_j диагональные, то все координаты вектора u_{jn} удовлетворяют одному и тому же уравнению вида

$$r^2 v'' + (2\alpha + 1)rv' - (n(2\alpha + n) + 4r^{2(1-\gamma)}\lambda_j)v = 0, \quad (4.12)$$

v – скалярная функция.

Уравнение (4.12) является родственным к уравнению Бесселя и является частным случаем уравнения

$$r^2 v'' + arv' + (br^m + c)v = 0, m \neq 0 \quad (4.13)$$

из [43, с. 401]. Общее решение уравнения (4.13) определяется так:

$$\text{при } b \neq 0: v(r) = r^{\frac{1-a}{2}} Z_\nu \left(\frac{2}{m} \sqrt{br^{\frac{m}{2}}} \right), \quad \nu = \frac{1}{m} \sqrt{(1-a)^2 - 4c},$$

$$\text{«при } b = 0: v(r) = \begin{cases} C_1 r^{\frac{1-a+\mu}{2}} + C_2 r^{\frac{1-a-\mu}{2}}, & \text{если } \mu = \sqrt{(1-a)^2 - 4c} \neq 0, \\ r^{\frac{1-a}{2}} (C_1 + C_2 \ln r), & \text{если } (1-a)^2 - 4c = 0. \end{cases}$$

Z_ν – цилиндрические функции, C_1, C_2 – произвольные комплексные постоянные» [14-A].

В случае уравнения (4.12) имеем:

$$a = 2\alpha + 1, b = -4\lambda_j, c = -n(2\alpha + n), m = 2(1 - \gamma).$$

При $\gamma \neq 1$ находим $\nu = \frac{|\alpha+n|}{1-\gamma}$ и если $\lambda_j \neq 0$, то общее решение уравнения (4.12) имеет вид

$$v(r) = r^{-\alpha} Z_\nu \left(\frac{2i\sqrt{\lambda_j}}{1-\gamma} r^{1-\gamma} \right). \quad (4.14)$$

При $\gamma = 1$ (соответственно $\lambda_j = 0$) в уравнении (4.12) коэффициент при v будет постоянным и нужно взять $b = 0, c = -[n(2\alpha + n) + 4\lambda_j]$ (соответственно $c = -n(2\alpha + n)$) и найти μ :

$$\mu = \sqrt{4\alpha^2 + 4[n(2\alpha + n) + 4\lambda_j]} = 2\sqrt{(\alpha + n)^2 + 4\lambda_j}$$

(соответственно $\mu = 2|\alpha + n|$).

Тогда общее решение уравнения (4.12) записывается в виде

$$v(r) = \begin{cases} C_1 r^{-\alpha + \frac{\mu}{2}} + C_2 r^{-\alpha - \frac{\mu}{2}} & \text{при } \mu \neq 0, \\ r^{-\alpha} (C_1 + C_2 \ln r) & \text{при } \mu = 0, \end{cases} \quad (4.15)$$

C_1, C_2 — произвольные комплексные постоянные.

Итак, справедлива следующая

Теорема 4.1. Пусть число $s = \beta - \alpha - 1$ нечетное и все собственные значения λ_j матрицы $A\bar{A}$ полупростые. Тогда общее решение системы (2) имеет вид

$$w = \sum_{n \geq p}^{\infty} \{w_n(r) e^{in\varphi} + w_{p-n} e^{i(p-n)\varphi}\}, \quad (4.16)$$

здесь $p = \frac{s+1}{2}$, $w_n(r) = S[u_{1n}, \dots, u_{qn}]$, S — матрица, столбцы которой состоят из собственных векторов матрицы $A\bar{A}$, отвечающих собственным значениям λ_j , координаты вектор-функций u_{jn} в зависимости от значений α, β и λ_j определяются по формулам (4.14) или (4.15), а вектор-функции w_{p-n} определяются из системы (4.9).

Замечание — Для $m = 2, 3$ в работах [16], [17] исследованы вопросы о собственных значениях матрицы $A\bar{A}$ и их расположении на плоскости.

[illegible]

где $\varepsilon = 2\alpha + 1$, $\delta = n(2\alpha + n) + 4r^{2(1-\gamma)}\lambda_S$. Последнее уравнение этой системы имеет вид (4.12) и его общее решение запишется формулой вида (4.14) или (4.15). Предпоследнее уравнение системы (4.17) является неоднородным, которого можно решить методом вариации произвольных постоянных (см. лемму ниже). Далее двигаясь вверх по системе (4.17), можно найти общее решение этой системы.

$$Lv \equiv r^2 v'' + (2\alpha + 1)rv' - (n(2\alpha + n) + 4r^{2(1-\gamma)}\lambda_i)v = f(r). \quad (4.18)$$
$$Z_\nu = C_1 J_\nu + C_2 Y_\nu,$$

Справедлива следующая лемма об общем решении уравнения (4.18).

Лемма 4.1. Пусть $\gamma \neq 1$ и $\lambda_j \neq 0$. Тогда общее решение неоднородного уравнения (4.18) имеет вид

$$v(r) = \frac{r^{-\alpha}}{\gamma - 1} \left\{ J_\nu \left[C_1 + \int r^{3+\alpha} Y_\nu f(r) dr \right] - Y_\nu \left[C_2 + \int r^{3+\alpha} J_\nu f(r) dr \right] \right\}, \quad (4.19)$$

здесь всюду бесселевы функции зависят от аргумента $\frac{2i\sqrt{\lambda_j}}{1-\gamma} r^{1-\gamma}$, C_1, C_2 — произвольные комплексные постоянные.

Доказательство проводится методом вариации произвольных постоянных [34] с использованием формулы (4.14). В следующем параграфе для частного случая будет приведено доказательство такого утверждения.

Привлекая формулу (4.15) можно получить формулу общего решения неоднородного уравнения (4.18) и при других значениях γ и λ_j .

Таким образом, мы получили схему построения общего решения системы (2), когда число $s = \beta - \alpha - 1$ является нечетным.

Случай 2: s — четное. Тогда $n = s - n$ при $n = \frac{s}{2}$, при этом значении n в системе (4.5) входит одна неизвестная вектор-функция $w_{s/2}$:

$$w'_{s/2} - \frac{s}{2r} w_{s/2} + \frac{2}{r^2} A \bar{w}_{s/2} = 0.$$

Отсюда для $w_{s/2}$ получаем уравнение вида (4.8) с $n = \frac{s}{2}$, из которого определяем $w_{s/2}$.

Далее будем считать, что $n > \frac{s}{2}$ и повторяем схему, изложенную для случая нечетного s .

Для наглядности приведем примеры.

Пример 1. Пусть в системе (4.2) матрица коэффициентов A антидиагональная, т.е. все элементы, расположенные вне второй (неглавной) диагонали равны нулю. Для удобства элементы, расположенные на второй

диагонали обозначим через $a_1, a_2, \dots, a_m$. Тогда матрица $A\bar{A}$ будет диагональным, а именно,

$$A\bar{A} = \text{diag}[a_1\bar{a}_m, a_2\bar{a}_{m-1}, \dots, a_m\bar{a}_1].$$

Поэтому собственные значения матрицы $A\bar{A}$ будут полупростыми и равны $\lambda_j = a_j\bar{a}_{m-j+1}$. Следовательно, в этом случае справедливо утверждение типа теоремы 4.1.

При $a_j \neq 0 \ \forall j = 1, \dots, m$ все λ_j будут ненулевыми и все вектор-функции u_{jn} определяются по формуле (4.14). Если среди чисел a_j есть нулевое, например, $a_k = 0$, то $\lambda_k = \lambda_{m-k+1} = 0$ и вектор-функции u_{kn} и $u_{m-k+1,n}$ определяются по формуле (4.15).

Пример 2. Рассмотрим случай, когда матрица A является треугольной с элементами $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$ на главной диагонали. Тогда матрица $A\bar{A}$ будет треугольной и его собственные значения равны $\lambda_j = |a_{jj}|^2$. Если эти собственные значения являются полупростыми, то в этом случае верны аналогичные заключения из примера 1.

4.2. Системы с треугольной матрицей

В этом параграфе рассмотрим случай двумерной системы. А именно, о.с.к.р. вида

$$w_{\bar{z}} + \frac{1}{z^\alpha \bar{z}^\beta} A \bar{w} = 0, \quad (4.20)$$

где $w \in \mathbb{C}^2$ – комплексное двумерное пространство, α, β – вещественные числа, такие что $\alpha + \beta > 0$ и $\alpha - \beta$ – целое, $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ – комплексная ненулевая матрица. Для этой системы будет найдено общее решение.

Пусть $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $u = u(z)$, $v = v(z)$ – искомые функции. Тогда в полярных координатах система (4.20) примет вид:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_r + \frac{i}{r} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_\varphi + \frac{2}{r^{\alpha+\beta}} e^{i(\beta-\alpha-1)\varphi} A \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = 0, \quad (4.21)$$

здесь $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Раскроем систему (4.21):

$$u_r + \frac{i}{r} u_\varphi + \frac{2}{r^\gamma} e^{is\varphi} (a\bar{u} + c\bar{v}) = 0, \quad (4.22)$$

$$v_r + \frac{i}{r} v_\varphi + \frac{2b}{r^\gamma} e^{is\varphi} \bar{v} = 0, \quad (4.23)$$

где $\gamma = \alpha + \beta$, $s = \beta - \alpha - 1$.

Решения уравнения (4.23) будем искать в виде ряда

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(r) e^{in\varphi}, \quad (4.24)$$

где $v_n(r)$ — неизвестные функции. Подставляя в (4.23) имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(v'_n - \frac{n}{r} v_n \right) e^{in\varphi} + \frac{2b}{r^\gamma} e^{i(s-n)\varphi} \bar{v}_n \right] = 0.$$

Заменяя в ряде $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{v}_n e^{i(s-n)\varphi}$ индекс n на $s - n$, для коэффициентов $v_n(r)$ получим следующее уравнение

$$v'_n - \frac{n}{r} v_n + \frac{2b}{r^\gamma} \bar{v}_{s-n} = 0, n \in Z. \quad (4.25)$$

При $b = 0$ получаем $v'_n - \frac{n}{r} v_n = 0$. Отсюда $v_n = C_n r^n$, C_n — произвольная комплексная постоянная и поэтому

$$v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n r^n e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n,$$

т.е. функция v является произвольной а.ф.

Далее будем считать, что $b \neq 0$. Заменяя в (4.25) n на $s - n$ и переходя к комплексно-сопряженным величинам, получаем еще одно уравнение

$$\bar{v}'_{s-n} + \frac{2\bar{b}}{r^\gamma} v_n - \frac{s-n}{r} \bar{v}_{s-n} = 0, n \in Z. \quad (4.26)$$

Рассмотрим два возможных случая: 1) s — нечетное; 2) s — четное.

Случай 1): s — нечетное. В этом случае $n \neq s - n \forall n \in Z$. Уравнения (4.25) и (4.26) будем рассматривать как систему о.д.у. с неизвестными функциями $v_n(r)$ и $\omega_n(r) = \bar{v}_{s-n}(r)$:

$$\begin{cases} v'_n - \frac{n}{r}v_n + \frac{2b}{r^\gamma}\omega_n = 0, \\ \omega'_n + \frac{2\bar{b}}{r^\gamma}v_n - \frac{s-n}{r}\omega_n = 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Когда n меняется от $p = \frac{s+1}{2}$ до $+\infty$ выражение $s - n$ меняется от $p - 1$ до $-\infty$. Поэтому в системе (4.27) можно полагать, что $n \geq p$. Из этой системы легко получить о.д.у. второго порядка:

$$v''_n + \frac{\gamma - s}{r}v'_n - \left(\frac{n(n - s + \gamma - 1)}{r^2} + \frac{4|b|^2}{r^{2\gamma}} \right) v_n = 0$$

или

$$r^2 v''_n + (2\alpha + 1)rv'_n - (n(2\alpha + n) + 4|b|^2 r^{2(1-\gamma)})v_n = 0. \quad (4.28)$$

Из уравнения (4.28) определим $v_n(r)$ для индексов $n \geq p$, а остальные $v_{s-n}(r)$ находим по формуле

$$v_{s-n}(r) = \frac{r^\gamma}{2\bar{b}} \left[-\bar{v}'_n(r) + \frac{n}{r}\bar{v}_n(r) \right], \quad (4.29)$$

которая следует из уравнения (4.25).

Уравнение (4.28) является родственным к уравнению Бесселя и является частным случаем уравнения

$$r^2 v'' + a_1 r v' + (b_1 r^m + c_1)v = 0, m \neq 0 \quad (4.30)$$

из [43, с. 401]. Общее решение уравнения (4.30) определяется так:

при $b_1 \neq 0$: $v(r) = r^{\frac{1-a_1}{2}} Z_\nu \left(\frac{2}{m} \sqrt{b_1} r^{\frac{m}{2}} \right)$, $\nu = \frac{1}{m} \sqrt{(1-a_1)^2 - 4c_1}$,

при $b_1 = 0$:

$$v(r) = \begin{cases} C_1 r^{\frac{1-a_1+\mu}{2}} + C_2 r^{\frac{1-a_1-\mu}{2}}, & \text{если } \mu = \sqrt{(1-a_1)^2 - 4c_1} \neq 0, \\ r^{\frac{1-a_1}{2}} (C_1 + C_2 \ln r), & \text{если } (1-a_1)^2 - 4c_1 = 0, \end{cases}$$

Z_ν – цилиндрические функции, C_1, C_2 – произвольные комплексные постоянные.

В случае уравнения (4.28) имеем:

$$a_1 = 2\alpha + 1, b_1 = -4|b|^2, c_1 = -n(2\alpha + n), m = 2(1 - \gamma).$$

При $\gamma \neq 1$ находим $\nu = \frac{|\alpha+n|}{1-\gamma}$ и общее решение уравнения (4.28) имеет вид

$$v_n(r) = r^{-\alpha} Z_\nu \left(\frac{4i|b|}{1-\gamma} r^{1-\gamma} \right). \quad (4.31)$$

При $\gamma = 1$ в уравнении (4.28) коэффициент при v_n будет постоянным и нужно взять $b_1 = 0, c_1 = -[n(2\alpha + n) + 4|b|^2]$ и найти μ :

$$\mu = \sqrt{4\alpha^2 + 4[n(2\alpha + n) + 4|b|^2]} = 2\sqrt{(\alpha + n)^2 + 4|b|^2} > 0.$$

Тогда общее решение уравнения (4.28) записывается в виде

$$v_n(r) = C_1 r^{-\alpha + \frac{\mu}{2}} + C_2 r^{-\alpha - \frac{\mu}{2}}, \quad (4.32)$$

C_1, C_2 – произвольные комплексные постоянные.

Итак, в случае когда $s = \beta - \alpha - 1$ нечетное и $b \neq 0$ мы определили компоненту v решения системы (4.20) в виде ряда (4.24), в котором коэффициенты $v_n(r)$ в зависимости от значения $\gamma = \alpha + \beta$ находятся по формуле (4.31) или (4.32); при $b = 0$ функция v является произвольной аналитической функцией.

Если подставить v в уравнение (4.22), то для компоненты u получим неоднородное уравнение вида

$$u_r + \frac{i}{r} u_\varphi + \frac{2a}{r^\gamma} e^{is\varphi} \bar{u} = -\frac{2c}{r^\gamma} e^{is\varphi} \bar{v}. \quad (4.33)$$

Решения уравнения (4.33) будем искать в виде ряда

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(r) e^{in\varphi},$$

где $u_n(r)$ – неизвестные функции. Подставляя в (4.33) имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(u'_n - \frac{n}{r} u_n \right) e^{in\varphi} + \frac{2a}{r^\gamma} e^{i(s-n)\varphi} \bar{u}_n \right] = -\frac{2c}{r^\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{v}_n e^{i(s-n)\varphi},$$

где $v_n(r)$ – известные функции, которых мы определили выше. В суммах, содержащих комплексные сопряжения функций заменим n на $s - n$ и в результате приходим к следующему неоднородному уравнению для $u_n(r)$:

$$u'_n - \frac{n}{r} u_n + \frac{2a}{r^\gamma} \bar{u}_{s-n} = -\frac{2c}{r^\gamma} \bar{v}_{s-n}, n \in Z. \quad (4.34)$$

Отсюда по аналогии с уравнением (4.26) получим еще одно уравнение

$$\bar{u}'_{s-n} + \frac{2\bar{a}}{r^\gamma} u_n - \frac{s-n}{r} \bar{u}_{s-n} = -\frac{2\bar{c}}{r^\gamma} v_n, n \in Z. \quad (4.35)$$

Из уравнений (4.34) и (4.35) можно получить дифференциальное уравнение второго порядка. Не вдаваясь в подробности, приведем окончательный результат:

$$r^2 u_n'' - (n + \gamma) r u_n' + (n(\gamma + 1) - 4|a|^2 r^{2(1-\gamma)}) u_n = f_n(r), \quad (4.36)$$

где $f_n = 4(a\bar{c} + \bar{b}c) r^{2(1-\gamma)} v_n + 4c\gamma r^{1-\gamma} \bar{v}_{s-n}$.

Как и в случае уравнения (4.28), при $a \neq 0$ из уравнения (4.36) определим $u_n(r)$ для индексов $n \geq p = \frac{s+1}{2}$, а остальные $u_{s-n}(r)$ находим по формуле

$$u_{s-n}(r) = \frac{r^\gamma}{2\bar{a}} \left[-\bar{u}'_n(r) + \frac{n}{r} \bar{u}_n(r) - \frac{2c}{r^\gamma} \bar{v}_{s-n} \right], \quad (4.37)$$

которая следует из уравнения (4.34).

Неоднородное уравнение (4.36) можно решить методом вариации произвольных постоянных (см. ниже лемму 4.2).

При $a = 0$ из уравнения (4.34) получим

$$u'_n - \frac{n}{r} u_n = -\frac{2c}{r^\gamma} \bar{v}_{s-n}, n \in Z.$$

Отсюда находим

$$u_n(r) = r^n \left(c_n - 2c \int \frac{\bar{v}_{s-n}}{r^{n+\gamma}} dr \right), \quad (4.38)$$

где c_n — произвольная комплексная постоянная.

Пусть $a \neq 0$. В начале найдем общее решение $u_{n0}(r)$ однородного уравнения

$$r^2 u_n'' - (n + \gamma) r u_n' + (n(\gamma + 1) - 4|a|^2 r^{2(1-\gamma)}) u_n = 0, \quad (4.39)$$

которое относится к уравнениям вида (4.30) с

$$a_1 = -(n + \gamma), b_1 = -4|a|^2, c_1 = n(\gamma + 1), m = 2(1 - \gamma).$$

При $\gamma \neq 1$ находим:

$$\nu = \frac{1}{m} \sqrt{(1 - a_1)^2 - 4c_1} = \frac{1}{2(1 - \gamma)} \sqrt{(1 + n + \gamma)^2 - 4n(\gamma + 1)} = \frac{|n - 1 - \gamma|}{2(1 - \gamma)}.$$

Поэтому

$$u_{n0}(r) = r^{\frac{1+n+\gamma}{2}} Z_\nu \left(\frac{i|a|}{1-\gamma} r^{1-\gamma} \right). \quad (4.40)$$

Относительно неоднородного уравнения (4.36) справедлива следующая

Лемма 4.2. Пусть $\gamma \neq 1$ и $a \neq 0$. Тогда общее решение неоднородного уравнения (4.36) имеет вид

$$u_n(r) = \frac{\pi r^\delta}{4(1 - \gamma)} \left\{ J_\nu \left[C_1 + \int r^{3-\delta} Y_\nu f_n(r) dr \right] - Y_\nu \left[C_2 + \int r^{3-\delta} J_\nu f_n(r) dr \right] \right\}, \quad (4.41)$$

здесь $\delta = \frac{1+n+\gamma}{2}$, всюду бесселевы функции зависят от аргумента $\frac{|a|i}{1-\gamma} r^{1-\gamma}$, C_1 ,

C_2 — произвольные комплексные постоянные, $f_n(r) = 4(a\bar{c} + \bar{b}c)r^{2(1-\gamma)}v_n + 4c\gamma r^{1-\gamma}\bar{v}_{s-n}$.

Доказательство. Так как

$$Z_\nu = C_1 J_\nu + C_2 Y_\nu,$$

J_ν, Y_ν – бesselевы функции первого и второго рода (см. [27], [110]), C_1, C_2 – комплексные постоянные, то общее решение неоднородного уравнения (4.36) будем искать в виде

$$u(r) = r^\delta [C_1(r)J_\nu + C_2(r)Y_\nu], \quad (4.42)$$

где

$\delta = \frac{1+n+\gamma}{2}$, $C_1(r), C_2(r)$ – неизвестные функции, бesselевы функции зависят от аргумента $\frac{i|a|}{1-\gamma} r^{1-\gamma}$. Имеем

$$u'(r) = (r^\delta J_\nu)' C_1(r) + r^\delta J_\nu C_1'(r) + (r^\delta Y_\nu)' C_2(r) + r^\delta Y_\nu C_2'(r).$$

Предположим, что

$$J_\nu C_1'(r) + Y_\nu C_2'(r) = 0. \quad (4.43)$$

Тогда

$$u''(r) = (r^\delta J_\nu)'' C_1(r) + (r^\delta J_\nu)' C_1'(r) + (r^\delta Y_\nu)'' C_2(r) + (r^\delta Y_\nu)' C_2'(r).$$

Подставляя выражения для $u(r), u'(r), u''(r)$ в уравнение (4.36), с учетом того что функции $r^\delta J_\nu$ и $r^\delta Y_\nu$ являются решениями однородного уравнения (4.39), получим

$$r^2 \left[(r^\delta J_\nu)' C_1'(r) + (r^\delta Y_\nu)' C_2'(r) \right] = f_n(r). \quad (4.44)$$

Из системы уравнений (4.42), (4.43) находим $C_1'(r), C_2'(r)$ и далее интегрируя, имеем

$$C_1(r) = \frac{1}{2i|a|} \int \frac{r^{2+\gamma-\delta} Y_v}{J_v' Y_v - J_v Y_v'} f_n(r) dr + C_{10},$$

$$C_2(r) = -\frac{1}{2i|a|} \int \frac{r^{2+\gamma-\delta} J_v}{J_v' Y_v - J_v Y_v'} f_n(r) dr + C_{20},$$

где C_{10}, C_{20} — произвольные комплексные постоянные.

Согласно свойствам функций Бесселя (см. [43], с. 402]), имеет место соотношение

$$J_v'(r) Y_v(r) - J_v(r) Y_v'(r) = \frac{2}{\pi r}.$$

Поэтому формулы для $C_1(r)$ и $C_2(r)$ примут вид

$$C_1(r) = \frac{\pi}{4(1-\gamma)} \int r^{3-\delta} Y_v f_n(r) dr + C_{10},$$

$$C_2(r) = -\frac{\pi}{4(1-\gamma)} \int r^{3-\delta} J_v f_n(r) dr + C_{20}.$$

Подставляя эти выражения в (4.42) получим формулу (4.41).

Таким образом, мы получили схему построения общего решения системы (4.20), когда число $s = \beta - \alpha - 1$ является нечетным.

Справедлива следующая

Теорема 4.2. Пусть число $s = \beta - \alpha - 1$ нечетное и $(1-\gamma)ab \neq 0$. Тогда общее решение системы (4.20) имеет вид

$$w = \sum_{n \geq p}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} e^{in\varphi} + \begin{pmatrix} u_{s-n}(r) \\ v_{s-n}(r) \end{pmatrix} e^{i(s-n)\varphi} \right\}, \quad (4.45)$$

здесь $p = \frac{s+1}{2}$, функции $u_n(r), v_n(r), u_{s-n}(r), v_{s-n}(r)$ определяются по формулам (4.41), (4.31), (4.37), (4.29) соответственно.

Замечание - Аналогичное утверждение можно сформулировать и для случая $(1 - \gamma)ab = 0$.

Теперь рассмотрим случай s – четное. Тогда $n = s - n$ при $n = \frac{s}{2}$, при этом значении n в уравнение (4.25) входит одна неизвестная функция $v_{s/2}$:

$$v'_{s/2} - \frac{s}{2r} v_{s/2} + \frac{2b}{r\gamma} \bar{v}_{s/2} = 0.$$

Отсюда для $v_{s/2}$ получаем уравнение вида (4.28) с $n = \frac{s}{2}$, из которого определяем $v_{s/2}$.

Неизвестная функция $u_{s/2}$ находится из неоднородного уравнения вида (4.36) с $n = \frac{s}{2}$.

Далее будем считать, что $n > \frac{s}{2}$ и повторяя схему, изложенную для случая нечетного s , можно определить функции $u_n(r), v_n(r), u_{s-n}(r), v_{s-n}(r)$ и получить формулу общего решения системы (4.20) и в случае четного s .

4.3. Задача Римана-Гильберта для системы с антидиагональной матрицей

Граничные задачи типа задачи Римана-Гильберта для о.с.к.р. (4.1), а также более общие задачи изучены в трудах И.Н. Векуа, его учеников и последователей (см., например, [1], [2], [28]). Для систем вида (1) с сингулярными коэффициентами в работах Л.Г. Михайлова, Н. Раджабова, З.Д. Усманова и их учеников построена общая теория (см., например, [48], [65], [98]). В случае, когда коэффициенты системы (1) определены и ограничены на всей комплексной плоскости C в ряде работ С. Байзаева и Э. Мухамадиева исследованы граничные задачи типа задачи Римана-Гильберта, сопряжения и задача об ограниченных на всей плоскости решениях (см., например, [13] – [15]).

В этом параграфе для двумерной о.с.к.р. вида

$$w_{\bar{z}} + \frac{1}{z^\alpha \bar{z}^\beta} A \bar{w} = 0, \quad (4.46)$$

где $w \in C^2$ – комплексное двумерное пространство, α, β – вещественные числа, такие что $\alpha + \beta > 0$ и $\alpha - \beta$ – целое, $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ – комплексная ненулевая матрица, рассматриваются вопросы о представлении общего решения и построения решения граничной задачи типа задачи Римана-Гильберта.

4.4.1. Построение общего решения. Пусть $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $u = u(z)$, $v = v(z)$ – искомые функции. Тогда в полярных координатах система (4.46) примет вид:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_r + \frac{i}{r} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_\varphi + \frac{2}{r^{\alpha+\beta}} e^{i(\beta-\alpha-1)\varphi} A \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = 0, \quad (4.47)$$

здесь $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Систему (4.47) запишем в развернутом виде

$$u_r + \frac{i}{r} u_\varphi + \frac{2a}{r^\gamma} e^{is\varphi} \bar{v} = 0, \quad (4.48)$$

$$v_r + \frac{i}{r} v_\varphi + \frac{2b}{r^\gamma} e^{is\varphi} \bar{u} = 0, \quad (4.49)$$

где $\gamma = \alpha + \beta, s = \beta - \alpha - 1$.

Решения системы уравнений (4.48), (4.49) будем искать в виде ряда

$$\begin{pmatrix} u(r, \varphi) \\ v(r, \varphi) \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} e^{in\varphi},$$

где $u_n(r), v_n(r)$ — неизвестные функции. Подставляя в (4.48), (4.49) имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(u'_n - \frac{n}{r} u_n \right) e^{in\varphi} + \frac{2a}{r^\gamma} e^{i(s-n)\varphi} \bar{v}_n \right] = 0, \quad (4.50)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(v'_n - \frac{n}{r} v_n \right) e^{in\varphi} + \frac{2b}{r^\gamma} e^{i(s-n)\varphi} \bar{u}_n \right] = 0. \quad (4.51)$$

В (4.50) и (4.51) заменяя в рядах

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{u}_n e^{i(s-n)\varphi} \text{ и } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{v}_n e^{i(s-n)\varphi}$$

индекс n на $s - n$, для коэффициентов $u_n(r)$ и $v_n(r)$ получим следующие уравнения

$$u'_n - \frac{n}{r} u_n + \frac{2a}{r^\gamma} \bar{v}_{s-n} = 0, n \in \mathbb{Z}, \quad (4.52)$$

$$v'_n - \frac{n}{r}v_n + \frac{2b}{r^\gamma}\bar{u}_{s-n} = 0, n \in Z. \quad (4.53)$$

При $a = 0$ получаем $u'_n - \frac{n}{r}u_n = 0$. Отсюда

$$u_n = C_n r^n, \quad (4.54)$$

где C_n — произвольная комплексная постоянная и поэтому

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n r^n e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n,$$

т.е. функция u является произвольной а.ф.

Подставляя выражение для u_n в (4.53) получим неоднородное уравнение

$$v'_n - \frac{n}{r}v_n = -\frac{2b\bar{C}_n}{r^{\gamma-n+s}}, n \in Z,$$

интегрируя которое имеем

$$v_n(r) = \begin{cases} r^n \left(D_n + \frac{b\bar{C}_n}{(1-\beta)r^{2(\beta-1)}} \right) & \text{при } \beta \neq 1, \\ r^n (D_n - 2b\bar{C}_n \ln r) & \text{при } \beta = 1, \end{cases} \quad (4.55)$$

где D_n — произвольная комплексная постоянная.

Аналогично при $b = 0$ находим

$$v_n = C_n r^n, \quad (4.56)$$

$$u_n(r) = \begin{cases} r^n \left(D_n + \frac{a\bar{C}_n}{(1-\beta)r^{2(\beta-1)}} \right) & \text{при } \beta \neq 1, \\ r^n (D_n - 2b\bar{C}_n \ln r) & \text{при } \beta = 1, \end{cases} \quad (4.57)$$

C_n, D_n — произвольные комплексные постоянные.

Далее будем считать, что $ab \neq 0$. Заменяя в (4.53) n на $s - n$ и переходя к комплексно-сопряженным величинам, получаем еще одно уравнение

$$\bar{v}'_{s-n} + \frac{2\bar{b}}{r^\gamma} u_n - \frac{s-n}{r} \bar{v}_{s-n} = 0, n \in Z. \quad (4.58)$$

Уравнения (4.52) и (4.58) образуют систему о.д.у. с неизвестными функциями $u_n(r)$ и $\omega_n(r) = \bar{v}_{s-n}(r)$:

$$\begin{cases} u'_n - \frac{n}{r} u_n + \frac{2a}{r^\gamma} \omega_n = 0, \\ \omega'_n + \frac{2\bar{b}}{r^\gamma} u_n - \frac{s-n}{r} \omega_n = 0, \end{cases} \quad n \in Z. \quad (4.59)$$

Из этой системы легко получить дифференциальное уравнение второго порядка:

$$u''_n + \frac{\gamma-s}{r} u'_n - \left(\frac{n(n+2\alpha)}{r^2} + \frac{4a\bar{b}}{r^{2\gamma}} \right) u_n = 0$$

или

$$r^2 u''_n + (2\alpha + 1) r u'_n - [n(n+2\alpha) + 4a\bar{b} r^{2(1-\gamma)}] u_n = 0, n \in Z. \quad (4.60)$$

Из уравнения (4.60) определим $u_n(r)$, а $v_{s-n}(r) = \overline{\omega_n(r)}$ находим по формуле

$$v_{s-n}(r) = \frac{r^\gamma}{2\bar{a}} \left[-\bar{u}'_n(r) + \frac{n}{r} \bar{u}_n(r) \right], \quad (4.61)$$

которая следует из первого уравнения системы (4.59).

Случай $\gamma \neq 1$. В уравнение (4.50) произведем замену

$$u_n(r) = r^{-\alpha} \omega(cr^{1-\gamma}), \quad (4.62)$$

где $c = \frac{2\sqrt{a\bar{b}}}{|1-\gamma|}$. Находим производные функции $u_n(r)$:

$$u'_n(r) = -\alpha r^{-\alpha-1} \omega(cr^{1-\gamma}) + c(1-\gamma) r^{-\alpha-\gamma} \omega'(cr^{1-\gamma}),$$

$$u''_n(r) = \alpha(\alpha+1) r^{-\alpha-2} \omega(cr^{1-\gamma}) - \alpha c(1-\gamma) r^{-\alpha-\gamma-1} \omega'(cr^{1-\gamma}) -$$

$$c(1-\gamma)(\alpha+\gamma) r^{-\alpha-\gamma-1} \omega'(cr^{1-\gamma}) + c^2(1-\gamma)^2 r^{-\alpha-2\gamma} \omega''(cr^{1-\gamma}) =$$

$$c^2(1-\gamma)^2 r^{-\alpha-2\gamma} \omega''(cr^{1-\gamma}) - c(1-\gamma)(2\alpha+\gamma) r^{-\alpha-\gamma-1} \omega'(cr^{1-\gamma}) +$$

$$\alpha(\alpha+1) r^{-\alpha-2} \omega(cr^{1-\gamma}).$$

Выражения для u_n , u'_n , u''_n подставим в уравнение (4.60)

$$c^2(1-\gamma)^2 r^{2-\alpha-2\gamma} \omega''(cr^{1-\gamma}) - c(1-\gamma)(2\alpha+\gamma) r^{-\alpha-\gamma+1} \omega'(cr^{1-\gamma}) +$$

$$\alpha(\alpha+1) r^{-\alpha} \omega(cr^{1-\gamma}) - (2\alpha+1) [\alpha r^{-\alpha} \omega(cr^{1-\gamma}) - c(1-\gamma) r^{-\alpha-\gamma+1} \omega'(cr^{1-\gamma})] - [n(n+2\alpha) + 4a\bar{b}r^{2(1-\gamma)}] r^{-\alpha} \omega(cr^{1-\gamma}) = 0.$$

Умножая обе части этого равенства на $\frac{r^\alpha}{(1-\gamma)^2}$, после группировки получим

$$(cr^{1-\gamma})^2 \omega''(cr^{1-\gamma}) + (cr^{1-\gamma}) \omega'(cr^{1-\gamma}) - \left[\left(\frac{n+\alpha}{1-\gamma} \right)^2 + (cr^{1-\gamma})^2 \right] \omega(cr^{1-\gamma}) = 0.$$

Это равенство означает, что функция $\omega(t), t = cr^{1-\gamma}$ удовлетворяет следующему уравнению

$$t^2 \omega''(t) + t \omega'(t) - (v^2 + t^2) \omega(t) = 0, \quad (4.63)$$

где $v = \left| \frac{n+\alpha}{1-\gamma} \right|$. Общее решение уравнения (4.63) имеет вид (см. [82], с. 687):

$$\omega(t) = CI_v(t) + DK_v(t),$$

здесь I_v — функция Бесселя мнимого аргумента, K_v — функция Макдональда, C, D — произвольные комплексные постоянные.

Отсюда с учетом (4.62) получаем, что общее решение уравнения (4.60) дается формулой

$$u_n(r) = r^{-\alpha} [C_n I_v(cr^{1-\gamma}) + D_n K_v(cr^{1-\gamma})], \quad (4.64)$$

где C_n, D_n — произвольные комплексные постоянные.

Теперь находим неизвестную $v_{s-n}(r)$ по формуле (4.61). Имеем

$$u'_n(r) = -\alpha r^{-\alpha-1} [C_n I_v(cr^{1-\gamma}) + D_n K_v(cr^{1-\gamma})] +$$

$$c(1-\gamma)r^{-\alpha-\gamma}[C_n I'_\nu(cr^{1-\gamma}) + D_n K'_\nu(cr^{1-\gamma})].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} v_{s-n}(r) = & \frac{r^\gamma}{2\bar{a}} \left\{ \alpha r^{-\alpha-1} [\overline{C_n I_\nu(cr^{1-\gamma}) + D_n K_\nu(cr^{1-\gamma})}] - \right. \\ & \bar{c}(1-\gamma)r^{-\alpha-\gamma} [\overline{C_n I'_\nu(cr^{1-\gamma}) + D_n K'_\nu(cr^{1-\gamma})}] + \\ & \left. \frac{n}{r} \overline{r^{-\alpha} [C_n I_\nu(cr^{1-\gamma}) + D_n K_\nu(cr^{1-\gamma})]} \right\} \end{aligned}$$

или после упрощения

$$\begin{aligned} v_{s-n}(r) = & \frac{r^{\gamma-\alpha-1}}{2\bar{a}} \{ (\alpha+n) [\bar{C}_n I_\nu(\bar{c}r^{1-\gamma}) + \bar{D}_n K_\nu(\bar{c}r^{1-\gamma})] - \\ & \bar{c}(1-\gamma)r^{1-\gamma} [\bar{C}_n I'_\nu(\bar{c}r^{1-\gamma}) + \bar{D}_n K'_\nu(\bar{c}r^{1-\gamma})] \}, \end{aligned}$$

здесь мы использовали вещественность функций I_ν и K_ν .

Далее учитывая формулы для производных функций I_ν и K_ν (см. [27], с. 93)

$$I'_\nu(z) = \frac{\nu}{z} I_\nu(z) + I_{\nu+1}(z), \quad K'_\nu(z) = \frac{\nu}{z} K_\nu(z) - K_{\nu+1}(z),$$

после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} v_{s-n}(r) = & \frac{r^{\gamma-\alpha-1}}{2\bar{a}} \{ |n+\alpha|(\varepsilon_n - \varepsilon) [\bar{C}_n I_\nu(\bar{c}r^{1-\gamma}) + \bar{D}_n K_\nu(\bar{c}r^{1-\gamma})] - \\ & \bar{c}(1-\gamma)r^{1-\gamma} [\bar{C}_n I_{\nu+1}(\bar{c}r^{1-\gamma}) - \bar{D}_n K_{\nu+1}(\bar{c}r^{1-\gamma})] \}, \end{aligned} \tag{4.65}$$

где $\varepsilon_n = \operatorname{sgn}(n + \alpha)$, $\varepsilon = \operatorname{sgn}(1 - \gamma)$.

Случай $\gamma = 1$. Уравнение (4.60) примет вид

$$r^2 u_n'' + (2\alpha + 1)ru_n' - [n(n + 2\alpha) + 4a\bar{b}]u_n = 0, n \in Z. \quad (4.66)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде $u_n = r^\delta$. Имеем

$$u_n' = \delta r^{\delta-1}, u_n'' = \delta(\delta - 1)r^{\delta-2}.$$

Подставим в уравнение (4.66)

$$\delta(\delta - 1)r^\delta + (2\alpha + 1)\delta r^\delta - [n(n + 2\alpha) + 4a\bar{b}]r^\delta = 0.$$

Отсюда получаем

$$\delta^2 + 2\alpha\delta - [n(n + 2\alpha) + 4a\bar{b}] = 0. \quad (4.67)$$

Тогда $\delta = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + n(n + 2\alpha) + 4a\bar{b}}$, т. е.

$$\delta_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{(n + \alpha)^2 + 4a\bar{b}}. \quad (4.68)$$

Если $d = (n + \alpha)^2 + 4a\bar{b} \neq 0$, то общее решение уравнения (4.66) будет иметь вид

$$u_n(r) = C_n r^{\delta_1} + D_n r^{\delta_2}, \quad (4.69)$$

где C_n, D_n — произвольные комплексные постоянные; заметим, что δ_1, δ_2 зависят от n .

Если $d = 0$, то $\delta_1 = \delta_2 = -\alpha$ и в качестве фундаментальных решений уравнения (4.66) можно взять $u_n^1 = r^{-\alpha}$, $u_n^2 = r^{-\alpha} \ln r$. Тогда общее решение этого уравнения представляется в виде

$$u_n(r) = r^{-\alpha}(C_n + D_n \ln r), \quad (4.70)$$

где C_n, D_n – произвольные комплексные постоянные.

Теперь находим неизвестную $v_{s-n}(r)$ по формуле (4.61), учитывая что $\gamma = 1$. При $d \neq 0$ из (4.69) имеем

$$u'_n(r) = C_n \delta_1 r^{\delta_1-1} + D_n \delta_2 r^{\delta_2-1}.$$

Поэтому

$$v_{s-n}(r) = \frac{r}{2\bar{a}} \left[-\overline{C_n \delta_1 r^{\delta_1-1} + D_n \delta_2 r^{\delta_2-1}} + \frac{n}{r} \overline{(C_n r^{\delta_1} + D_n r^{\delta_2})} \right]$$

или

$$v_{s-n}(r) = \frac{n-1}{2\bar{a}} (\bar{C}_n \bar{\delta}_1 r^{\bar{\delta}_1} + \bar{D}_n \bar{\delta}_2 r^{\bar{\delta}_2}). \quad (4.71)$$

Аналогично при $d = 0$ используя (4.70) имеем

$$v_{s-n}(r) = \frac{r^{-\alpha}}{2\bar{a}} [(n-\alpha)(C_n + D_n \ln r) - D_n]. \quad (4.72)$$

Итак, мы нашли неизвестные $u_n(r)$ и $v_{s-n}(r)$, которые в зависимости от значения $\gamma = \alpha + \beta$ и коэффициентов системы (4.46) находятся по формулам (4.54) – (4.57), (4.64), (4.65), (4.69) – (4.72).

Таким образом, мы получили схему построения общего решения системы (4.46).

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 4.4. Пусть $\gamma = \alpha + \beta > 0$, $\alpha - \beta$ — целое и $a \neq 0, b = 0$ или $a = 0, b \neq 0$. Тогда общее решение системы (4.46) имеет вид

$$w = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} e^{in\varphi}, \quad (4.73)$$

здесь функции $u_n(r), v_n(r)$ в зависимости от значения γ и коэффициентов системы (4.46) находятся по формулам (4.54) – (4.57).

Теорема 4.5. Пусть $\gamma = \alpha + \beta > 0$, $\alpha - \beta$ — целое и $ab \neq 0$. Тогда общее решение системы (4.46) имеет вид

$$w = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n(r) e^{in\varphi} \\ v_{s-n}(r) e^{i(s-n)\varphi} \end{pmatrix}, \quad (4.74)$$

здесь $s = \beta - \alpha - 1$, функции $u_n(r), v_{s-n}(r)$ в зависимости от значения γ и коэффициентов системы (4.46) находятся по формулам (4.64), (4.65), (4.69) – (4.72).

Замечания. 1. Сходимость рядов (4.73) и (4.74) и их первых производных можно обеспечить за счет выбора произвольных постоянных C_n, D_n и учета свойств функций I_ν и K_ν (это будет продемонстрировано при решении граничной задачи типа задачи Римана-Гильберта).

2. О классе решений системы (4.46) будет сказано в дальнейшем.

3. Для решений, непрерывных в нуле нужно требовать условия

$$u_n(0) = v_n(0) = 0 \quad \forall n \neq 0. \quad (4.75)$$

4.4.2. Граничная задача типа задачи Римана-Гильберта. Пусть G — открытый круг $\{z: |z| < 1\}$. Для системы (4.46) будем изучать следующую граничную задачу.

Задача I. Найти решение $w(z) = \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix}$ системы (4.46) из класса $C^1(G \setminus 0) \cap C(\bar{G})$, удовлетворяющее граничному условию

$$u(e^{i\varphi}) = h(\varphi), \quad (4.76)$$

здесь $h(\varphi)$ – заданная непрерывная 2π -периодическая функция.

Рассмотрим случай $ab \neq 0$ и $\gamma \neq 1$. Для нахождения решений задачи I будем использовать представление (4.74) и условия (4.75), (4.76).

При $r \rightarrow 0$ функции I_ν, K_ν имеют следующие асимптотики (см. [82], с. 688):

$$I_\nu(r) \sim r^\nu, \quad K_\nu(r) \sim r^{-\nu}.$$

Поэтому при $r \rightarrow 0$ имеем:

$$I_\nu(cr^{1-\gamma}) \sim r^{\nu(1-\gamma)} = r^{\varepsilon|n+\alpha|}, \quad K_\nu(cr^{1-\gamma}) \sim r^{-\nu(1-\gamma)} = r^{-\varepsilon|n+\alpha|}. \quad (4.77)$$

Следовательно, из формул (4.64) и (4.65) получаем, что при $r \rightarrow 0$

$$u_n(r) \sim r^{-\alpha} [C_n r^{\varepsilon|n+\alpha|} + D_n r^{-\varepsilon|n+\alpha|}], \quad (4.78)$$

$$v_{s-n}(r) \sim \frac{r^{\gamma-\alpha-1}}{2\bar{a}} \{ |n+\alpha|(\varepsilon_n - \varepsilon) [\bar{C}_n r^{\varepsilon|n+\alpha|} + \bar{D}_n r^{-\varepsilon|n+\alpha|}] -$$

$$\bar{c}(1-\gamma)r^{1-\gamma} [\bar{C}_n r^{\varepsilon|n+\alpha|+1-\gamma} - \bar{D}_n r^{-\varepsilon|n+\alpha|-1+\gamma}] \}. \quad (4.79)$$

Для удобства эти формулы перепишем в виде

$$u_n(r) \sim C_n r^{\sigma_1} + D_n r^{\sigma_2}, \quad (4.80)$$

$$v_{s-n}(r) \sim \frac{1}{2\bar{a}} \{ |n + \alpha| (\varepsilon_n - \varepsilon) [\bar{C}_n r^{\sigma_1 + \gamma - 1} + \bar{D}_n r^{\sigma_2 + \gamma - 1}] - \bar{c}(1 - \gamma) [\bar{C}_n r^{\sigma_1 - \gamma + 1} - \bar{D}_n r^{\sigma_2 + \gamma - 1}] \}, \quad (4.81)$$

где $\sigma_1 = -\alpha + |n + \alpha|$, $\sigma_2 = -\alpha - |n + \alpha|$.

Рассмотрим два возможных случая: 1) $\gamma < 1$; 2) $\gamma > 1$.

Случай $\gamma < 1$. В этом случае $\varepsilon = 1$. При $\alpha \geq 0$ имеем $\sigma_2 \leq 0$ и из (4.80) следует, что для непрерывности $u_n(r)$ в точке $r = 0$, нужно взять $D_n = 0 \forall n \in Z$. Так как

$$\sigma_1 = \begin{cases} n & \text{при } n \geq -\alpha, \\ -(n + 2\alpha) & \text{при } n < -\alpha, \end{cases}$$

то при $-2\alpha \leq n < 0$ нужно взять $C_n = 0$, а при остальных n постоянные C_n будут произвольными. Далее из неравенства $\sigma_1 - \gamma + 1 > \sigma_1$ следует, что при $\alpha \geq 0$ и выбранных значениях C_n и D_n функции $u_n(r)$ и $v_{s-n}(r)$ будут непрерывными в точке $r = 0$ и определяются формулами

$$u_n(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } -2\alpha \leq n < 0, \\ C_n r^{-\alpha} I_\nu(c r^{1-\gamma}) & \text{при остальных } n, \end{cases} \quad (4.82)$$

$$v_{s-n}(r) = \frac{r^{\gamma-\alpha-1}}{2\bar{a}} \begin{cases} \bar{C}_n \bar{c}(\gamma - 1) r^{1-\gamma} I_{\nu+1}(\bar{c} r^{1-\gamma}) & \text{при } n \geq 0, \\ 0 & \text{при } -2\alpha \leq n < 0, \\ \bar{C}_n [2(n + \alpha) I_\nu(\bar{c} r^{1-\gamma}) - \\ - \bar{c}(1 - \gamma) r^{1-\gamma} I_{\nu+1}(\bar{c} r^{1-\gamma})] & \text{при } n < -2\alpha, \end{cases} \quad (4.83)$$

где C_n — произвольные комплексные постоянные.

При $\alpha < 0$ анализ показателей r в асимптотических формулах (4.80) и (4.81) показывает, что для непрерывности функций $u_n(r)$ и $v_{s-n}(r)$ в точке $r =$

0 постоянные C_n могут быть произвольными, а постоянные D_n – произвольными только при $-\alpha \leq n \leq -2\alpha$, в остальных случаях $D_n = 0$. В этом случае неизвестные $u_n(r)$ и $v_{s-n}(r)$ определяются формулами (4.64) и (4.65) соответственно с указанными выше коэффициентами C_n и D_n .

Теперь разлагая функцию $h(\varphi)$ в ряд Фурье

$$h(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n e^{in\varphi}$$

и используя граничное условие (4.66), имеем

$$u_n(1) = h_n. \quad (4.84)$$

В зависимости от знака числа α , используя формулу (4.80) или (4.82), из равенства (4.84) можно определить постоянные C_n и D_n или связь между ними.

В результате получаем теоремы о разрешимости задачи I.

Теорема 4.6. Пусть $\gamma < 1$ и $\alpha \geq 0$. Пусть число c не является нулем функции $I_\gamma(z)$ и $S = \{n \in \mathbb{Z}: -2\alpha \leq n < 0\}$. Тогда справедливы утверждения:

- i) если $S \neq \emptyset$, то задача I разрешима при условии $h_n = 0 \quad \forall n \in S$.
- ii) если $S = \emptyset$, то задача I безусловно разрешима.

Замечания. 1. Однородная задача имеет только нулевое решение.

2. Решение задачи I пишется в виде ряда (4.74) с коэффициентами, определяемыми по формулам (4.72), (4.73), в которых $C_n = \frac{h_n}{I_\gamma(c)}$.

3. В случае $S \neq \emptyset$ число условий разрешимости конечное и равно $[2\alpha]$.

4. Число c может быть нулем функции $I_\gamma(z)$ только при

$$\arg a = \arg b \pm \pi.$$

Теорема 4.7. Пусть $\gamma < 1$ и $\alpha < 0$. Пусть число c не является нулем функции $I_\gamma(z)$. Тогда задача I безусловно разрешима, при этом решение задачи

пишется в виде ряда (4.74) с коэффициентами, определяемыми по формулам (4.64), (4.65), в которых $\varepsilon = 1$, $C_n = \frac{h_n - D_n K_\nu(c)}{I_\nu(c)} \forall n \in Z$, причем постоянные D_n произвольные для $n \in S' = \{m \in Z: 0 < m < -2\alpha\}$ и $D_n = 0$ при $n \notin S'$.

Отметим, что в условиях теоремы 4.7 решение задачи I зависит от конечного числа постоянных.

Случай $\gamma > 1$. В этом случае $\varepsilon = -1$ и асимптотические формулы (4.78) и (4.79) переходят в соответствующие формулы (4.80) и (4.81) с заменой местами σ_1 и σ_2 . Поэтому рассуждая аналогично как при $\gamma < 1$ можно получить при $\alpha \geq 0$ формулы:

$$u_n(r) = \begin{cases} C_0 \text{ при } n = \alpha = 0, \\ 0 \text{ при } -2\alpha \leq n \leq 0, & \alpha > 0, \\ D_n r^{-\alpha} K_\nu(c r^{1-\gamma}) \text{ при остальных } n, \end{cases} \quad (4.82')$$

$$v_{s-n}(r) = \frac{r^{\gamma-\alpha-1}}{2\bar{\alpha}} \begin{cases} \bar{D}_n \bar{c}(\gamma-1) r^{1-\gamma} K_{\nu+1}(\bar{c} r^{1-\gamma}) \text{ при } n > 0, \\ 0 \text{ при } -2\alpha \leq n \leq 0, \\ \bar{D}_n [2(n+\alpha) K_\nu(\bar{c} r^{1-\gamma}) - \\ - \bar{c}(1-\gamma) r^{1-\gamma} K_{\nu+1}(\bar{c} r^{1-\gamma})] \text{ при } n < -2\alpha, \end{cases} \quad (4.83')$$

где C_0, D_n — произвольные комплексные постоянные.

Аналогично при $\alpha < 0$ анализируя показатели r в соответствующих асимптотических формулах получаем, что для непрерывности функций $u_n(r)$ и $v_{s-n}(r)$ в точке $r = 0$ постоянные D_n могут быть произвольными, а постоянные C_n — произвольными только при $n \in \bar{S}' = \{m: 0 \leq m \leq -2\alpha\}$, в остальных случаях $C_n = 0$. В этом случае неизвестные $u_n(r)$ и $v_{s-n}(r)$ определяются формулами (4.64) и (4.65) соответственно с указанными выше коэффициентами C_n и D_n .

Теперь используя формулы (4.64), (4.65) и условие (4.84) можно определить постоянные C_n и D_n или связь между ними и получить теоремы о разрешимости задачи I.

Теорема 4.8. Пусть $\gamma > 1$ и $\alpha \geq 0$. Пусть число c не является нулем функции $K_\nu(z)$ и $\bar{S} = \{n \in \mathbb{Z}: -2\alpha \leq n \leq 0, \alpha > 0\}$. Тогда справедливы утверждения:

i) если $\bar{S} \neq \emptyset$, то задача I разрешима при условии $h_n = 0 \quad \forall n \in \bar{S}$.

ii) если $\bar{S} = \emptyset$, то задача I безусловно разрешима.

Замечания. 1. Решение задачи I пишется в виде ряда (4.74) с коэффициентами, определяемыми по формулам (4.82'), (4.83'), в которых $D_n = \frac{h_n}{K_\nu(c)}$, C_0 — произвольная комплексная постоянная.

2. В случае $S \neq \emptyset$ число условий разрешимости конечное и равно $[2\alpha] + 1$.

Теорема 4.9. Пусть $\gamma > 1$ и $\alpha < 0$. Пусть число c не является нулем функции $K_\nu(z)$. Тогда задача I безусловно разрешима, при этом решение задачи пишется в виде ряда (4.74) с коэффициентами, определяемыми по формулам (4.64), (4.65), в которых $\varepsilon = 1$, $D_n = \frac{h_n - C_n I_\nu(c)}{K_\nu(c)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, причем постоянные C_n произвольные для $n \in \bar{S}' = \{m: 0 \leq m \leq -2\alpha\}$ и $C_n = 0$ при $n \notin \bar{S}'$.

Замечания. 1. В условиях теоремы 4.9 решение задачи I зависит от конечного числа постоянных.

2. В условиях теорем 4.7 и 4.9 решение задачи I представляется конечными суммами и эти суммы определяют функции класса C^1 .

3. В условиях теорем 4.6 и 4.8 решение задачи I представляется бесконечными суммами. Сходимость этих сумм и их первых производных можно обеспечить за счет наложения условия гладкости на граничную функцию $h(\varphi)$ и учета свойств функций I_ν и K_ν .

4. Случай $ab(\gamma - 1) = 0$ можно исследовать аналогичным образом.

ГЛАВА 5

АНАЛИЗ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Объектами исследования диссертации являются о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами вида

$$\partial_{\bar{z}}\Psi - \frac{a(z)}{2\bar{z}}\Psi - \frac{b(z)}{2\bar{z}}\bar{\Psi} = f(z), \quad z \in G, \quad (5.1)$$

в частности, с постоянными $a(z) \equiv \alpha, b(z) \equiv \lambda$ системы вида

$$\partial_{\bar{z}}\Psi - \frac{\alpha}{2\bar{z}}\Psi - \frac{\lambda}{2\bar{z}}\bar{\Psi} = f(z), z \in G, \quad (5.2)$$

а также многомерные о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами вида

$$w_{\bar{z}} + \frac{1}{z^{\alpha}\bar{z}^{\beta}}A\bar{w} = 0, \quad (5.3)$$

где $w \in \mathbb{C}^m$ – комплексное m -мерное пространство, α, β – вещественные числа, такие что $\alpha + \beta > 0$ и $\alpha - \beta$ – целое, A – комплексная матрица порядка m .

Для этих систем рассмотрены задачи построения общего решения, структурного анализа решений и граничные задачи типа задачи Римана-Гильберта и линейного сопряжения.

Системы вида (5.1) при $a = 0$ изучены в работах З.Д. Усманова и его учеников (см., например, [98]) и при соответствующих условиях получены представления решений, их свойства и решения задач типа задач Римана-Гильберта и задачи линейного сопряжения.

Развивая метод исследования указанных работ, во второй главе диссертации исследованы системы вида (5.2) при условии, что $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \neq 0$,

$\lambda \neq 0$. В начале построено общее решение однородной системы, в формуле которого участвуют пара функций $\Omega_1(z, \zeta), \Omega_2(z, \zeta)$ – аналоги ядер из теории обобщенных а.ф.

Затем установлены ряд свойств этих ядер и построен оператор, определяющий решение неоднородной системы (5.2). Наконец задача разрешимости уравнения (5.1) приведено к эквивалентной задаче разрешимости интегрального уравнения (теорема 2.1). Далее установлены вполне непрерывность оператора интегрального уравнения и оценка нормы через нормы коэффициентов и диаметра области.

Достижения этой главы обобщают результаты, выше указанных работ.

Приведем ряд результатов главы 3. Соответствующее (5.2) однородное уравнение обозначим через (5.2⁰).

Теорема 3.6. *Каждое непрерывное в G решение $\Phi(z)$ уравнения (5.2⁰) обращается в нуль в точке $z = 0$, причем порядок нуля ν определяется так:*

$$\nu = \begin{cases} \alpha - \mu_k, k = 0, 1, \dots, l_0 \text{ и } \alpha + \mu_k, k = 0, 1, \dots \text{ при } \alpha > |\lambda|, \\ \mu_k - |\alpha|, k = l_1, l_1 + 1, \dots \text{ при } \alpha < 0 \text{ и } |\alpha| > |\lambda|, \\ \alpha + \mu_k, k = 0, 1, \dots \text{ при } -|\lambda| \leq \alpha \leq |\lambda|, \end{cases}$$

где $\mu_k = \sqrt{k^2 + |\lambda|^2}$.

Теорема 3.7. *При любом t уравнение (5.2⁰) разрешимо в $C^m(G)$.*

Также установлены утверждения о существовании аналитических по z и $\bar{z}$ решений (теоремы 3.8 и 3.9) и отсутствия ненулевых решений, принадлежащих пространству $C^\infty(G)$ (теорема 3.10).

Далее для уравнения (5.2⁰) рассмотрены граничные задачи.

Задача Римана-Гильберта. *Найти в круге $G = \{z: |z| < R\}$ решения $\Phi(z)$ уравнения, из класса $C^1(G_0)$, удовлетворяющие на границе Γ условию*

$$\operatorname{Re}[z^{-m}\Phi] = h(z), z \in \Gamma. \quad (5.5)$$

Пусть

$$G^+ = \{z: |z| < R\}, \Gamma = \{z: |z| = R\} \text{ и } G^- = \{z: |z| > R\}, \bar{G}^+ = G^+ \cup \Gamma.$$

Задача сопряжения. Найти решение $\Phi^+(z)$ о.с.к.р. (5.2⁰) из класса $C(G^+ \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G^+ - 0)$, и аналитическую в области G^- функцию $\Phi^-(z)$, ограниченную при $z = \infty$ и непрерывно продолжимую на Γ , удовлетворяющие условию

$$\Phi^+(t) = t^m \Phi^-(t) + g(t), t \in \Gamma, \quad (5.6)$$

где m - целое, $g(t)$ — заданная функция.

Для этих задач получены условия разрешимости и ряд утверждений (теоремы 3.11 – 3.17). Приведем некоторые из них.

Относительно граничной задачи Римана-Гильберта справедливы следующие утверждения. Отметим, что когда в (5.5) $m = 0$ к.з. называется задача Дирихле.

Теорема 3.11. О.к.з. Дирихле при $\text{Im}(\lambda - P_{20}) \neq 0$ имеет только тривиальное решение, а н.к.з. имеет решения

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \frac{i(\bar{\lambda} - P_{20})h_0}{\text{Im}(\lambda - P_{20})} \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 + \mu_{10}} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda h_k}{\lambda + \overline{P_{1k}}} e^{ik\varphi} + \frac{\overline{P_{1k} h_k}}{\bar{\lambda} + \overline{P_{1k}}} e^{-ik\varphi} \right\} \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 + \mu_{1k}} \end{aligned}$$

Теорема 3.12. О.к.з. Дирихле при $\text{Im}(\lambda - P_{20}) = 0$ имеет одно линейно независимое решение $i(\bar{\lambda} - P_{20})c_0 r^{\alpha_1 + \mu_{10}}$, где c_0 - произвольная вещественная константа. Н.к.з. имеет решение тогда и только тогда, когда $h_0 = 0$.

Теорема 3.13. Пусть $\alpha_1 = \operatorname{Re} \alpha \geq 0$. Если $|\alpha| < |\lambda|$, то о.к.з. имеет $2t$ линейно независимых (над полем вещественных чисел) решений, а н.к.з. разрешима безусловно. Общее решение последней представимо в виде

$$\Phi(z) = \Phi^*(z) + H(z),$$

где $\Phi^*(z)$ задаётся формулой (3.42), а $H(z)$ формулой (3.43).

Теорема 3.14. Пусть $\alpha_1 = \operatorname{Re} \alpha \geq 0$. Если $|\alpha| \geq |\lambda|$, то о.к.з. имеет $4t$ линейно независимых (над полем вещественных чисел) решений, а н.к.з. разрешима безусловно и решения имеет вид

$$\Phi(z) = \Phi^*(z) + \Phi^{**}(z) + H(z).$$

Отметим, что в условиях теорем 3.13 и 3.14 найдены формулы решений.

Теорема 3.15. О.к.з. имеет только нулевое решение. Н.к.з. разрешима в том и только том случае, когда для функции $h(z)$ выполняются $2|m|$ вещественных условий $(3.44)_0$, $(3.44)_p$, $(3.44)_m$. При выполнении этих условий решение задачи даётся формулой (3.45).

Относительно задачи сопряжения справедливы следующие утверждения.

Теорема 3.16. При $t \geq 1$ однородная задача сопряжения имеет $2t + 1$ линейно независимых решения. Неоднородная задача всегда имеет решение.

При этом найдены формулы для решений.

Теорема 3.17. При $t < 0$ однородная задача сопряжения имеет только нулевое решение, а неоднородная задача разрешима в том и только том случае, когда $g(z)$ удовлетворяет $2|m| - 1$ вещественным условиям.

В конце главы для однородного уравнения (5.1⁰), соответствующего (5.1) выяснено поведение решений в окрестности особой точки.

Теорема 3.18. Для решения $\Psi(z)$ уравнения (5.1⁰) из класса $(G) \cap C_{\bar{z}}(G - 0)$ справедливо соотношение

$$\Psi(z) = \left(\beta_0 + \frac{\lambda}{|\lambda|} \beta_0 \right) r^{\alpha_1 + \mu_{10}} + O(r^{\alpha_1 + \mu_{10} + a_0}), r \rightarrow 0.$$

Если же $\Psi(z)$ подчиняется условиям вида

$$P_s a_s + \lambda \bar{a}_s = \frac{1}{2\pi} \iint_G \left[\frac{P_s}{\zeta} f(\zeta) + \frac{\lambda}{\bar{\zeta}} \overline{f(\zeta)} \right] e^{-ik\gamma} \frac{d\xi d\eta}{\rho^{\mu_s}}, (s = 0, 1, \dots, k-1)$$

где

$$a_k = \frac{R^{-\mu_k}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(Re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta, k = 0, \pm 1, \dots,$$

$$f(\zeta) = \frac{a(\zeta) - a(0)}{2\bar{\zeta}} \Psi(\zeta) + \frac{b(\zeta) - b(0)}{2\bar{\zeta}} \bar{\Psi}(\zeta),$$

то асимптотическое поведение $\Psi(z)$ в окрестности точки $z = 0$ будет характеризоваться формулой

$$\Psi(z) = \left(\frac{P_{2k}\beta_k + \lambda\bar{\beta}_k}{\mu_{1k}} e^{ik\varphi} + \frac{P_{1k}\beta_k + \lambda\bar{\beta}_k}{\mu_{1k}} e^{-ik\varphi} \right) r^{\alpha_1 + \mu_{1k}} + O(r^{\alpha_1 + \mu_{1k} + a_k}), r \rightarrow 0$$

здесь

$$\beta_k = a_k - \frac{1}{2\pi} \iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta} e^{-ik\gamma} \frac{d\xi d\eta}{\rho^{\mu_s}}, k = 0, \pm 1, \dots$$

Достижения главы 3 являются новыми и дополняют теорию о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами.

В главе 4 исследованы многомерные о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами вида (5.3). Для таких систем получен метод построения общего решения и формулы решения. Одним из главных результатов первого параграфа этой главы является следующее утверждение (см. [14-А]).

«Теорема 4.1. Пусть число $s = \beta - \alpha - 1$ нечетное и все собственные значения λ_j матрицы $A\bar{A}$ полупростые. Тогда общее решение системы (5.3) имеет вид

$$w = \sum_{n \geq p}^{\infty} \{w_n(r)e^{in\varphi} + w_{p-n}e^{i(p-n)\varphi}\}, \quad (5.4)$$

здесь $p = \frac{s+1}{2}$, $w_n(r) = S[u_{1n}, \dots, u_{qn}]$, S – матрица, столбцы которой состоят из собственных векторов матрицы $A\bar{A}$, отвечающих собственным значениям λ_j , координаты вектор-функций u_{jn} в зависимости от значений α, β и λ_j определяются по формулам:

$$v(r) = r^{-\alpha} Z_v \left(\frac{2i\sqrt{\lambda_j}}{1-\gamma} r^{1-\gamma} \right) \text{ при } (1-\gamma)\lambda_j \neq 0,$$

$$v(r) = \begin{cases} C_1 r^{-\alpha+\frac{\mu}{2}} + C_2 r^{-\alpha-\frac{\mu}{2}} & \text{если } \mu \neq 0, \\ r^{-\alpha}(C_1 + C_2 \ln r) & \text{если } \mu = 0, \end{cases} \text{ при } (1-\gamma)\lambda_j = 0,$$

Z_v – цилиндрические функции, $v = \frac{|\alpha+n|}{1-\gamma}$, $\gamma = \alpha + \beta$, C_1, C_2 – произвольные комплексные постоянные, $\mu = 2\sqrt{(\alpha+n)^2 + 4\lambda_j}$, а вектор-функции w_{p-n} определяются из системы

$$\bar{A}w_{p-n}(r) = \frac{r^\gamma}{2} \left[-\bar{w}'_n(r) + \frac{n}{r} \bar{w}_n(r) \right].$$

Аналогичное утверждение имеет место и для случая когда число $s = \beta - \alpha - 1$ является нечетным» [14-А].

Во втором параграфе рассмотрен случай двумерной системы вида (5.3) с треугольной ненулевой матрицей $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Для этой системы найдено общее решение. Приведем одно утверждение.

Теорема 4.2. Пусть число $s = \beta - \alpha - 1$ нечетное и $(1 - \gamma)ab \neq 0$. Тогда общее решение системы (5.3) имеет вид

$$w = \sum_{n \geq p}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} e^{in\varphi} + \begin{pmatrix} u_{s-n}(r) \\ v_{s-n}(r) \end{pmatrix} e^{i(s-n)\varphi} \right\}, \quad (5.5)$$

здесь $p = \frac{s+1}{2}$, функции $u_n(r), v_n(r), u_{s-n}(r), v_{s-n}(r)$ определяются по формулам:

$$u_n(r) = \frac{\pi r^\delta}{4(1-\gamma)} \left\{ J_\nu \left[C_1 + \int r^{3-\delta} Y_\nu f_n(r) dr \right] - Y_\nu \left[C_2 + \int r^{3-\delta} J_\nu f_n(r) dr \right] \right\},$$

здесь $\delta = \frac{1+n+\gamma}{2}$, $\nu = \frac{|n-1-\gamma|}{2(1-\gamma)}$, всюду бesselевы функции зависят от аргумента

$\frac{|a|i}{1-\gamma} r^{1-\gamma}$, C_1, C_2 — произвольные комплексные постоянные,

$$f_n(r) = 4(a\bar{c} + \bar{b}c)r^{2(1-\gamma)}v_n + 4c\gamma r^{1-\gamma}\bar{v}_{s-n},$$

$$v_n(r) = r^{-\alpha} Z_\nu \left(\frac{4i|b|}{1-\gamma} r^{1-\gamma} \right), \quad v_{s-n}(r) = \frac{r^\gamma}{2\bar{b}} \left[-\bar{v}'_n(r) + \frac{n}{r} \bar{v}_n(r) \right],$$

$$u_{s-n}(r) = \frac{r^\gamma}{2\bar{a}} \left[-\bar{u}'_n(r) + \frac{n}{r} \bar{u}_n(r) - \frac{2c}{r^\gamma} \bar{v}_{s-n} \right].$$

Замечание - Аналогичное утверждение можно сформулировать и для случая $(1 - \gamma)ab = 0$, а также когда число s четное.

В третьем параграфе исследована задача Римана-Гильберта для системы вида (5.3) с антидиагональной матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$. В начале построено общее решение системы, а затем из них выделены решения рассматриваемой задачи.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 4.4. Пусть $\gamma = \alpha + \beta > 0$, $\alpha - \beta$ – целое и $a \neq 0, b = 0$ или $a = 0, b \neq 0$. Тогда общее решение системы (5.3) имеет вид

$$w = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} e^{in\varphi}, \quad (5.6)$$

здесь функции $u_n(r), v_n(r)$ в зависимости от значения γ и коэффициентов системы находятся по формулам:

при $a = 0$

$$u_n = C_n r^n, \quad v_n(r) = \begin{cases} r^n \left(D_n + \frac{b \bar{C}_n}{r^{2(\beta-1)}} \right) & \text{при } \beta \neq 1, \\ r^n (D_n - 2b \bar{C}_n \ln r) & \text{при } \beta = 1, \end{cases}$$

при $b = 0$

$$v_n = C_n r^n, \quad u_n(r) = \begin{cases} r^n \left(D_n + \frac{b \bar{C}_n}{r^{2(\beta-1)}} \right) & \text{при } \beta \neq 1, \\ r^n (D_n - 2b \bar{C}_n \ln r) & \text{при } \beta = 1, \end{cases}$$

C_n, D_n – произвольные комплексные постоянные.

Теорема 4.5. Пусть $\gamma = \alpha + \beta > 0$, $\alpha - \beta$ – целое и $ab \neq 0$. Тогда общее решение системы (5.3) имеет вид

$$w = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n(r)e^{in\varphi} \\ v_{s-n}(r)e^{i(s-n)\varphi} \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

здесь $s = \beta - \alpha - 1$, функции $u_n(r), v_{s-n}(r)$ в зависимости от значения γ и коэффициентов системы находятся по формулам:

при $\gamma \neq 1$

$$u_n(r) = r^{-\alpha} [C_n I_\nu(cr^{1-\gamma}) + D_n K_\nu(cr^{1-\gamma})],$$

$$v_{s-n}(r) = \frac{r^{\gamma-\alpha-1}}{2\bar{a}} \{ |n + \alpha| (\varepsilon_n - \varepsilon) [\bar{C}_n I_\nu(\bar{c}r^{1-\gamma}) + \bar{D}_n K_\nu(\bar{c}r^{1-\gamma})] -$$

$$\bar{c}(1 - \gamma)r^{1-\gamma} [\bar{C}_n I_{\nu+1}(\bar{c}r^{1-\gamma}) - \bar{D}_n K_{\nu+1}(\bar{c}r^{1-\gamma})] \},$$

где $c = \frac{2\sqrt{a\bar{b}}}{|1-\gamma|}$, $\nu = \left| \frac{n+\alpha}{1-\gamma} \right|$, I_ν – функция Бесселя мнимого аргумента, K_ν – функция Макдональда, $\varepsilon_n = \operatorname{sgn}(n + \alpha)$, $\varepsilon = \operatorname{sgn}(1 - \gamma)$;

при $\gamma = 1$

$$u_n(r) = C_n r^{\delta_1} + D_n r^{\delta_2}, \quad v_{s-n}(r) = \frac{n-1}{2\bar{a}} (\bar{C}_n \bar{\delta}_1 r^{\bar{\delta}_1} + \bar{D}_n \bar{\delta}_2 r^{\bar{\delta}_2}),$$

если $d = (n + \alpha)^2 + 4a\bar{b} \neq 0$; $\delta_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{(n + \alpha)^2 + 4a\bar{b}}$;

$$u_n(r) = r^{-\alpha} (C_n + D_n \ln r), \quad v_{s-n}(r) = \frac{r^{-\alpha}}{2\bar{a}} [(n - \alpha)(C_n + D_n \ln r) - D_n],$$

если $d = 0$; C_n, D_n – произвольные комплексные постоянные.

Замечания. 1. Сходимость рядов (5.4) – (5.7) и их первых производных можно обеспечить за счет выбора произвольных постоянных C_n, D_n и учета свойств функций J_ν, Y_ν, I_ν и K_ν .

2. Для решений, непрерывных в нуле нужно требовать условия

$$u_n(0) = v_n(0) = 0 \quad \forall n \neq 0. \quad (5.8)$$

Далее рассмотрена граничная задача типа задачи Римана-Гильберта.

Задача I. Найти решение $w(z) = \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix}$ системы (5.3) из класса $C^1(G \setminus 0) \cap C(\bar{G})$, $G = \{z: |z| < 1\}$, удовлетворяющее граничному условию

$$u(e^{i\varphi}) = h(\varphi), \quad (5.9)$$

здесь $h(\varphi)$ – заданная непрерывная 2π -периодическая функция.

Для нахождения решений задачи I используется представление решений системы (5.3) и условия (5.8), (5.9).

В результате получены теоремы о разрешимости задачи I.

Теорема 4.6. Пусть $\gamma < 1$ и $\alpha \geq 0$. Пусть число c не является нулем функции $I_\nu(z)$ и $S = \{n \in \mathbb{Z}: -2\alpha \leq n < 0\}$. Тогда справедливы утверждения:

- i) если $S \neq \emptyset$, то задача I разрешима при условии $h_n = 0 \quad \forall n \in S$.
- ii) если $S = \emptyset$, то задача I безусловно разрешима.

Замечания. 1. Однородная задача имеет только нулевое решение.

2. Решение задачи I пишется в виде ряда (5.7) с коэффициентами, определяемыми по формулам из теоремы 4.5, в которых $C_n = \frac{h_n}{I_\nu(c)}$.

3. В случае $S \neq \emptyset$ число условий разрешимости конечное и равно $[2\alpha]$.

4. Число c может быть нулем функции $I_\nu(z)$ только при

$$\arg a = \arg b \pm \pi.$$

Теорема 4.7. Пусть $\gamma < 1$ и $\alpha < 0$. Пусть число c не является нулем функции $I_\nu(z)$. Тогда задача I безусловно разрешима, при этом решение задачи пишется в виде ряда (5.7) с коэффициентами, определяемыми по формулам из теоремы 4.5, в которых $\varepsilon = 1$, $C_n = \frac{h_n - D_n K_\nu(c)}{I_\nu(c)} \forall n \in Z$, причем постоянные D_n произвольные для $n \in S' = \{m \in Z: 0 < m < -2\alpha\}$ и $D_n = 0$ при $n \notin S'$.

Отметим, что в условиях теоремы 4.7 решение задачи I зависит от конечного числа постоянных.

Теорема 4.8. Пусть $\gamma > 1$ и $\alpha \geq 0$. Пусть число c не является нулем функции $K_\nu(z)$ и $\bar{S} = \{n \in Z: -2\alpha \leq n \leq 0, \alpha > 0\}$. Тогда справедливы утверждения:

- i) если $\bar{S} \neq \emptyset$, то задача I разрешима при условии $h_n = 0 \forall n \in \bar{S}$.
- ii) если $\bar{S} = \emptyset$, то задача I безусловно разрешима.

Замечания. 1. Решение задачи I пишется в виде ряда (5.7) с коэффициентами, определяемыми по формулам:

$$u_n(r) = \begin{cases} C_0 \text{ при } n = \alpha = 0, \\ 0 \text{ при } -2\alpha \leq n \leq 0, & \alpha > 0, \\ D_n r^{-\alpha} K_\nu(cr^{1-\gamma}) \text{ при остальных } n, \end{cases}$$

$$v_{s-n}(r) = \frac{r^{\gamma-\alpha-1}}{2\bar{a}} \begin{cases} \bar{D}_n \bar{c}(\gamma-1)r^{1-\gamma} K_{\nu+1}(\bar{c}r^{1-\gamma}) \text{ при } n > 0, \\ 0 \text{ при } -2\alpha \leq n \leq 0, \\ \bar{D}_n [2(n+\alpha)K_\nu(\bar{c}r^{1-\gamma}) - \\ - \bar{c}(1-\gamma)r^{1-\gamma} K_{\nu+1}(\bar{c}r^{1-\gamma})] \text{ при } n < -2\alpha, \end{cases}$$

где $D_n = \frac{h_n}{K_\nu(c)}$, C_0 — произвольная комплексная постоянная.

2. В случае $S \neq \emptyset$ число условий разрешимости конечное и равно $[2\alpha] + 1$.

Теорема 4.9. Пусть $\gamma > 1$ и $\alpha < 0$. Пусть число c не является нулем функции $K_\nu(z)$. Тогда задача I безусловно разрешима, при этом решение задачи пишется в виде ряда (5.7) с коэффициентами, определяемыми по формулам из

теоремы 4.5, в которых $\varepsilon = 1$, $D_n = \frac{h_n - C_n I_\nu(c)}{K_\nu(c)} \forall n \in \mathbb{Z}$, причем постоянные C_n произвольные для $n \in \bar{S}' = \{m: 0 \leq m \leq -2\alpha\}$ и $C_n = 0$ при $n \notin \bar{S}'$.

Замечания. 1. В условиях теоремы 4.9 решение задачи I зависит от конечного числа постоянных.

2. В условиях теорем 4.7 и 4.9 решение задачи I представляется конечными суммами и эти суммы определяют функции класса C^1 .

3. В условиях теорем 4.6 и 4.8 решение задачи I представляется бесконечными суммами. Сходимость этих сумм и их первых производных можно обеспечить за счет наложения условия гладкости на граничную функцию $h(\varphi)$ и учета свойств функций I_ν и K_ν .

4. Случай $ab(\gamma - 1) = 0$ можно исследовать аналогичным образом.

Из приведенных утверждений видно, что общее решение системы (5.3), а также разрешимость граничной задачи типа задачи Римана-Гильберта существенно зависят от показателей сингулярности α, β , собственных значений матрицы $A\bar{A}$, алгебраических и геометрических кратностей этих собственных значений. Все это свидетельствует о том, что исследование многомерных систем с сингулярными коэффициентами намного сложнее чем одномерные обобщенные уравнения Коши-Римана и достижения в этой области являются очень важными и перспективными.

Все результаты главы 4 являются новыми и вносят свою лепту в теорию многомерных о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами.

ВЫВОДЫ

Объектами исследования диссертации являются о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами вида (5.1), в частности, с постоянными коэффициентами $a(z) \equiv \alpha, b(z) \equiv \lambda$ (модельное уравнение), а также многомерные о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами вида (5.3).

Для этих систем изучены задачи построения общего решения, структурного анализа решений и граничные задачи типа задачи Римана-Гильберта и линейного сопряжения. По итогам исследования получены следующие новые результаты:

- построены явные формулы для решений из классов $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G \setminus \{0\})$ и $C^1(G \setminus \{0\}, \beta)$ – множество функций f , представимых в виде $f(z) = |z|^{-\beta} f_0(z)$, где $\beta > 0, f_0 \in C_{\bar{z}}(G \setminus \{0\})$ и ограниченная функция, модельной однородной системы [1-A];
- получено интегральное представление решений из класса $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G \setminus \{0\})$ модельной однородной системы [1-A], [2-A];
- построены аналоги ядер из теории регулярных о.а.ф. [1-A], [2-A], [13-A];
- представлены обобщённая формула Коши и обобщённый интеграл типа Коши, используемые для получения решений рассматриваемых уравнений [1-A], [2-A], [8-A];
- получены утверждения о порядке нуля $z = 0$ решений и о существовании решения из класса $C^m(G), m$ – произвольный, о существовании аналитических по z и $\bar{z}$ решений и отсутствия ненулевых решений, принадлежащих пространству $C^\infty(G)$, модельного однородного уравнения [7-A], [10-A], [11-A];
- получены условия разрешимости и формулы решений граничных задач типа задачи Римана-Гильберта и задачи линейного сопряжения для модельного однородного уравнения [3-A], [12-A];
- получено интегральное уравнение эквивалентное системе (5.1) в классе $C(G \cup \Gamma) \cap C_{\bar{z}}(G \setminus \{0\})$ и найдены условия разрешимости этого уравнения [2-A];

- выявлено поведение решений однородной системы соответствующей (5.1) в окрестности сингулярной точки $z = 0$ [11-A];
- для многомерных о.с.к.р. с сингулярными коэффициентами вида (5.3) получен метод построения общего решения и формулы для решений [5-A], [14-A];
- для двумерных систем вида (5.3) с треугольной и антидиагональной матрицей коэффициентов построены явные формулы для общего решения [4-A];
- для двумерных систем вида (5.3) с антидиагональной матрицей коэффициентов установлены теоремы разрешимости задачи типа Римана-Гильберта и представлены формулы для решения [6-A].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертации результаты в основном носят теоретический характер. Результаты диссертации и развитые в ней методы задач можно применять при исследовании других классов уравнений математической физики с сингулярностями. Ряд результатов диссертации могут быть использованы при проведении учебных занятий со студентами и магистрантами математических профилей.

Список использованной литературы

- [1]. Александрия, Г.Н. Об одной граничной задаче для обобщенных аналитических функций [Текст] / Г.Н. Александрия // Труды Тбилисского ун-та. – 1955. – Т. 56. – С. 135 – 139.
- [2]. Александрия, Г.Н. Об одной общей задаче Римана-Гильберта в классе обобщенных аналитических функций [Текст] / Г.Н. Александрия // Труды Тбилисского ун-та. – 1957. – Т. 64. – С. 115 – 121.
- [3]. Александров, А.Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей [Текст] / А.Д. Александров. М.: Гостехиздат, 1948. – 386 с.
- [4]. Ахмедов, Р. Исследование решений одной эллиптической системы в окрестности сингулярной точки [Текст] / Р. Ахмедов // Докл. АН ТаджССР. - 1986. - Т. 29. №2. – С. 37-70.
- [5]. Ахмедов, Р. О взаимно однозначном соответствии многообразий решений обобщенных систем Коши-Римана с сингулярным коэффициентом [Текст] / Р. Ахмедов // Докл. АН ТаджССР. - 1986. - Т. 29. №5. – С. 251-254.
- [6]. Ахмедов, Р. Краевые задачи для уравнения $2\bar{z}\partial_z\Phi - \lambda e^{i\varphi}\bar{\Phi} = 0$ [Текст] / Р. Ахмедов // Ред. журн. Изв. АН ТаджССР. Отд-ние физ.-мат., хим. и геол. наук. - Душанбе. 1986. – 42 с.
- [7]. Ахмедов, Р. Краевые задачи для уравнения $2\bar{z}\partial_z w - (\lambda e^{i\varphi} + b(z))w = F$ [Текст] / Р. Ахмедов // Доклады АН ТаджССР. - 1987. -Т. 30, № 12. С. 6 – 9.
- [8]. Ахмедов, Р. Исследование одного класса векторной обобщенной системы Коши-Римана с сингулярной точкой [Текст] / Р. Ахмедов // Изв. АН РТ. Отделение физ.-мат. и хим. наук. 1992, № 4. С. 60-64.
- [9]. Ахмедов, Р. Краевая задача типа Гильберта для одного класса уравнений второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / Р. Ахмедов // Материалы межд. научной конф. «Актуальные вопросы математического анализа уравнений и информатики», посвященной 70-летию академика АН РТ Усманова З.Д. Душанбе, 24 – 25 августа 2007 г. – С. 54-59

- [10]. Ахмедов, Р. Общее решение уравнения с n -ой итерацией дифференциального оператора Коши-Римана с сингулярной точкой [Текст] / Р. Ахмедов // Доклады АН РТ; 2010, Том. 53, № 7. – С. 506 – 510.
- [11]. Ахмедов, Р. Об исследовании одного класса комплексных интегро-дифференциальных уравнений с сингулярной точкой [Текст] / Р. Ахмедов. Материалы межд. научно-практ. конф. «Роль ИКТ в инновационном развитии РТ». Душанбе, ТУТ, 17-18.11.2017. – С. 22-29.
- [12]. Ахмедов, Р. К теории модельного уравнения специального вида [Текст] / Р. Ахмедов // Известия Академии наук Республики Таджикистан. №3(156). Отделение физ.-мат. и хим. наук. 2014. – С. 42-47.
- [13]. Байзаев, С. О задаче линейного сопряжения для обобщенных аналитических функций на полуплоскости [Текст] / С. Байзаев // Доклады АН Республики Таджикистан. 1999. – Т.42, №3. – С. 74 – 79.
- [14]. Байзаев, С. О нормальной разрешимости эллиптических уравнений на плоскости в пространстве Гёльдера [Текст] / С. Байзаев, Э. Мухамадиев // Вестник Новосибирского госуниверситета, 2006. – Т. 6. Вып. 1. – С. 3 – 13.
- [15]. Байзаев, С. Об индексе эллиптических операторов первого порядка на плоскости [Текст] / С. Байзаев, Э. Мухамадиев // Дифференциальные уравнения, 1992. –Т. 28, № 5. – С. 818 – 827.
- [16]. Байзаев, С. О решениях полиномиального роста многомерной обобщенной системы Коши-Римана [Текст] / С. Байзаев // Уфимский математический журнал. 2015. Т. 7, № 3. – С. 3 – 8.
- [17]. Байзаев, С. О некоторых оценках для эллиптических систем, обобщающих систему уравнений Бицадзе [Текст] / С. Байзаев, Р.Н. Баротов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. – С. 22–35. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.22-35>.
- [18]. Байзаев, С. Полиномиальные решения переопределенных систем уравнений с сингулярными коэффициентами [Текст] / С. Байзаев, М.А. Рахимова // Современные проблемы математики и её приложений. Материалы

- международной научной конференции, посвященной 70-летию академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Илолова М. – Душанбе, 2018. – С. 80 – 81.
- [19]. Байзаев, С. О единственности решения краевых задач для некоторых классов вырождающихся уравнений с частными производными [Текст] / С. Байзаев, М.Г. Файзиев // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. 2021. №4. – С. 66-73.
- [20]. Берс, Л. Уравнения с частными производными [Текст] / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. – М.: Мир. 1966. –351 с.
- [21]. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных [Текст] / А.В. Бицадзе. М.: Наука. 1981. – 448 с.
- [22]. Блиев, Н. К. О существовании аналитического решения у одной эллиптической системы, вырождающийся в точке [Текст] / Н.К. Блиев // Изв. АН КазССР. Серия физико-математическая. -1965. -№1. – С. 96-104.
- [23]. Блиев, Н.К. О существовании аналитических решений одной вырождающейся эллиптической системы [Текст] / Н.К. Блиев // Вестник Изв. АН КазССР. - 1965. - №4. – С.74-79.
- [24]. Блиев, Н. К. О необходимом и достаточном условии существования аналитических решений у одной вырождающейся системы [Текст] / Н.К. Блиев // Изв. АН КазССР. Серия физико-математическая. - 1967. - №1. – С.93-95.
- [25]. Блиев, Н. К. Об одной обобщенной системе Коши-Римана с сингулярной точкой [Текст] / Н.К. Блиев, А. Тунгатарев // Дифференциальные уравнения и их применения. - Алма-Ата. 1975. – С. 28-36.
- [26]. Блиев, Н.К. Обобщенные аналитические функции в дробных пространствах [Текст] / Н.К. Блиев. - Алма-Ата: Наука. 1985. –159 с.
- [27]. Ватсон, Г.Н. Теория бесселевых функций [Текст] / Г.Н. Ватсон. – М: Изд-во ИЛ, 1949. –798 с.
- [28]. Векуа, И.Н. Обобщенные аналитические функции [Текст] / И.Н. Векуа. -М.: Наука. 1986. – 630 с.

- [29]. Векуа, И.Н. Неподвижные особые точки обобщенных аналитических функций [Текст] / И.Н. Векуа // Докл. АН СССР. - 1962. - Т. 145. №1. – С. 24-26.
- [30]. Векуа, Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи [Текст] / Н.П. Векуа. - М.: Наука, 1970. – 421 с.
- [31]. Виноградов, В. С. Об одной теореме Лиувилля для обобщенных аналитических функций [Текст] / В.С. Виноградов // Докл. АН СССР. - 1968. - Т. 183. №3. – С. 503-506.
- [32]. Виноградов, В. С. О теоремах Лиувилля для уравнения обобщенных аналитических функций [Текст] / В.С. Виноградов // Дифференц. ур. - 1980. - Т. 16. №1. – С. 42-46.
- [33]. Виноградов, В. С. О решении степенного роста для систем эллиптического типа [Текст] / В.С. Виноградов // Комплексный анализ и его приложения - М.: Наука. 1978. – С. 120-125.
- [34]. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики [Текст] / В.С. Владимиров. - М.: Наука, 1981. – 512 с.
- [35]. Гантмахер, Ф. Теория матриц [Текст] / Ф. Гантмахер. М.: Наука, 1989. – 576 с.
- [36]. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи [Текст] / Ф.Д. Гахов. М.: Наука, 1977. – 640 с.
- [37]. Джангибеков, Г. Задача линейного сопряжения решений обобщенной системы Коши-Римана с сингулярными коэффициентами [Текст] / Г. Джангибеков, Э.Д. Бобоев // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. 2021. №4. С. 12 – 20.
- [38]. Джураев, А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений [Текст] / А.Д. Джураев. М.: Наука, 1987. – 415 с.
- [39]. Зарипов, С.К. Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2017. №46. – С. 24 – 35.

- [40]. Зарипов, С.К. Исследование некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка со степенно-логарифмической особенностью в ядре [Текст] / С.К. Зарипов, Р.Н. Одинаев // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2020. №67. – С. 40 – 54.
- [41]. Иззатуллоев, Д. Переопределенные линейные системы двух и трех дифференциальных уравнений первого порядка с сингулярной и сверхсингулярной точками [Текст] / Д. Иззатуллоев // Автореферат дис. ... канд. физ. мат. наук. Душанбе. 2012. – 23 с.
- [42]. Исхоков, С.А. О конечномерности ядра некоторых вырождающихся эллиптических операторов недивергентного типа [Текст] / С.А. Исхоков // Доклады НАНТ. 2022. Т. 65, №3-4. – С. 157 – 161.
- [43]. Камкэ, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст] / Э. Камкэ. М.: Наука, 1971. – 576 с.
- [44]. Канторович, Л. В. Функциональный анализ [Текст] / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. - М.: Наука, 1984. – 750 с.
- [45]. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
- [46]. Литвинчук, Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения [Текст] / Г.С. Литвинчук. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
- [47]. Макацария, Г.Т. Уравнение Карлемана-Векуа с полярными особенностями [Текст] / Г.Т. Макацария // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Тбилиси, 1986. – 111 с.
- [48]. Михайлов, Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами [Текст] / Л.Г. Михайлов. - Душанбе, 1963 – 183 с.
- [49]. Михайлов, Л.Г. Об одном интегральном уравнении теории обобщенных аналитических функций в сингулярном случае [Текст] / Л.Г. Михайлов // Докл. АН СССР. - 1970 Т. 190, №3. – С.531 - 534.

- [50]. Михайлов, Л.Г. Об интегральных уравнениях с сингулярно-однородными ядрами [Текст] / Л.Г. Михайлов. - Душанбе, 2015 – 52 с.
- [51]. Михлин, С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения [Текст] / С.Г. Михлин. - М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
- [52]. Мухелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения [Текст] / Н.И. Мухелишвили. - М.: Наука, 1968. – 511 с.
- [53]. Мухамадиев, Э. К теории ограниченных решений обобщенной системы Коши-Римана [Текст] / Э. Мухамадиев, С. Байзаев // ДАН СССР, 1986. – Т. 287, № 2. – С. 280 – 283.
- [54]. Мухсинов, А. Построение решений в виде двойных степенных рядов сингулярного уравнения эллиптического типа [Текст] / А. Мухсинов // Докл. АН ТаджССР. 1988. - Т. 31, №9. – С. 499 - 503.
- [55]. Мухсинов, А. Формула представления решений одного уравнения в частных производных с сингулярной линией [Текст] / А. Мухсинов // Докл. АН РТ. 2009. - Т. 52, №2. – С.101 - 105.
- [56]. Мухсинов, А. Формула представления решений одного трехмерного уравнения в частных производных с сингулярной плоскостью [Текст] / А. Мухсинов // Докл. АН РТ. 2009. - Т. 52, №3. – С.174 - 181.
- [57]. Мухсинов, А. Исследования многообразий решений краевых задач для некоторых многомерных вырождающихся (сингулярных) уравнений в частных производных эллиптического типа [Текст] / А. Мухсинов // Автореферат дис. ... док. физ.-мат. наук. - Душанбе, 2010. – 34 с.
- [58]. Наджмиддинов, Х. Исследование обобщенной системы Коши-Римана с точечной особенностью выше первого порядка в коэффициентах [Текст] / Наджмиддинов Х. // Дис. ... канд. физ.- мат. наук. - Душанбе, 1977. – 98с.
- [59]. Наджмиддинов, Х. Обобщенная система Коши-Римана с точечной особенностью выше первого порядка в коэффициентах [Текст] / Х. Наджмиддинов, З.Д. Усманов // Докл. АН ТаджССР. 1975. Т. 18, №5. – С. 11-15.

- [60]. Назиров, Г. Аналитические решения некоторых эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами [Текст] / Г. Назиров // Докл. АН ТаджССР. - 1961. -Т. 4, №3. – С. 3-6.
- [61]. Оспанов, К.Н. К теории сингулярных эллиптических систем первого порядка [Текст] / К.Н. Оспанов // Материалы межд. научной конф. «Функциональный анализ и его приложения». Астана, 2 – 5 октября 2012 г. – С. 172 – 174.
- [62]. Прёсдорф, З. Некоторые классы сингулярных уравнений [Текст] / З. Прёсдорф // М.: Мир, 1979. – 496 с.
- [63]. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного [Текст] / И.И. Привалов. - М.: Наука, 1984. – 432 с.
- [64]. Раджабов, Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями [Текст] / Н. Раджабов. Душанбе: Изд-во ТГУ им. В.И. Ленина, 1980, часть 1. –126 с.
- [65]. Раджабов, Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами [Текст] / Н. Раджабов – Душанбе: 1992. – 236 с.
- [66]. Раджабова, Л. К теории одного класса двумерного немодельного интегрального уравнения вольтерровского типа со сверхсингулярными граничными линиями в ядрах [Текст] / Л.Н. Раджабова, Н. Раджабов //ДАН России, 2005, т. 400, №5 – С. 602-605.
- [67]. Раджабов, Н. Интегральные уравнения типа Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными ядрами и их приложения [Текст] / Н. Раджабов. Душанбе, 2007. – 222 с.
- [68]. Раджабов, Н. Переопределённая линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями [Текст] / Н. Раджабов, Мохамед эл Саид – LAP. LAMBERT. Akademik Publishig. 2011. – 234 с.
- [69]. Раджабов, Н.Р. О корректной постановке задач для системы Бицадзе со сверхсингулярной точкой и окружностью [Текст] / Н.Р. Раджабов, А.Б.

- Расулов // Научные журналы НИУ «БелГУ» Серия: Математика. Физика. – 2011. №23(118). Вып. 25. – С. 93 – 101.
- [70]. Раджабов, Н. Задача линейного сопряжения для системы Бицадзе со сверхсингулярной окружностью [Текст] / Н. Раджабов, А.Б. Расулов // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, №4. – С. 529 – 536.
- [71]. Раджабов, Н. Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтера с фиксированными сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложение [Текст] / Н. Раджабов, Л.Н. Раджабова. Saarbiicken: LAP LAMBERT, Academic Publishing, 2012. – 502 с.
- [72]. Раджабова, Л.Н. Некоторые случаи для одного класса линейных уравнений третьего порядка с сингулярной точкой [Текст] / Л.Н. Раджабова // Доклады АН Республики Таджикистан. Душанбе, 1999. Т.17. №4. – С. 41-49.
- [73]. Раджабова, Л.Н. К теории одного класса гиперболического уравнения с сингулярными линиями [Текст] / Л.Н. Раджабова // ДАН Республики Таджикистан. 2006. Т. 49, № 8. – С.710-717.
- [74]. Раджабова, Л.Н. О явных решениях переопределенной системы интегральных уравнений типа Вольтерра с собыми граничными линиями [Текст] / Л.Н. Раджабова // Докл. НАН Таджикистана. 2022. Т. 65, №9-10. – С. 601-609.
- [75]. Рахимова, М.А. Полиномиальные решения переопределенных систем уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами [Текст] / М.А. Рахимова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физ.-мат., хим., геол. и тех. наук. 2017. №4 (169). – С. 3 – 13.
- [76]. Сатторов, А. Интегральные представления и решения задач Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений вида Гельмгольца на плоскости [Текст] / Сатторов А.С., Джобиров Ё.Р. // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. 2020. № 1. – С. 25–44.
- [77]. Сатторов, А.С. Интегральное представление и решение задачи Коши для некоторых вырождающихся дифференциальных уравнений типа Гельмгольца

- в пространстве [Текст] / А.С. Сатторов, Ё.Р. Джобиров, Ш.Н. Саъдулозода // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. 2020. № 2. – С. 51–68.
- [78]. Сатторов, А.С. Интегральные представления и решения задач типов Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений первого рода вида Гельмгольца в плоскости и пространстве [Текст] / А.С. Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. 2020. № 1. – С. 78–93.
- [79]. Смирнов, М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения [Текст] / М.М. Смирнов. М.: Наука, 1966. – 293 с.
- [80]. Соболев, С. Л. Уравнения математической физики [Текст] / С.Л. Соболев. - М.: Наука, 1966. – 443 с.
- [81]. Тасмамбетов, Ж.Н. Построение нормально-регулярных и конечных решений вырожденных гипергеометрических систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [Текст] / Ж.Н. Тасмамбетов // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения. 2007. – С. 305 – 306.
- [82]. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Изд-во МГУ.1999. –798 с.
- [83]. Тунгатаров, А. Некоторые иррегулярные случаи обобщенной системы Коши-Римана и решение краевых задач Римана-Гильберта [Текст] / А. Тунгатаров // Дис. ... канд. физ. - мат. наук. - Алма-Ата, 1978. – 93 с.
- [84]. Тунгатаров, А. О разрешимости одной обобщенной системы Коши-Римана [Текст] / А. Тунгатаров // Ред. журн. Изв. АН КазахССР. Серия физико - математическая. -Алма-Ата, 1981. – 21 с. - Рукопись деп. в ВИНТИ 29.12.81., №5924.
- [85]. Усманов, З.Д. О бесконечно малых изгибаниях поверхностей положительной кривизны с изолированной точкой уплощения [Текст] / З.Д. Усманов // Матем. сб.-1970. - Т. 83 (125). №12. – С. 596 - 615.

- [86]. Усманов, З. Д. Интегральное уравнение для одного класса обобщенных аналитических функций с неподвижной особой точкой [Текст] / З.Д. Усманов // Докл. АН ТаджССР. - 1971. -Т. 14, №10. – С. 12-15.
- [87]. Усманов, З. Д. Задача Дирихле для обобщенной системы Коши-Римана в сингулярном случае [Текст] / З.Д. Усманов // Докл. АН ТаджССР. - 1971. -Т. 14, №11. – С.16-20.
- [88]. Усманов, З. Д. Задача Римана-Гильберта для одного класса обобщенных аналитических функций с неподвижной особой точкой, I [Текст] / З.Д. Усманов // Докл. АН ТаджССР. - 1972. - Т. 15, №4. – С. 10-13.
- [89]. Усманов, З. Д. Задача Римана-Гильберта для одного класса обобщенных аналитических функций с неподвижной особой точкой, II [Текст] / З.Д. Усманов // Изв. АН ТаджССР. Отд-ние физ.-мат., хим. и геол. наук. - 1971. - 3 (41). – С.10-14.
- [90]. Усманов, З. Д. К теории уравнения [Текст] / З.Д. Усманов // Докл. АН ТаджССР. - 1972. - Т. 15. №5. – С.13-16.
- [91]. Усманов, З. Д. К задаче сопряжения обобщенных аналитических функций с неподвижной особой точкой [Текст] / З.Д. Усманов // Докл. АН ТаджССР. - 1972. -Т. 15. №6. – С.13-17.
- [92]. Усманов, З. Д. Об одном классе обобщенных систем Коши-Римана с сингулярной точкой [Текст] / З.Д. Усманов // Сиб. мат. ж. - 1973. - Т. 14. №5. – С. 1076 - 1087.
- [93]. Усманов, З. Д. Структура нулей обобщенных аналитических функций с неподвижной особой точкой / З.Д. Усманов // Изв. АН Тадж ССР. - 1974. -3 (53). – С.7-10.
- [94]. Усманов, З. Д. Исследование обобщенных аналитических функций с неподвижной особой точкой [Текст] / З.Д. Усманов // Изв. АН ТаджССР. Отд-ние физ. - мат., хим. и геол. наук. -1972. -1 (43). – С. 3-6.

- [95]. Усманов, З. Д. Исследование уравнения $\partial_z \Phi - \frac{\lambda}{2\bar{z}} \bar{\Phi} = 0$ [Текст] / З.Д. Усманов // Исследования по краевым задачам и интегральным уравнениям / З.Д. Усманов. –Душанбе: Дониш, 1976. – С. 159 - 186.
- [96]. Усманов, З. Д. Бесконечно малые изгибания поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения [Текст] / З.Д. Усманов // Differential Geometry Banach center publications. Volume 12 PWN - Polish scientific publishers Warsaw 1984. – Р. 241-272.
- [97]. Усманов, З. Д. Эффективное решение одного двумерного интегрального уравнения с однородным ядром и его приложения [Текст] / З.Д. Усманов // Дифферен. ур. - 1972. - Т. 18, № 12. – С. 2267-2270.
- [98]. Усманов, З.Д. Обобщенные системы Коши-Римана с сингулярной точкой [Текст] / З.Д. Усманов. Душанбе, 1993. – 244 с.
- [99]. Усмонов, Н. Задача сопряжения аналитических функций с сингулярными точками на контуре [Текст] / Н. Усмонов, М.Б. Холикова // Доклады АН РТ, 2004, т. XLVII, №4, – С. 31-36.
- [100]. Шамсудинов, Ф.М. Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Вестник Волгоградского гос. ун-та. Серия 1. Мат. Физ. 2016. №6 (37). – С. 90 – 107.
- [101]. Шамсудинов, Ф.М. Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка со сверхсингулярной точкой / [Текст] Ф.М. Шамсудинов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. 2015. №1/6 (19). – С. 22 – 27.
- [102]. Шамсудинов, Ф.М. Об исследовании одной переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка со сверхсингулярными коэффициентами [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Доклады АН РТ. 2015. Т. 58, №6. – С. 465 – 475.

- [103]. Шамсудинов, Ф.М. Интегральные представления решений для одной переопределенной системы второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Вестник ТНУ. 2015. №1.1(156). – С. 60 – 65.
- [104]. Шарипов, Б. О некоторых системах в полных дифференциалах с сингулярными точками [Текст] / Б. Шарипов // Доклады АН РТ. 2010. – Т. 53. №10. – С. 759 – 765.
- [105]. Шарипов, Б. О формулах представления решений некоторых нелинейных систем в полных дифференциалах с сингулярной точкой [Текст] / Б. Шарипов // Доклады АН РТ. 2011. – Т.54. №6. – С. 687 – 693.
- [106]. Шарипов, Б. Об одном классе нелинейных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами [Текст] / Б. Шарипов // Дифференциальные уравнения. 2015. – Т. 51. №9. – С. 1252 – 1256.
- [107]. Шарипов, Б. Об одном классе систем в полных дифференциалах с сингулярной линией [Текст] / Б. Шарипов, Л.Г. Михайлов // Дифференциальные уравнения. 2016. – Т. 52. №6. – С. 696 – 700.
- [108]. Begehr, H. On continuous solutions of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity / H. Begehr, D. Dao-Qing // Journal of Differential Equations. 2004. V.196. – P. 67 – 90.
- [109]. Bers, L. Theory of pseudo-analytic function [Text] / N.Y., 1953. –187 p.
- [110]. Gilbert, R.P. Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations [Text] / R.P. Gilbert. –New York and London: Academic Press, 1969. – 306 p.
- [111]. Gutlyanskiĭ, V.Ya. On the Dirichlet problem for generalized Cauchy-Riemann equations / V.Ya. Gutlyanskiĭ, V.I. Ryazanov, A.R. Salimov, R.R. Salimov // ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2025. No 2, p. 3 – 10, <https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.02.003>.
- [112]. Frank, W.J. Handbook of Mathematical Functions [Text] / Frank W. Olver, Daniel W. Lozier, Ronald Boisvert, Charles W. Clark // NIST. 2010. U.S. Department of Commerce and Cambridge University Press. – 967 p.

- [113]. Klimentov, S.B. Riemann-Hilbert boundary value problem for generalized analytic functions in Smirnov classes / S.B. Klimentov // Proceedings of the International Conference on Generalized Analytic Functions and Their Applications. Tbilisi, Georgia, 12 – 14 September 2011. – P. 101 – 106.
- [114]. Khushvakhtov, M.B. To the theory of non-model two-dimensional integral equations of Volterra type with a strongly singular and weakly singular line on a strip [Text] / L.N. Rajabova, M.B. Khushvakhtov // Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian national University. Mathematics. Computer science. Mechanics series. – 2019 – №4 (129) – P. 67-72.
- [115]. Magomedov, G. A. About some quasilinear and nonlinear equations of Cauchy-Riemann and Beltrami types / G.A. Magomedov // Proceedings of the International Conference on Generalized Analytic Functions and Their Applications. Tbilisi, Georgia, 12 – 14 September 2011. – P. 112 – 115.
- [116]. Makatsaria, G. Some properties of the irregular elliptic systems on the plane / G. Makatsaria // Proceedings of the International Conference on Generalized Analytic Functions and Their Applications. Tbilisi, Georgia, 12 – 14 September 2011. – P. 115 – 120.
- [117]. Peter, A. McCoy. Characterization of Solutions to the Generalized Cauchy-Riemann System / A. McCoy Peter // Journal of mathematical analysis and applications. 1984. V. 101. – P. 465-474.
- [118]. Rajabova, L. Investigation one class of two-dimensional conjugation integral equation with fixed singular kernels in connection with hyperbolic equation [Text] / L. Rajabova, N. Rajabov // Abstracts of the International Conference “Inverse Problems: modeling and Simulation” held on May 26-30, 2008 at Oludeniz, Fethiye, Turkey. – P. 158-159.
- [119]. Rajabova, L. On some two dimensional Volterra type linear integral equation with super-singularity [Text] / M. Ronto, N. Rajabov, L. Rajabova // Mathematical Notes. Miscolc, 2003, v4, №1. – P. 65-76.

- [120]. Timofeev, A.Yu. Dirichlet problem for generalized Cauchy-Riemann systems / A.Yu. Timofeev // Proceedings of the International Conference on Generalized Analytic Functions and Their Applications. Tbilisi, Georgia, 12 – 14 September 2011. – P. 143 – 148.
- [121]. Tyurikov, E.V. The solution of the Vekua generalized boundary value problem of the membrane theory of thin shells / E.V. Tyurikov // Proceedings of the International Conference on Generalized Analytic Functions and Their Applications. Tbilisi, Georgia, 12 – 14 September 2011. – P. 148 – 153.
- [122]. Vekua, I.N. On one of the elliptic systems with singularities [Text] / I.N. Vekua // Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics. Tokyo. 1969. – P. 142 – 147.
- [123]. Zaripov, S.Q. The new type of singular integro-differential equations. V. 1 [Text] /S.Q. Zaripov. // Germany: LAPLAMBERT Academic Publishing. 2016. –120 p.
- [124]. Zaripov, S.Q. On a new method of solving of one class of model first-order integro-differential equations with singularity in the kernel [Text] / Zaripov, S.Q. // Mat. Fiz. Komp'yut. Model. 20 (4). 2017 – P. 68–75.

Б) Список публикаций соискателя ученой степени:

1. В журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации

- [1-A]. **Шокирова, М.М.** Интегральное представление решений специального класса модельных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярной точкой [Текст] / М.М. Шокирова, Р. Ахмедов // Учёные записки. Серия естественных и экономических наук. Худжанд. 2017. №1 (40) – С. 58-64.
- [2-A]. **Шокирова, М.М.** Об одном способе вывода обобщенной интегральной формулы Коши для решений одного класса модельных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярной точкой [Текст] / М.М. Шокирова // Учёные записки. Серия естественных и экономических наук. Худжанд. 2022. №1 (60). – С. 3 – 8.
- [3-A]. **Шокирова, М.М.** Задача Римана-Гильберта для одного класса обобщенных систем Коши-Римана с сингулярной точкой в круговой области [Текст] / М.М. Шокирова // Учёные записки. Серия естественных и экономических наук. Худжанд. 2024. №1 (68). – С. 27-34.
- [4-A]. **Шокирова, М.М.** О нахождении общего решения одного класса двумерных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами [Текст] / С. Байзаев, М.М. Шокирова // Учёные записки. Серия естественных и экономических наук. Худжанд. 2024. №3 (70). – С. 3-10.
- [5-A]. **Шокирова, М.М.** О построении решений одного класса многомерных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами [Текст] / С. Байзаев, М.М. Шокирова // Математические структуры и моделирование. РФ. Омский гос. ун-т. 2025. № 1 (73). – С. 16-22.
- [6-A]. **Шокирова, М.М.** Об общем решении и задаче Римана-Гильберта для одного класса двумерных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами [Текст] / С. Байзаев, М.М. Шокирова // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. 2025. №1. – С. 5 – 16.

В других изданиях:

- [7-А]. **Шокирова, М.М.** О некоторых свойствах решений модельной обобщенной системы Коши-Римана в окрестности сингулярной точки [Текст] / М.М. Шокирова, Р. Ахмедов // РФ. Международный научный журнал «Символ науки». №10/2015. – С. 9-12.
- [8-А]. **Шокирова, М.М.** Интегральная формула Коши для решений модельной обобщенной системы Коши-Римана с сингулярной точкой [Текст] / М.М. Шокирова, Р. Ахмедов, С. Юсупов // Учёные записки. Серия естественных и экономических наук. Худжанд. 2015. № 4(35). – С. 3 – 10.
- [9-А]. **Шокирова, М.М.** Об одном способе вывода обобщенной интегральной формулы Коши для решений одного класса модельных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярной точкой [Текст] / М.М. Шокирова, Р. Ахмедов // Маводи конференсияи илмӣ-амалии профессорон, омӯзгорон ва муҳаққиқони ҷавони ДДХБСТ таҳти унвони «Илм ва инноватсия баҳри иҷрои ҳадафҳои миллӣ». Баҳши инноватсия ва телекоммуникатсия. Худжанд: Дабир, 2019. – С. 18 – 23.
- [10-А]. **Шокирова, М.М.** Свойства решений одного класса комплексного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с сингулярной граничной точкой [Текст] / М.М. Шокирова // Материалы II Межд. научно-практ. конф. “Современная наука: Проблемы, идеи, инновации”. 25.12.2020. - РФ. Чистополь. – С. 22 – 25.
- [11-А]. **Шокирова, М.М.** О свойствах решений специальной модельной обобщенной системы Коши-Римана в окрестности сингулярной точкой [Текст] / М.М. Шокирова // Сборник статей LIV Межд. научно-практ. конф. «Word science: problems and innovations». -РФ. Пенза. 30.05.2021. – С. 10 – 12.
- [12-А]. **Шокирова, М.М.** Задача Дирихле для решений специальной модельной обобщенной системы Коши-Римана в окрестности сингулярной точки [Текст] / М.М. Шокирова // VIII Всероссийская научно-практ. конф. с

международным участием «Современные проблемы физико-математических наук». РФ. Орёл. 25-26 ноября 2022 г. – С. 150-154.

[13-М]. **Шокирова, М.М.** О свойствах решений основных ядер модельной обобщенной системы Коши-Римана в окрестности сингулярной точкой [Текст] / М.М. Шокирова // Сборник статей конф. XLVII International Multidisciplinary Conference «Prospects and key tendencies of science in contemporary world». Испания. Мадрид. 2024. – С. 92 – 99.

[14-А]. **Шокирова, М.М.** О регулярных решениях одного класса многомерных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами [Текст] / С. Байзаев, М.М. Шокирова // Материалы Межд. науч. конф. “Уфимская математическая школа – 2024”. РФ.Уфа. 2 – 5 октября 2024. Том 2. – С. 22-23.